MFA-M1 et MADOCS-M1
2008/2009
Analyse fonctionnelle et EDP

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n^{o}6: Equation de la chaleur

Exercice 1. Soit $a > 0$. Trouver une solution explicite du problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - a^2 \Delta u(t,x) = 0, & t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Exercice 2. Montrer que $K_{t+s}(x) = (K_t * K_s)(x)$ pour tous $t, s > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. On rappelle que $K_t(x) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Exercice 3. Résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0, & t > 0, \ x > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \geq 0, \\ u(t,0) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

où $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^+)$ est telle que $u_0(0) = u_0''(0) = 0$. Indication: prolonger u pour $x \leq 0$ par imparité.

Exercice 4. Soit $u(t,x)$ la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), & t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

et $v(t,x)$ la solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) - \Delta v(t,x) = g(t,x), & t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

On suppose que $f, g \in C^1_b(\mathbb{R}^{d+1}_+)$, que $u_0, v_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$ et qu'on a

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{(t,x) \in \mathbb{R}^{d+1}_+} |f(t,x) - g(t,x)| \leq \epsilon, \qquad \|u_0 - v_0\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u_0(x) - v_0(x)| \leq \epsilon.$$

Montrer que pour tout $t > 0$ on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u(t,x) - v(t,x)| \leq \epsilon(1+t).$$

Exercice 5. On considère l'équation de la chaleur en dimension $d = 1$ et sur un intervalle $[0, L]$.
Soit $u_0 \in C([0,L])$ tel que $u_0(0) = u_0(L) = 0$. On s'intéresse au problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0, & t > 0, \ x \in]0, L[, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in [0, L], \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

a) Montrer qu'il existe une unique solution $u(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^*_+ \times [0,L]) \cap C(\mathbb{R}_+ \times [0,L])$ au problème ci-dessus. Indication: prolonger u pour $x \in [-L, 0]$ par imparité puis à $\mathbb{R}$ par $2L-$périodicité.

b) Soit $f \in C^1([0,L])$ telle que $f(0) = f(L) = 0$. Montrer que $\|f\|_{L^2} \leq \dfrac{L}{\sqrt{2}}\|f'\|_{L^2}$ (inégalité de Poincaré).

c) Pour une fonction $f(t,x)$, on note $\|f(t)\|_2^2 = \displaystyle\int_0^L |f(t,x)|^2 \mathrm{d}x$. Montrer que la solution $u(t,x)$ vérifie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\|u(t)\|_2^2}{2}\right) + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}(t)\right\|_2^2 = 0.$$

d) En déduire que pour tout $t > 0$ on a $\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 \mathrm{e}^{-\frac{Lt}{8}}$. Indication: utiliser la méthode du c) de l'Exercice 6 Feuille 5.

On s'intéresse maintenant au problème

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx}^2 u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in]0,L[, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in [0,L], \\ u(t,0) = T_1,\ u(t,L) = T_2, & t > 0. \end{cases}$$

e) Vérifier que $u(t,x)$ est solution du problème (2) si et seulement si la fonction $v(t,x) = u(t,x) - \left(T_1 + \dfrac{T_2 - T_1}{L}x\right)$ est solution du problème (1) avec $v_0(x) = u_0(x) - \left(T_1 + \dfrac{T_2 - T_1}{L}x\right)$.

f) En déduire que $u(t,x)$ converge dans $L^2([0,L])$ lorsque $t \to +\infty$ et préciser sa limite.