MFA-M1 et MADOCS-M1
2008/2009
Analyse fonctionnelle et EDP

# TD n$^o$5: Equations des ondes

**Exercice 1.** Résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - a^2\partial^2_{xx}u(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R},\ x > 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x > 0, \\ u(t,0) = 0, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^+)$, $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^+)$ sont telles que $u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0$. Indication: prolonger $u$ pour $x \leq 0$ par imparité.

**Exercice 2.** En utilisant les formules de D'Alembert et Duhamel, donner la solution explicite du problème

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - a^2\partial^2_{xx}u(t,x) = f(t,x), & t, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Exercice 3.** Soient $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ et $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ à support compact, et $u$ la solution du problème

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - a^2\partial^2_{xx}u(t,x) = 0, & t, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**a)** Montrer que pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est à support compact.
On définit l'énergie cinétique $k(t)$ et l'énergie potentielle $p(t)$ d'une solution $u$ par

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_t u(t,x)|^2 \mathrm{d}x, \quad k(t) = \frac{a^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u(t,x)|^2 \mathrm{d}x.$$

**b)** Montrer que l'énergie totale $e(t) = k(t) + p(t)$ est constante.

**c)** Montrer que pour $t$ assez grand on a $k(t) = p(t)$ (on pourra utiliser la formule de D'Alembert).

**Exercice 4.** On considère l'équation des ondes homogène en dimension $d = 3$. On suppose que les données initiales $u_0$ et $u_1$ sont à support compact. Montrer que pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3$ il existe $t_K$ tel que

$$u(t,x) = 0, \quad \forall t \geq t_K, \forall x \in K.$$

Ce résultat est-il encore vrai en dimension $d = 1$?

**Exercice 5.** On considère l'équation des ondes homogène en dimension $d = 3$. On suppose que les données initiales $u_0$ et $u_1$ sont à support compact. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|u(t,x)| \leq \frac{C}{t}, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Ce résultat est-il encore vrai en dimension $d = 1$?

**Exercice 6.** On considère l'équation différentielle

$$x''(t) + x'(t) + x(t) + x^3(t) = 0.$$

On suppose que la solution est définie pour tout $t \geq 0$, et on définit l'énergie $E(t)$ d'une solution par

$$E(t) = \frac{1}{2}(x'(t))^2 + \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{4}x^4(t).$$

Soit $\epsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$, on définit les quantités $F$ et $G$ par

$$F(t) = E(t) + \epsilon x(t)x'(t) + \frac{\epsilon}{2}x^2(t), \quad G(t) = (1-\epsilon)x'(t))^2 + \epsilon x^2(t) + \epsilon x^4(t).$$

**a)** Montrer que $F'(t) + G(t) = 0$.

**b)** Montrer que

$$(1-\epsilon)E(t) \leq F(t) \leq (1+2\epsilon)E(t) \quad \text{et} \quad 2\epsilon E(t) \leq G(t).$$

**c)** En déduire que $F'(t) + \dfrac{2\epsilon}{1+\epsilon}F(t) \leq 0$ puis qu'il existe $C > 0$ tel que $E(t) \leq C\mathrm{e}^{-\frac{2\epsilon}{1+2\epsilon}t}$ pour tout $t \geq 0$.

**d)** Que peut-on en conclure sur $x(t)$?