MFA-M1 et MADOCS-M1
2008/2009
Analyse fonctionnelle et EDP

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n^{o}4: Equations de Laplace et de Poisson

Exercice 1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. A toute fonction $u \in C^2(\Omega)$, on associe la fonction $\tilde{u}(x+iy) = u(x,y)$ définie sur $\tilde{\Omega} = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \,|\, (x,y) \in \Omega\}$. Montrer que si $\tilde{u}$ est holomorphe sur $\tilde{\Omega}$ alors u est harmonique sur Ω.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de donner une autre démonstration du principe du maximum dans sa version faible:

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ et $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonique sur Ω. Alors

$$\inf_{\partial\Omega} u \le u(x) \le \sup_{\partial\Omega} u, \quad \forall x \in \Omega.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n(x) = u(x) + \dfrac{|x|^2}{n}$, où $|x|$ désigne la norme euclidienne de x.

a) Démontrer qu'il existe $x_n \in \bar{\Omega}$ en lequel la fonction u_n atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$, i.e. tel que $u_n(x_n) = \max\{u_n(x) \,|\, x \in \bar{\Omega}\}$.

b) Montrer que $x_n \in \partial\Omega$ (Raisonner par l'absurde après avoir calculé Δu_n).

c) En déduire qu'il existe un point $x \in \partial\Omega$ en lequel la fonction u atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$, puis le principe du maximum.

d) Si on suppose uniquement $\Delta u \ge 0$, que reste-t-il du principe du maximum?

Exercice 3. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$. Soient $A : \Omega \to M_d(\mathbb{R})$ continu et $B : \Omega \to \mathbb{R}^d$ continu et borné. On suppose qu'il existe $\theta > 0$ tel que la matrice $A = (a_{ij})$ vérifie

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2, \ \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \ \forall x \in \Omega. \qquad (E)$$

La condition (E) signifie que pour tout x la matrice $A(x)$ est définie positive, et que la plus petite valeur propre de $A(x)$ est minorée par θ. On rappelle qu'une matrice définie positive est symétrique et diagonalisable dans une base orthonormée, i.e. il existe $P \in O_d(\mathbb{R})$ telle que $PA\,{}^tP$ soit diagonale.

Pour toute fonction $u \in C^2(\Omega)$, on définit la fonction $Lu := -\mathrm{div}(A \cdot \vec{\nabla}) + B \cdot \vec{\nabla}$, i.e.

$$(Lu)(x) = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x) + \sum_{i=1}^{d} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Lorsque la matrice A vérifie (E) ci-dessus, on dit que l'opérateur L est uniformément elliptique.
Remarque: si la matrice $A(x)$ est la matrice identité et B le vecteur nul, on a $Lu = -\Delta u$.

Le but de l'exercice est de montrer un principe du maximum semblable à celui de l'Exercice 2. pour les solutions de l'équation $Lu = 0$.

1) Déterminer $\tilde{B} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ tel que $(Lu)(x) = -\displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d} \tilde{B}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$.

2) Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tel que $Lu < 0$.

a) Justifier rapidement que u admet un maximum global x_0 sur $\bar{\Omega}$.

b) On suppose que $x_0 \in \Omega$. Que peut-on dire des différentielles $1^{\text{ère}}$ et 2^{nde} de u en x_0.

c) Montrer que quelle que soit la base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ on a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}(x_0) \le 0$.

d) En choisissant une base orthonormée adaptée, en déduire que $x_0 \in \partial\Omega$.

3) On suppose maintenant que $Lu \leq 0$. Pour tous $\epsilon, \lambda > 0$ on pose $u_{\epsilon,\lambda}(x) = u(x) + \epsilon e^{\lambda x_1}$.

a) Pour tout $\epsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $Lu_{\epsilon,\lambda} < 0$.

b) Etant donné $\epsilon > 0$, on fixe $\lambda > 0$ tel que $Lu_{\epsilon,\lambda} < 0$. On notera alors simplement u_ϵ la fonction $u_{\epsilon,\lambda}$. Montrer que u_ϵ atteint son maximum sur $\bar{\Omega}$ en un point $x_\epsilon \in \partial\Omega$.

c) En déduire que u admet son maximum sur $\bar{\Omega}$ en un point $x \in \partial\Omega$.

4) Montrer que les solutions de l'équation $Lu = 0$ vérifient le principe du maximum (version faible).

Exercice 4. (Théorème de Liouville). Soit u une fonction harmonique bornée sur $\mathbb{R}^d$.

a) Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$, $L = |x - y|$ et $R > L$. Soient B_1 et B_2 les boules de centres respectifs x et y et de rayon R. Montrer que le volume de $B_1 \cap B_2$ est minoré par $\omega_d \left(R - \frac{L}{2}\right)^d$ (faire un dessin!).

b) En utilisant la formule de la moyenne, en déduire que u est constante.

Exercice 5. Déterminer les fonctions harmoniques radiales sur $\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$, i.e. telles que $u(x) = v(|x|)$ où $v :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $\Gamma(x)$ la solution fondamentale de l'équation de Laplace, i.e.

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{d(2-d)\omega_d}|x|^{2-d} & \text{pour } d \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi}\ln(|x|) & \text{pour } d = 2. \end{cases}$$

Calculer les dérivées partielles premières et secondes de Γ. En déduire que Γ est harmonique et

$$\forall x \neq 0, \quad |\partial_i \Gamma(x)| \leq \frac{1}{d\omega_d}|x|^{1-d} \quad \text{et} \quad |\partial^2_{ij}\Gamma(x)| \leq \frac{1}{\omega_d}|x|^{-d}.$$

Exercice 7. On cherche à déterminer la fonction de Green $G(x, y)$ pour le demi-espace $\mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, x_d > 0\}$ et à en déduire une formule explicite du problème

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^d_+, \quad u = g \text{ sur } \partial\mathbb{R}^d_+.$$

On rappelle que la fonction de Green G pour un domaine Ω est définie par $G(x, y) = \Gamma(x-y)+h_x(y)$ où h_x est telle que h_x est harmonique dans Ω et $h_x(y) = -\Gamma(x - y)$ sur $\partial\Omega$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}^d_+$, on définit son reflété par rapport à l'hyperplan $\partial\mathbb{R}^d_+ = \{x_d = 0\}$ par $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{d-1}, -x_d)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d_+$, soit $h_x(y) = -\Gamma(\tilde{x} - y)$. Montrer que la fonction h_x ainsi définie vérifie bien les conditions voulues.

b) En déduire que si u est solution de $\Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^d_+$ et $u = g$ sur $\partial\mathbb{R}^d_+$ alors

$$u(x) = \frac{2x_d}{d\omega_d}\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} \frac{g(y)}{|x - y|^d}dy.$$

c) On suppose que g est continue. Montrer que la fonction u définie par

$$u(x) = \begin{cases} \frac{2x_d}{d\omega_d}\int_{\partial\mathbb{R}^d_+} \frac{g(y)}{|x-y|^d}dy & \text{si } x \in \mathbb{R}^d_+, \\ g(x) & \text{si } x \in \partial\mathbb{R}^d_+, \end{cases}$$

est solution du problème, i.e. $u \in C^2(\mathbb{R}^d_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^d_+})$, vérifie $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^d_+$ et $u = g$ sur $\partial\mathbb{R}^d_+$.

Exercice 8. (Une inégalité de Harnack). Soit $R > 0$ et u une fonction positive et harmonique dans la boule B_R centrée à l'origine et de rayon R. On rappelle que l'unique solution du problème "$\Delta u = 0$ dans B_R et $u = g$ sur ∂B_R" est donnée par la formule de Poisson

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{d\omega_d R}\int_{\partial B_R} \frac{g(y)}{|x - y|^d}d\sigma.$$

a) Soit $x \in B_R$. En utilisant la formule de Poisson sur une boule B_r avec $|x| < r < R$ ainsi que la formule de la moyenne, montrer que

$$R^{d-2}\frac{R - |x|}{(R + |x|)^{d-1}}u(0) \leq u(x) \leq R^{d-2}\frac{R + |x|}{(R - |x|)^{d-1}}u(0).$$

b) En déduire que pour toute fonction u positive et harmonique sur B_R et pour tout $r < R$, on a

$$\sup_{x\in B_r} u(x) \leq \left(\frac{R + r}{R - r}\right)^d \inf_{x\in B_r} u(x).$$