CY Cergy Paris Université
Département de Mathématiques
L3 Maths - S5
2021/2022

Séries de Fourier

TABLE DES MATIÈRES

1 Introduction **5**

2 Préambule **9**
2.1 Fonctions périodiques, continues ou C^1 par morceaux 9
2.2 Un peu d'algèbre linéaire 11

3 Polynômes et séries trigonométriques **15**
3.1 Polynômes trigonométriques 15
3.2 Séries trigonométriques 18

4 Série de Fourier d'une fonction périodique. **21**
4.1 Coefficients de Fourier 21
4.2 Meilleure approximation en moyenne quadratique : l'inégalité de Bessel . . . 26

5 Convergence des séries de Fourier **29**
5.1 Le théorème de Dirichlet 29
5.2 Approximation uniforme 32
5.3 Convergence en moyenne quadratique. Formule de Parseval 33
5.4 Les fonctions T-périodiques 36

6 Compléments **39**
6.1 Le théorème de Fejér 39
6.2 Transformation d'Abel et convergence des séries trigonométriques 43

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'idée des séries de Fourier peut se placer dans le cadre un peu plus général et formulé de façon assez imprécise suivant : approcher, voire "développer", toutes les fonctions d'un certain type à l'aide de fonctions plus simples.

Vous avez vu en L1 qu'une fonction régulière (disons C^∞) peut être approchée par des fonctions polynômes, c'est l'idée des développements limités. De plus les coefficients de ce développement s'obtiennent à l'aide de la formule de Taylor. Si $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est C^∞ et $a \in I$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}h^N + o(h^N) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^N).$$

Ici bien sûr l'idée d'approximation est assez vague puisqu'on ne sait pas grand chose sur le terme de reste $o(h^N)$.

Dans certains cas on peut aller plus loin et écrire, pour $|h| < R$ avec $R > 0$ à préciser,

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Ce sont les fonctions développables en séries entières.

Il y a cependant des fonctions pour lesquelles un développement en puissances de h n'est pas le plus naturel, ni le plus adapté. On va s'intéresser dans ce chapitre au cas des fonctions périodiques.

Définition 1.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $T > 0$. On dit que f est T-périodique, ou périodique de période T, si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x+T) = f(x)$.*

Remarque 1.1. *Pour connaitre une fonction T-périodique il faut et il suffit de la connaitre sur un intervalle semi-ouvert de longueur T, i.e. un intervalle de la forme $[a, a+T[$ ou bien $]a, a+T]$. Un tel intervalle est appelé une période.*

Proposition 1.1. *Soit $T > 0$. L'ensemble des fonctions T-périodiques à valeurs réelles, resp. complexes, est un $\mathbb{R}$-ev, resp. un $\mathbb{C}$-ev.*

Exercice 1.1. *Démontrez la proposition.*

La proposition ci-dessus assure qu'une combinaison linéaire de fonctions $T-$périodiques est encore T-périodique. La question centrale de ce chapitre est essentiellement de savoir si on peut décomposer n'importe quelle fonction périodique comme une combinaison linéaire de fonctions périodiques élémentaires qu'il faudra préciser. Autrement dit, a-t-on une sorte de "base" (famille libre et génératrice) des fonctions périodiques ? Cette idée de décomposer une fonction périodique (ou signal) comme combinaison linéaire de fonctions périodiques élémentaires remonte au milieu du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle (par D'Alembert, Euler, Bernoulli) et à l'étude des cordes vibrantes. Elle sera formalisée un peu plus tard par Fourier dans les années 1820 dans ses travaux sur la propagation de la chaleur.

Lorsqu'on pense "fonctions périodiques " les premiers exemples qui viennent à l'esprit sont ceux des fonctions sinus et cosinus. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \cos(nx)$ sont 2π-périodiques, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si on s'intéresse aux fonctions à valeurs complexes on considèrerait de même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$ qui sont 2π-périodiques à valeur dans $\mathbb{C}$. L'idée des séries de Fourier est de savoir si on peut décomposer une fonction 2π-périodique comme "combinaison linéaire" des fonctions $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ ou bien e^{inx}, mais aussi, et surtout, comment trouver les coefficients d'une telle décomposition (dans le cas des séries entières par exemple le coefficient en h^n est $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$). Vous noterez que l'expression "combinaison linéaire" est entre guillemets. En effet ce que l'on va faire n'est pas une combinaison linéaire au sens de l'algèbre linéaire, tel que vous l'avez vue en L1-L2, où une combinaison linéaire est par définition une somme *finie*. On va faire ici des *combinaisons linéaires infinies*, i.e. des séries.

Remarque 1.2. *Le fait que* $\mathrm{e}^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ *d'une part et* $\cos(nx) = \frac{\mathrm{e}^{inx}+\mathrm{e}^{-inx}}{2}$ *et* $\sin(nx) = \frac{\mathrm{e}^{inx}-\mathrm{e}^{-inx}}{2i}$ *d'autre part montre qu'il est totalement équivalent de décomposer en termes de* $\sin(nx)$ *et* $\cos(nx)$ *ou en termes de* e^{inx}*,* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Pourquoi les fonctions $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$?

La première réponse, un peu naive et pas très convaincante, est : *parce que ce sont les plus simples et les premières auxquelles on a pensé*. La deuxième réponse, a priori un peu plus convaincante, est : *parce que ça marche* ! C'est vrai. Mais on verra que d'une part ça demande tout de même quelques hypothèses et pas mal de travail, et d'autre part ça n'explique toujours pas *de où vient cette idée* ni fondamentalement *pourquoi ça marche*. On donne ici une très bref aperçu de l'origine de cette idée.

Fourier s'est intéressé, entre autres choses, à la propagation de la chaleur. On considère ici le cas simple, et simplifié, d'une barre de métal de longueur L que l'on va supposer égale à π (il suffit de choisir la bonne unité de longueur pour que la longueur de la barre soit $L = \pi$). On va noter $\theta(t, x)$ la température de la barre à l'instant $t \geq 0$ et au point d'abscisse $x \in [0, \pi]$. L'équation qui décrit l'évolution de la température dans la barre au cours du temps s'écrit

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(t, x) = D\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, x), \qquad \forall t \geq 0,\ \forall x \in [0, \pi], \tag{1.1}$$

où $D > 0$ est une constante appelée constante de diffusion. Cette équation est appelée équation de la chaleur. A cela il faut ajouter la connaissance de la température initiale $\theta(0, x)$ et des conditions dites "au bord" : que se passe-t-il en $x = 0$ et en $x = \pi$. On peut considérer deux types de conditions :

1. A partir de l'instant $t = 0$ la barre est isolée dans le sens où il n'y a plus d'apport de chaleur extérieur. Le flux de chaleur $F(t,x)$ est proportionnel à la variation de température dans la barre, i.e. $F(t,x) = -a\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(t,x)$ avec $a > 0$ (la chaleur va du chaud vers le froid). Si la barre est isolée il ne peut pas y avoir de flux de chaleur aux extrémités et donc pour tout t on doit avoir $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial\theta}{\partial x}(t,\pi) = 0$. On parle de conditions aux bords de Neumann.
2. A partir de l'instant $t = 0$ les extrêmités de la barre sont maintenues à des températures constantes θ_0 et θ_π, i.e. $\theta(t,0) = \theta_0$ et $\theta(t,\pi) = \theta_\pi$ pour tout $t \geq 0$. On peut alors remarquer que la fonction θ est solution si et seulement si la fonction $\tilde{\theta}(t,x) = \theta(t,x) - \frac{\theta_\pi - \theta_0}{\pi}x - \theta_0$ est solution et vérifie $\tilde{\theta}(t,0) = \tilde{\theta}(t,\pi) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Quitte à d'abord considérer $\tilde{\theta}$ on peut donc supposer que les températures des extrêmités sont nulles toutes les deux, i.e. $\theta(t,0) = \theta(t,\pi) = 0$ pour tout t. On parle de conditions aux bords de Dirichlet.

Une remarque que l'on peut ensuite faire sur cette équation c'est qu'elle est linéaire, dans le même sens que les équations différentielles linéaires que vous avez vues en L1 : si on a plusieurs solutions de l'équation alors toute combinaison linéaire de ces solutions est encore une solution de l'équation. On va donc commencer par chercher des solutions "simples". La difficulté ici est que la fonction inconnue est une fonction de deux variables. Bien entendu la fonction nulle est solution, voyons si on peut en trouver d'autres. L'idée est alors de commencer par chercher une solution sous la forme d'un produit de fonctions d'une variable, i.e. $\theta(t,x) = f(t)g(x)$. L'équation devient alors

$$f'(t)g(x) = Df(t)g''(x), \qquad \forall t \geq 0,\ \forall x \in [0,\pi]. \tag{1.2}$$

Si on veut que θ ne soit pas la fonction nulle la fonction g ne peut pas être identiquement nulle. En prenant x_0 tel que $g(x_0) \neq 0$ on constate alors que nécessairement f vérifie une équation de la forme $f'(t) = \alpha f(t)$, avec $\alpha = D\frac{g''(x_0)}{g(x_0)}$. Ainsi on doit avoir

$$f(t) = C\mathrm{e}^{\alpha t}, \quad \forall t \geq 0,$$

où $C \in \mathbb{R}^*$ (si $C = 0$ la fonction f est nulle et donc la fonction θ aussi). A priori α est quelconque (il dépend quand même de g). Cependant en remplaçant l'expression trouvée pour f dans l'équation (1.2) on obtient alors

$$C\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}g(x) = DC\mathrm{e}^{\alpha t}g''(x) \iff \alpha g(x) = Dg''(x),$$

dont la forme des solutions dépend du signe de α :

- Si $\alpha > 0$ alors g est de la forme $g(x) = A\mathrm{e}^{x\sqrt{\alpha/D}} + B\mathrm{e}^{-x\sqrt{\alpha/D}}$. On peut alors voir que les conditions aux bords de Neumann ou de Dirichlet ne sont vérifiées que si $A = B = 0$, i.e. g est la fonction nulle.
- Si $\alpha = 0$ alors g est de la forme $g(x) = Ax + B$. A nouveau les conditions aux bords de Dirichlet ne sont vérifiées que si $A = B = 0$, i.e. g est la fonction nulle, tandis que les conditions aux bords de Neumann sont vérifiées ssi $A = 0$, i.e. g est une fonction constante, et alors $\theta(t,x)$ est constante aussi (g est constante et f aussi puisque $\alpha = 0$).

- Si $\alpha < 0$ alors g est de la forme $g(x) = A\cos(x\sqrt{-\alpha/D}) + B\sin(x\sqrt{-\alpha/D})$.
  Les conditions aux bords de Dirichlet sont vérifiées ssi $A = 0$ et $B\sin(\pi\sqrt{-\alpha/D}) = 0$. On ne peut obtenir une solution non nulle que si $\sin(\pi\sqrt{-\alpha/D}) = 0$, i.e. $\sqrt{-\alpha/D} = n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $g(x) = B\sin(nx)$ et $\theta(t,x) = C\mathrm{e}^{-Dn^2t}\sin(nx)$.
  Les conditions aux bords de Neumann sont vérifiées ssi $B = 0$ et $A\sqrt{-\alpha/D}\sin(\pi\sqrt{-\alpha/D}) = 0$. On ne peut obtenir une solution non nulle que si $\sin(\pi\sqrt{-\alpha/D}) = 0$, i.e. $\sqrt{-\alpha/D} = n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $g(x) = A\cos(nx)$ et $\theta(t,x) = C\mathrm{e}^{-Dn^2t}\cos(nx)$.

Exercice 1.2. *Montrez les affirmations ci-dessus.*

Conclusion. Dans le cas des conditions aux bords de Dirichlet on trouve des solutions de la forme $\mathrm{e}^{-Dn^2t}\sin(nx)$. En faisant des “combinaisons linéaires” on va donc chercher des solutions de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\mathrm{e}^{-Dn^2t}\sin(nx)$ où les b_n doivent être tels que $\theta(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)$. Dans le cas des conditions de Neumann on trouve des solutions de la forme $\mathrm{e}^{-Dn^2t}\cos(nx)$. En faisant des “combinaisons linéaires” on va donc chercher des solutions de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\mathrm{e}^{-Dn^2t}\cos(nx)$ (le terme $n = 0$ correspond au cas $\alpha = 0$ et aux fonctions constantes) où les a_n doivent être tels que $\theta(0,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx)$. On voit ainsi apparaitre cette idée de décomposition en terme des fonctions $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.

Et les fonctions T-périodiques alors ? Ce qu'on fait ci-dessus marche bien pour les fonctions 2π-périodiques. Ce n'est en fait pas restrictif du tout et on peut facilement s'y ramener. Si f est une fonction T-périodique on vérifie alors facilement que la fonction g définie par $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est 2π-périodique. Ainsi, si on peut décomposer g sous la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ on pourra écrire, en remarquant que $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ pour tout x si et seulement si $f(t) = g(\omega t)$ pour tout t avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t).$$

Le nombre ω est appellée la fréquence.

Dans la majeure partie du chapitre on se concentrera sur les fonctions 2π-périodiques. On reviendra brièvement aux fonctions T-périodiques, $T > 0$ quelconque, dans la Section 5.4.

CHAPITRE 2

PRÉAMBULE

2.1 Fonctions périodiques, continues ou C^1 par morceaux

Mis à part dans la Section 5.4, et sauf mention contraire, les fonctions périodiques considérées dans ce chapitre seront **toutes** 2π**-périodiques**. On aura cependant besoin de temps à autres d'hypothèses supplémentaires. En particulier on sera amené à calculer des intégrales de ces fonctions. On va donc se placer dans un cadre qui permette de calculer ces intégrales. On n'aura affaire ici qu'à des intégrales sur des segments. Il suffira donc d'imposer aux fonctions d'être continues par morceaux. Cependant certains résultats demanderont des hypothèses un peu plus fortes. On précise ici les notations qu'on utilisera par la suite.

Même si les fonctions considérées seront parfois à valeurs réelles il sera pratique de les voir comme des fonctions à valeurs complexes. Pour ces fonctions les notions de limite, continuité, dérivabilité sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles. On vérifie par exemple facilement que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, la fonction f est dérivable si et seulement si les fonctions $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont dérivables. On a alors $f'(x) = \mathrm{Re}(f)'(x) + i\mathrm{Im}(f)'(x)$.

Notation. $C^0_{2\pi}$, resp. $C^1_{2\pi}$, désignera l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (à valeurs complexes), resp. C^1 sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques.

Définition 2.1. *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est* continue par morceaux *sur $[a, b]$ s'il existe $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tels que*

1. *f est continue sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$,*
2. *les limites $\lim\limits_{x\to x_k^-} f(x)$, $k = 1, \ldots, n$, et $\lim\limits_{x\to x_k^+} f(x)$, $k = 0, \ldots, n-1$, existent dans $\mathbb{C}$.*

L'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est appelée une subdivision adaptée à f.

Remarque 2.1. *De façon équivalente f est continue par morceaux si pour tout intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ il existe une fonction continue $f_k : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{C}$ qui coïncide avec f sur $]x_k, x_{k+1}[$.*

Définition 2.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux si pour tout segment $[a, b]$ la fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$.*

Lorsque la fonction est en plus périodique il suffit de regarder ce qu'il se passe sur une période. Une fonction 2π-périodique est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$.

Enfin on aura besoin également de la notion de fonction C^1 par morceaux.

Définition 2.3. *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est C^1* par morceaux *sur $[a, b]$ s'il existe $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tels que*

1. *f est C^1 sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$,*
2. *les limites $\lim\limits_{x\to x_k^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_k^-} f'(x)$, pour $k = 1, \ldots, n$, et $\lim\limits_{x\to x_k^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_k^+} f'(x)$, pour $k = 0, \ldots, n-1$, existent dans $\mathbb{C}$.*

L'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est appelée une subdivision adaptée à f.

Remarque 2.2. *De façon équivalente f est C^1 par morceaux si pour tout intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ il existe une fonction $f_k : [x_k, x_{k+1}] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et qui coïncide avec f sur $]x_k, x_{k+1}[$.*

Définition 2.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que f est C^1 par morceaux si pour tout segment $[a, b]$ la fonction f est C^1 par morceaux sur $[a, b]$.*

Ici encore, lorsqu'on la fonction est en plus périodique, il suffit de regarder ce qu'il se passe sur une période. Une fonction 2π-périodique est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$.

Notation. $C^0_{2\pi,m}$, resp. $C^1_{2\pi,m}$, désignera l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, resp. C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques.

Exemple 2.1. *Soit f la fonction 2π-périodique impaire définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = 1$. Par imparité on a forcément $f(x) = -1$ sur $]-\pi, 0[$ et $f(0) = 0$. Enfin, puisque f est impaire on a $f(-\pi) = -f(\pi)$ tandis que comme f est périodique on a $f(-\pi) = f(\pi)$. Cela impose $f(\pi) = f(-\pi) = 0$. On connait donc f sur $[-\pi, \pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$. Sur chaque intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$ la fonction f est C^1 et les fonctions f et f' admettent des limites finies par valeurs inférieures et supérieures en chaque $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Conclusion : f est C^1 par morceaux*

Exercice 2.1. *Montrer que les ensembles $C^0_{2\pi,m}$ et $C^1_{2\pi,m}$ sont bien des espaces vectoriels.*

Les intégrales des fonctions périodiques joueront un rôle important dans ce chapitre. On rappelle que si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux on définit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(x)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 2.1. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Autrement dit, la valeur de l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas du choix de la période.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a < 2k\pi \leq a + 2\pi$, c'est $k = E\left(\frac{a}{2\pi} + 1\right)$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{2k\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2k\pi}^{a+2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x && \text{(Chasles)}\\
&= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t + 2(k-1)\pi)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t + 2k\pi)\,\mathrm{d}t && \text{(chgt de variable)}\\
&= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{a-2(k-1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t && (f \text{ périodique})\\
&= \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x. && \text{(Chasles)}
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.3. *La valeur d'une intégrale ne change pas lorsqu'on modifie la valeur d'une fonction* en un nombre fini de points, *i.e. si $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ sont tels que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. En particulier, si $f \in C^0_{2\pi,m}$ et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est une subdivision adaptée à f sur $[0, 2\pi]$ alors $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de la valeur de f aux points x_k, $k = 0, \ldots, n$.*

Remarque 2.4. *Si $f \in C^1_{2\pi,m}$ et $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est une subdivision adaptée dans $[0, 2\pi]$ alors la fonction f' est définie et continue sauf éventuellement en les points de la forme $x = x_k + 2m\pi$ où $k \in \{0, \ldots, n\}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Il sera parfois pratique de prolonger f' en ces points là. Quelles que soient les valeurs que l'on donne à f' en $x_0, \ldots, x_n$ la fonction f' sera continue par morceaux et toute intégrale faisant apparaitre la fonction f' ne dépendra pas de la valeur choisie en ces points.*

2.2 Un peu d'algèbre linéaire

Afin de comprendre ce qu'on va faire sur les séries de Fourier il est important (voire indispensable) d'avoir également un point de vue algébrique. L'application suivante va jouer un rôle fondamental dans ce qu'on va faire :

$$C^0_{2\pi} \times C^0_{2\pi} \ni (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)\,\mathrm{d}x =: \langle f, g \rangle. \tag{2.1}$$

Il est facile de voir qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous $f, g, h \in C^0_{2\pi}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\langle f, g + \lambda h \rangle = \langle f, g \rangle + \lambda \langle f, h \rangle$ et $\langle f + \lambda h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \bar{\lambda} \langle h, g \rangle$. Autrement dit, pour tout $f \in C^0_{2\pi}$ l'application $g \mapsto \langle f, g \rangle$ est une application linéaire tandis que pour tout $g \in C^0_{2\pi}$ l'application $f \mapsto \langle f, g \rangle$ est une application dite anti-linéaire (à cause du complexe conjugué sur le scalaire λ). On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire.
2. Pour tous $f, g \in C^0_{2\pi}$ on a $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$. On parle de symétrie hermitienne.
3. Pour tout $f \in C^0_{2\pi}$ on a $\langle f, f \rangle \geq 0$. La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dite positive.

4. Pour tout $f \in C^0_{2\pi}$ on a $\langle f, f\rangle = 0$ si et seulement si $f = 0$. En effet, $\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx$ et comme la fonction $|f|^2$ est positive et continue, si son intégrale est nulle c'est que la fonction est nulle sur $[0, 2\pi]$. Comme elle est périodique elle est nulle sur tout $\mathbb{R}$. On dit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie.

Les quatre propriétés ci-dessus ressemblent à celles qui apparaissent dans la définition d'un *produit scalaire* que vous avez vue en L2. C'est en fait son adaptation au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Si E est un $\mathbb{C}$-ev, une forme sesquilinéaire symétrique définie positive $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{C}$, i.e. vérifiant les propriétés 1. à 4. ci-dessus, est encore appelée produit scalaire, ou parfois produit hermitien. On peut alors vérifier que l'application $f \mapsto \sqrt{\langle f, f\rangle}$ définit une norme sur E.

Remarque 2.5. *1) Dans certains livres on prend parfois comme convention que le produit scalaire doit être linéaire dans la première variable et antilinéaire dans la seconde, i.e.* $\langle f, g+\lambda h\rangle = \langle f, g\rangle + \bar\lambda\langle f, h\rangle$ *et* $\langle f+\lambda h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \lambda\langle h, g\rangle$.

2) Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ *est* $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$. *Son analogue sur* $\mathbb{C}^n$ *serait* $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{x_j} y_j$. *La présence de la conjugaison complexe sert à garantir que pour tout* $x \in \mathbb{C}^n$ *on a* $\langle x, x\rangle \geq 0$. *La définition (2.1) en est l'analogue pour les fonctions périodiques.*

3) Le facteur $\frac{1}{2\pi}$ *devant l'intégrale n'a pas d'importance fondamentale. On verra par la suite qu'il a l'avantage de simplifier les différentes formules qui apparaitront.*

4) A priori la définition (2.1) a un sens même pour les fonctions uniquement continues par morceaux. On vérifie facilement que les propriétés 1. à 3. restent vraies. La proriété 4. par contre ne l'est plus. Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ *vérifie* $\langle f, f\rangle = 0$ *alors on peut seulement dire que* f *est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points (là où elle n'est pas continue).*

Définition 2.5. *Soit* E *un* $\mathbb{C}$*-ev muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Une famille* $(e_j)_{j\in J}$ *est dite orthogonale si pour tous* $j \neq j'$ *on a* $\langle e_j, e_{j'}\rangle = 0$. *Elle est dite orthonormée si de plus* $\langle e_j, e_j\rangle = 1$ *pour tout* $j \in J$.

Lemme 2.1. *Si* $(e_j)_{j\in J}$ *est une famille orthogonale de vecteurs non nuls (en particulier si c'est une famille orthonormée) alors c'est une famille libre.*

Démonstration. Soient $e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_1 e_{j_1} + \cdots + \lambda_n e_{j_n} = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ on a donc (par linéarité de l'application $f \mapsto \langle e_{j_k}, f\rangle$)

$$0 = \langle e_{j_k}, 0\rangle = \langle e_{j_k}, \lambda_1 e_{j_1} + \cdots + \lambda_n e_{j_n}\rangle = \lambda_1\langle e_{j_k}, e_{j_1}\rangle + \cdots + \lambda_n\langle e_{j_k}, e_{j_1}\rangle = \lambda_k\langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle.$$

Comme e_{j_k} n'est pas le vecteur nul on a $\langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle \neq 0$ et donc $\lambda_k = 0$. Comme c'est vrai pour tout k ça assure que la famille est bien libre. $\square$

Une famille orthogonale (de vecteurs non nuls) est donc forcément libre. Si en plus elle est génératrice c'est donc une base. Le gros intérêt des bases orthonormées, ou orthogonales, est qu'il est très facile de trouver les coefficients d'un vecteur donné dans cette base. En effet, si $f = \lambda_1 e_{j_1} + \cdots + \lambda_n e_{j_n}$ le même calcul que ci-dessus montre que pour tout k on a

$$\langle e_{j_k}, f\rangle = \lambda_k\langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle \iff \lambda_k = \frac{\langle e_{j_k}, f\rangle}{\langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle}. \tag{2.2}$$

En particulier si la famille est orthonormée on a simplement $\lambda_k = \langle e_{j_k}, f\rangle$.

L'autre relation importante et qu'on retrouvera par la suite, voir les équations (3.2), (3.7) et le Théorème 5.3, est celle qui permet de calculer la norme $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ d'un vecteur à partir de ses coefficients :

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{j_k}, \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell e_{j_\ell} \right\rangle = \sum_{k,\ell=1}^{n} \bar{\lambda}_k \lambda_\ell \langle e_{j_k}, e_{j_\ell}\rangle = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \langle e_{j_k}, e_{j_k}\rangle. \tag{2.3}$$

En particulier si la famille est orthonormée on a simplement $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2$.

CHAPITRE 3

POLYNÔMES ET SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

3.1 Polynômes trigonométriques

Notation. Si $n \in \mathbb{Z}$ on notera e_n la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$.

Définition 3.1. *On appelle polynôme trigonométrique toute fonction de la forme* $P = \sum_{n=-M}^{N} c_n e_n$ *où* $M, N \in \mathbb{N}$ *et* $c_n \in \mathbb{C}$ *pour* $n \in \{-M, \dots, N\}$, *i.e.* $P(x) = \sum_{n=-M}^{N} c_n \mathrm{e}^{inx}$. *On notera* $\mathcal{T}$ *l'ensemble des polynômes trigonométriques.*

Si P *n'est pas nul, i.e.* $\exists n \in \{-M, \dots, N\}$ *tel que* $c_n \neq 0$, *le nombre* $\max\{|n|,\ c_n \neq 0\}$ *est appelé degré de* P.

Remarque 3.1. *Quitte à rajouter des coefficients nuls on peut toujours supposer que* $M = N$, *ce qu'on fera par la suite. On notera* $\mathcal{T}_N$ *l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus* N, *i.e. l'ensemble des fonctions de la forme* $P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ *où* $c_n \in \mathbb{C}$ *pour tout* $n \in \{-N, \dots, N\}$.

Proposition 3.1. *L'ensemble* $\mathcal{T}$ *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel (c'est un sev de* $C^1_{2\pi}$*) et pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *l'ensemble* $\mathcal{T}_N$ *en est un sev de dimension* $2N+1$. *Tout élément de* $\mathcal{T}$ *est une fonction* C^∞ *et* 2π*-périodique.*

Démonstration. La proposition ci-dessus est un simple exercice, mis à part pour la dimension de $\mathcal{T}_N$ où seule l'inégalité $\dim \mathcal{T}_N \leq 2N + 1$ est immédiate. Faites-le.

Pour montrer que $\dim \mathcal{T}_N = 2N + 1$ il suffit de montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre. La sous-famille $(e_{-N}, \dots, e_0, \dots, e_N)$ sera alors également libre et donc sera une base de $\mathcal{T}_N$. L'observation clé est que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire défini en (2.1). En effet si $n \neq m$ on a

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{e}^{imx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(m-n)x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\mathrm{e}^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

tandis que

$$\langle e_n, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx}\mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}x = 1.$$

□

Remarque 3.2. *1) La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre et est donc une base de $\mathcal{T}$.*
2) Le choix du préfacteur $\frac{1}{2\pi}$ dans le produit scalaire (2.1) est fait pour que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit orthonormée. Elle serait simplement orthogonale sinon.
3) Si $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\mathrm{e}^{inx} \in \mathcal{T}_N$, en utilisant (2.2) on voit que les coefficients c_n s'obtiennent par la formule

$$c_n = \langle e_n, P\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx}P(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

De plus, en utilisant (2.3) on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2. \tag{3.2}$$

Plutôt que d'utiliser les fonctions $e_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$ on peut aussi utiliser les fonctions $f_n(x) = \cos(nx)$ et $g_n(x) = \sin(nx)$. Les fonctions f_n et g_n étant respectivement paires et impaires il suffit dans ce cas de se restreindre à $n \in \mathbb{N}$, et même $n \in \mathbb{N}^*$ pour les fonctions g_n puisque g_0 est nulle. Puisque $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, si $P \in \mathcal{T}_N$ on pourra écrire

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n(\cos(nx) + i\sin(nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{N}(c_n + c_{-n})\cos(nx) + i(c_n - c_{-n})\sin(nx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx), \end{aligned}$$

où pour tout n on a posé $a_n = c_n + c_{-n}$ (en particulier $a_0 = 2c_0$) et $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Autrement dit P est combinaison linéaire des fonctions f_n et g_n avec $n \le N$ (le terme $\frac{a_0}{2}$ n'est rien d'autre que $\frac{a_0}{2}f_0$). Réciproquement, en écrivant

$$\cos(nx) = \frac{\mathrm{e}^{inx} + \mathrm{e}^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \frac{\mathrm{e}^{inx} - \mathrm{e}^{-inx}}{2i},$$

si P est une fonction de la forme $P = \frac{a_0}{2}f_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n f_n + b_n g_n$, i.e. $P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, alors

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)\mathrm{e}^{inx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)\mathrm{e}^{-inx}.$$

Si on pose, pour $n \geq 0$, $c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ avec la convention $b_0 = 0$, on a alors $P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \in \mathcal{T}_N$. On résume cela dans la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$ l'espace $\mathcal{T}_N$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_0, \ldots, f_N, g_1, \ldots, g_N$.*

Remarque 3.3. *La convention de prendre $a_0 = 2c_0$ et pas simplement $a_0 = c_0$ permet ici et ailleurs de ne pas avoir à distinguer le cas $n = 0$, voir la Remarque 3.4 ci-dessous.*

Dans la pratique il est souvent plus simple d'utiliser les fonctions exponentielles plutôt que les fonctions f_n et g_n. Cela provient du fait que la famille $((f_n)_{n\geq 0}, (g_n)_{n\geq 1})$ est orthogonale mais pas orthonormée. En écrivant que $f_n = \frac{1}{2}(e_n + e_{-n})$ et $g_n = \frac{1}{2i}(e_n - e_{-n})$ on vérifie en effet facilement que, pour tous n et m,

$$\langle f_n, g_m \rangle = 0, \quad \langle f_n, f_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ 1, & \text{si } n = m = 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \langle g_n, g_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } n = m. \end{cases} \tag{3.3}$$

En particulier si $P = \frac{a_0}{2} f_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n f_n + b_n g_n$, i.e. $P(x) = \frac{a_0}{2} f_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ alors (2.2) donne, pour $n = 0, \ldots, N$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

et (2.3) donne

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |P(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 + |b_n|^2. \tag{3.5}$$

Remarque 3.4. *1) Si on avait écrit P sous la forme $P = a_0 f_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n f_n + b_n g_n$ on aurait alors $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \,\mathrm{d}x$. La convention de prendre $\frac{a_0}{2}$ permet ici d'avoir une formule commune pour a_0 et les autres a_n.*
2) Notez bien le préfacteur $\frac{1}{\pi}$ au lieu de $\frac{1}{2\pi}$ devant les intégrales dans toutes les formules en sin / cos.

Il y a cependant des situations où l'utilisation de la famille $(\cos(nx), \sin(nx))_n$ est préférable. D'une part si P est une fonction à valeurs réelles il est plus naturel d'utiliser les f_n et g_n qui sont aussi à valeurs réelles. Mais on verra que c'est surtout pratique lorsque la fonction considérée est paire ou impaire. Cela vient simplement du fait que les fonctions f_n sont toutes paires et les fonctions g_n toutes impaires. En effet, si P est paire alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x = 0,$$

où on a utilisé la Proposition 2.1 avec $a = -\pi$ et le fait que la fonction $P(x) \sin(nx)$ est impaire. De même, si P est impaire on a pour tout $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x = 0.$$

3.2 Séries trigonométriques

Pour aller au delà des polynômes trigonométriques l'idée est ensuite de faire des "sommes infinies". On ne peut en effet pas espérer écrire n'importe quelle fonction périodique, disons continue, comme combinaison linéaire finie des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$. Cela voudrait dire que n'importe quelle fonction continue périodique est un polynôme trigonométrique et donc en particulier C^∞ ce qui n'est bien entendu pas le cas.

Définition 3.2. *On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de la forme* $c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n \mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}\right)$. *Lorsqu'elle converge on notera* $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{inx}$ *la somme de la série.*

De façon équivalente une série trigonométrique est une série de fonctions de la forme $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

Remarque 3.5. *1) Contrairement à ce que vous avez vu pour les intégrales généralisées du type* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *pour lesquelles on demande la convergence des deux intégrales* $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *et* $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ *séparément, et contrairement à ce qui est fait habituellement pour les séries indexées sur* $\mathbb{Z}$*, la convergence considérée ici est celle de la suite des sommes partielles "symétriques"* $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{inx}$.

2) Les sommes partielles d'une série trigonométrique sont des polynômes trigonométriques.

La première propriété sur les séries trigonométriques est immédiate

Proposition 3.3. *Soit* $c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n \mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}\right)$ *une série trigonométrique. Si la série converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *alors sa somme* $S(x)$ *est une fonction* 2π*-périodique.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que les sommes partielles $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{inx}$ sont toutes des fonctions 2π-périodiques, i.e. pour tout $N \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $S_N(x+2\pi) = S_N(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ en faisant tendre N vers l'infini on obtient bien (convergence simple) $S(x+2\pi) = S(x)$. □

Le résultat suivant, qui demande une convergence un peu plus forte, montre comment les résultats sur les polynômes trigonométriques peuvent s'étendre à un cas de "combinaison linéaire infinie".

Théorème 3.1. *Soit* $c_0 + \sum_{n\geq 1} \left(c_n \mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}\right)$ *une série trigonométrique. On suppose que la série* $\sum_{n\geq 1} |c_n| + |c_{-n}|$ *converge, ce qui est équivalent à dire que la série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ *converge. Alors*

1. *La série trigonométrique converge normalement sur* $\mathbb{R}$*. En particulier sa somme* S *est une fonction continue.*

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *on a*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx} S(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

3. *La série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ *converge et on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

Démonstration. 1) Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left|c_n\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}\right| \leq \left|c_n\mathrm{e}^{inx}\right| + \left|c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}\right| = |c_n| + |c_{-n}|$. Par hypothèse la série $\sum_{n\geq 1} |c_n| + |c_{-n}|$ converge ce qui prouve la convergence normale de la série trigonométrique. Comme toutes les fonctions $x \mapsto c_n\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx}$ sont continues, la convergence normale garantit que la somme $S(x)$ définit aussi une fonction continue.
2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $\mathrm{e}^{-inx}S(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \mathrm{e}^{i(m-n)x}$ et le même argument que ci-dessus montre que cette série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0, 2\pi]$. On peut donc intégrer la série terme à terme ce qui donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-inx} S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c_m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(m-n)x}\,\mathrm{d}x = c_n.$$

3) Enfin on s'intéresse à la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$. On pourrait commencer par étudier séparément la convergence de la série et ensuite calculer sa somme. On va faire les deux simultanément. Soit $N \geq 1$. En utilisant l'identité $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|S(x) - S_N(x)|^2 = |S(x)|^2 + |S_N(x)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{S(x)} \mathrm{e}^{inx} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} S(x) \mathrm{e}^{-inx}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(x) - S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \sum_{n=-N}^{N} \frac{c_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{S(x)} \mathrm{e}^{inx}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=-N}^{N} \frac{\overline{c_n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) \mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x - 2 \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2,
\end{aligned}$$

où on a utilisé (3.6) à la dernière ligne. Par ailleurs $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{inx}$ est un polynôme trigonométrique, donc d'après (3.2) on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$. Finalement,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(x) - S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,\mathrm{d}x - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2.$$

Il reste donc à montrer que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x)-S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$. Si on note $\|S-S_N\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |S(x)-S_N(x)|$ (la fonction $S-S_N$ est continue donc bornée sur le segment $[0,2\pi]$)) on a

$$0 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x)-S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|S-S_N\|_\infty^2\,\mathrm{d}x = \|S-S_N\|_\infty^2.$$

Finalement, puisque la série trigonométrique converge normalement elle converge uniformément, i.e. $\lim_{N\to\infty} \|S-S_N\|_\infty = 0$, et donc $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(x)-S_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$ d'après le théorème des gendarmes. □

On a bien entendu un résultat similaire pour les séries trigonométriques mises sous la forme $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$.

Théorème 3.2. *Soit $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ une série trigonométrique. On suppose que la série $\sum_{n\ge1} |a_n| + |b_n|$ converge. Alors*

1. *La série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier sa somme S est une fonction continue.*
2. *Pour tout $n \ge 0$ on a*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

3. *La série $\sum_{n\ge1} |a_n|^2 + |b_n|^2$ converge et on a*

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |S(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{3.9}$$

Exercice 3.1. *Démontrer le théorème ci-dessus.*

Remarque 3.6. *On sait que si une série $\sum u_n$ converge on a nécessairement $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Si une série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, resp. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\mathrm{e}^{inx}$, converge simplement sur $\mathbb{R}$ on a donc $\lim_{n\to\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = 0$, resp. $\lim_{n\to+\infty} c_n\mathrm{e}^{inx} + c_{-n}\mathrm{e}^{-inx} = 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$. On peut alors montrer que forcément $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$.*

CHAPITRE 4

SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE.

4.1 Coefficients de Fourier

Dans l'idée de décomposer une fonction périodique comme combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{inx}$, ou bien $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$, la définition ci-dessous découle de ce qu'on a fait dans la section précédente pour les polynômes et les séries trigonométriques.

Définition 4.1. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. On définit ses coefficients de Fourier (de type exponentiels) pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x.$$

De même on définit ses coefficients de Fourier (de type $\sin / \cos$*) pour tout $n \geq 0$ par*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 4.1. *1) De façon plus compacte on peut écrire que $c_n(f) = \langle e_n, f\rangle$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire défini en (2.1). En particulier les applications $f \mapsto c_n(f)$ sont des applications linéaires.*

2) On vérifie facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$, ou de façon équivalente $c_n(f) = \frac{a_n(f)-ib_n(f)}{2}$ et $c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)+ib_n(f)}{2}$.

Définition 4.2. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. La série de Fourier de f est la série trigonométrique*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\mathrm{e}^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx).$$

On notera $S_N(f)(x)$ ses sommes partielles, et lorsqu'elle converge $S(f)(x)$ sa somme.

Remarque 4.2. *1) Si* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{inx}$ *est la somme d'une série trigonométrique telle que* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ *converge alors le Théorème 3.1 assure que* $f \in C^0_{2\pi,m}$ *(elle est même continue) et que pour tout* n *on a* $c_n(f) = c_n$*. Autrement dit* f *coincide avec sa série de Fourier.*

2) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ *l'application* $C^0_{2\pi,m} \ni f \mapsto S_N(f) \in \mathcal{T}_N$ *est une application linéaire.*

Proposition 4.1. *Soit* $f \in C^0_{2\pi,m}$*.*
1) Si f *est paire alors* $b_n(f) = 0$ *pour tout* n *et on a*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

et si f *est impaire alors* $a_n(f) = 0$ *pour tout* n *et on a*

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \tag{4.2}$$

2) Si f *est à valeurs réelles alors* $a_n(f), b_n(f) \in \mathbb{R}$ *et* $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

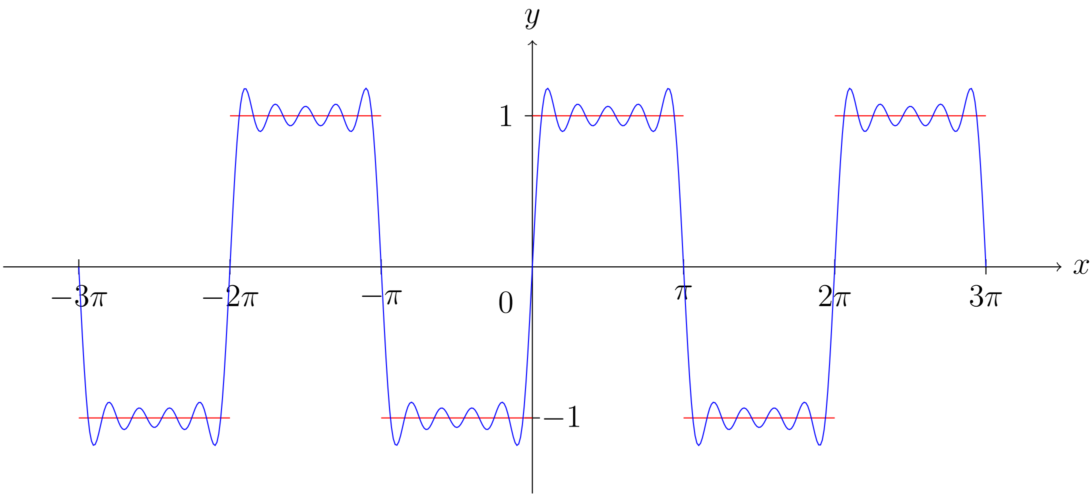
Exercice 4.1. *Démontrez la proposition.*

Remarque 4.3. *Sans hypothèse particulière sur* f *on a* $\overline{a_n(f)} = a_n(\bar{f})$*,* $\overline{b_n(f)} = b_n(\bar{f})$ *et* $\overline{c_n(f)} = c_{-n}(\bar{f})$*.*

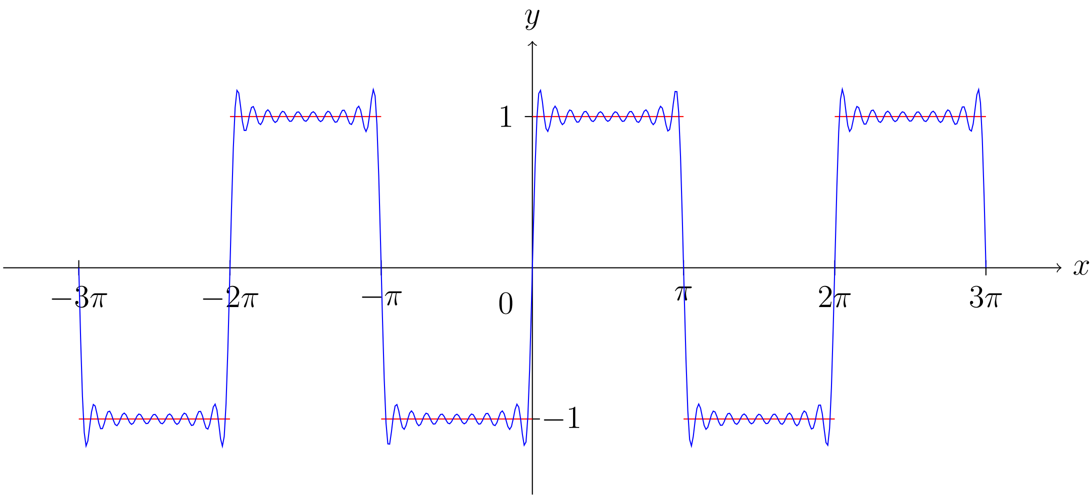
Exemple 4.1. *Soit* f *la fonction* 2π*-périodique définie dans l'Exemple 2.1. Comme* f *est réelle et impaire on va plutôt utiliser les coefficients en* $\sin / \cos$*. On sait déjà que* $a_n(f) = 0$ *pour tout* n*. Il reste à calculer les coefficients* $b_n(f)$*. Soit* $n \geq 1$*, on calcule facilement*

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \overset{\textit{parité}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \textit{si } n = 2k \\ \frac{4}{(2k+1)\pi} & \textit{si } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

La série de Fourier de f *est donc la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin((2k+1)x)$*. On peut déjà remarquer qu'on n'est pas ici dans le cadre du Théorème 3.2 puisque la série* $\sum_{n\geq 1} |b_n(f)| = \sum_{k\geq 0} \frac{4}{(2k+1)\pi}$ *diverge. On peut néanmoins démontrer que cette série converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *(voir TD). On verra également que l'égalité (3.9) est vraie, c'est le Théorème de Parseval, et que* $S(f) = f$*, c'est le Théorème de Dirichlet.*



Graphes de f et $S_{10}(f)$.



Graphes de f et $S_{20}(f)$.

Supposons maintenant que la fonction f n'est pas seulement continue par morceaux mais est C^1 par morceaux, et soit $\{x_0, \ldots, x_n\}$ une subdivision adaptée sur $[0, 2\pi]$. Comme on l'a dit dans la Remarque 2.4 la fonction f' est définie et continue sauf aux points $x_k + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ et, de plus, quelles que soient les valeurs que l'on donne à f' en $x_0, \ldots, x_n$ la fonction f' sera continue par morceaux et toute intégrale faisant apparaitre f' ne dépendra pas de la valeur donnée en ces points. En particulier les coefficients de Fourier de la fonction f' n'en dépendront pas. La proposition suivante relie les coefficients de Fourier de f' à ceux de f.

Proposition 4.2. *Soit f une fonction continue et C^1 par morceaux. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $c_n(f') = inc_n(f)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.*

Démonstration. On fait la preuve pour les coefficients c_n, elle est similaire pour les a_n et b_n. L'idée de la preuve est très simple : ce n'est rien d'autre qu'une intégration par parties. Le fait que f' ne soit pas continue complique cependant un tout petit peu la preuve. Pour comprendre l'idée on va commencer par supposer que f est de classe C^1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on a alors

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\mathrm{e}^{-inx}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\times -in\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = inc_n(f),$$

où on a utilisé la périodicité de f pour justifier que $[f(x)\mathrm{e}^{-inx}]_0^{2\pi} = 0$.

Supposons maintenant f n'est plus C^1 mais seulement C^1 par morceaux et continue. On ne peut alors plus aussi facilement faire l'IPP. Soit $\{x_0,\ldots,x_m\}$ une subdivision adaptée. L'idée est simplement de découper l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles :

$$2\pi c_n(f') = \int_0^{2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f'(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{m}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x$$

où on a posé $x_{m+1} = x_0 + 2\pi$.

Par définition sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ la fonction f coincide avec une fonction f_k qui est C^1 sur $[x_k, x_{k+1}]$, voir la Remarque 2.2, et en particulier $f' = f_k'$ sur chacun de ces intervalles. On peut donc écrire, en remplaçant d'abord f' par f_k' puis en revenant de f_k à f.

$$\begin{aligned}
2\pi c_n(f') &= \sum_{k=0}^{m}\left(\left[f_k(x)\mathrm{e}^{-inx}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\times -in\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \sum_{k=0}^{m} f_k(x_{k+1})\mathrm{e}^{-inx_{k+1}} - \sum_{k=0}^{m} f_k(x_k)\mathrm{e}^{-inx_k} + in\sum_{k=0}^{m}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{m+1} f_{k-1}(x_k)\mathrm{e}^{-inx_k} - \sum_{k=0}^{m} f_k(x_k)\mathrm{e}^{-inx_k} + in\sum_{k=0}^{m}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{m}(f_{k-1}(x_k) - f_k(x_k))\mathrm{e}^{-inx_k} + (f_m(x_0+2\pi) - f_0(x_0)) + in\int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{m}(f_{k-1}(x_k) - f_k(x_k))\mathrm{e}^{-inx_k} + (f_m(x_0+2\pi) - f_0(x_0)) + in2\pi c_n(f).
\end{aligned}$$

Enfin, comme la fonction f est continue on a, pour tout k,

$$f_{k-1}(x_k) = \lim_{x\to x_k^-} f_{k-1}(x) = \lim_{x\to x_k^-} f(x) = f(x_k) = \lim_{x\to x_k^+} f(x) = \lim_{x\to x_k^+} f_k(x) = f_k(x_k)$$

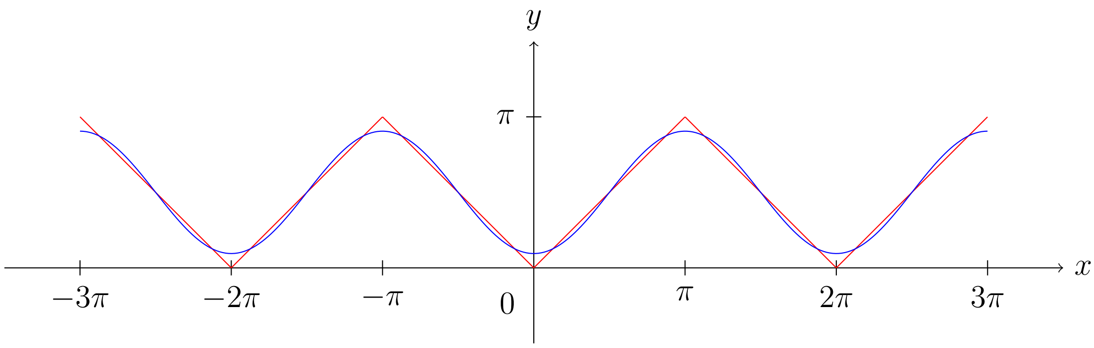
et de même $f_m(x_0+2\pi) = f(x_0+2\pi) = f(x_0) = f_0(x_0)$. Tous les termes du membre de droite sont donc nuls sauf le dernier et on a bien $c_n(f') = inc_n(f)$. □

Remarque 4.4. *Si on ne suppose pas la fonction f continue alors le résultat est faux. Dans la preuve les termes de bords venant des intégrations par parties ne se compensent a priori pas. Si on reprend la fonction f de l'Exemple 4.1, elle est bien C^1 par morceaux, mais elle n'est pas continue. Pour tout $x \neq m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, elle est dérivable et $f'(x) = 0$. Ainsi tous les coefficients de Fourier de f' sont nuls. En particulier les $a_n(f')$ sont nuls et la relation $a_n(f') = nb_n(f)$ n'est pas satisfaite.*

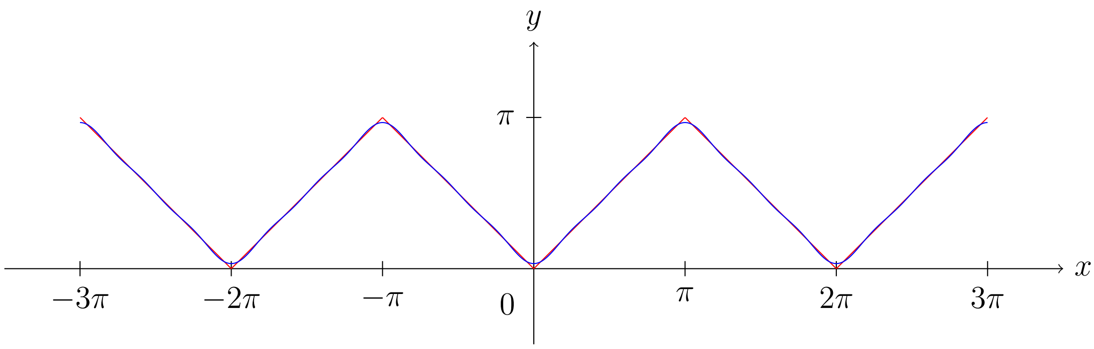
Exemple 4.2. *Soit g la fonction 2π-périodique définie par $g(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. La fonction g est continue et C^1 par morceaux. Sa dérivée g', là où g est dérivable, est la fonction f de l'Exemple 4.1. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n(f) = nb_n(g)$ et $b_n(f) = -na_n(g)$. On obtient donc $b_n(g) = 0$ pour tout n (ce n'est pas étonnant puisque g est paire), $a_{2k+1}(g) = -\dfrac{b_{2k+1}(f)}{2k+1} = \dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $a_{2k}(g) = 0$ si $k \geq 1$. Il reste à calculer $a_0(g)$. On a*

$$a_0(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{parité}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

En conclusion la série de Fourier de la fonction g est la série $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{k\geq 0}\dfrac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}$. On peut remarquer qu'ici la série $\sum_{n\geq 0}|a_n| = \dfrac{\pi}{2} + \sum_{k\geq 0}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$ converge. On est donc dans le cadre du Théorème 3.2 qui garantit que la série de Fourier de g converge normalement vers une fonction continue $S(g)$ dont les coefficients de Fourier sont ceux de g, i.e. $S(S(g)) = S(g)$.



Graphes de g et $S_2(g)$.



Graphes de g et $S_6(g)$.

La question importante à laquelle on va s'intéresser par la suite est : à quelle condition générale la série de Fourier d'une fonction f converge-t-elle ? En quel sens cette convergence a-t-elle lieu ? Dans ce cas quel est le lien entre $S(f)$ et f ?

4.2 Meilleure approximation en moyenne quadratique : l'inégalité de Bessel

Même si on ne sait pas encore si la série de Fourier d'une fonction $f \in C^0_{2\pi,m}$ converge ni éventuellement vers quoi, les sommes partielles de la série de Fourier sont étroitement reliées à la fonction f.

Proposition 4.3. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors pour tout entier N la somme partielle $S_N(f)$ de la série de Fourier de f est l'unique polynôme trigonométrique de degré au plus N qui réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de f sur $\mathcal{T}_N$. C'est-à-dire que pour tout $P \in \mathcal{T}_N$ on a*

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - P(x)|^2 \,\mathrm{d}x \iff \|f - S_N\|^2 \leq \|f - P\|^2 \tag{4.3}$$

avec égalité si et seulement si $P = S_N(f)$. De plus les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1} |a_n|^2 + |b_n|^2$ convergent et on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \|f\|^2.$$

et

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n\geq 1} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Ces inégalités s'appellent les inégalités de Bessel.

Démonstration. On traite le cas de la série mise sous forme exponentielle. On rappelle que si $f, g \in C^0_{2\pi,m}$ alors $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x$ est un produit scalaire et que la famille de fonctions $(e_n)_{n=-N,\dots,N}$ est une base orthonormée de $\mathcal{T}_N$.

Soit $P \in \mathcal{T}_N$. Il existe donc $\lambda_{-N}, \dots, \lambda_N$ tels que $P = \sum\limits_{n=-N}^{N} \lambda_n e_n$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|f - P\|^2 &= \langle f - P, f - P\rangle \\
&= \langle (f - S_N) + (S_N - P), (f - S_N) + (S_N - P)\rangle \\
&= \|f - S_N\|^2 + \|S_N - P\|^2 + \langle f - S_N, S_N - P\rangle + \langle S_N - P, f - S_N\rangle.
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes sont complexes conjugués l'un de l'autre. On regarde donc juste l'un d'entre eux, par exemple le dernier. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle S_N - P, f - S_N\rangle &= \left\langle \sum_{n=-N}^{N} (c_n(f) - \lambda_n)e_n, f - \sum_{m=-N}^{N} c_m(f)e_m \right\rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} (\overline{c_n(f)} - \overline{\lambda_n})\langle e_n, f\rangle - \sum_{n,m=-N}^{N} (\overline{c_n(f)} - \overline{\lambda_n})c_m(f)\langle e_n, e_m\rangle \\
&= \sum_{n=-N}^{N} (\overline{c_n(f)} - \overline{\lambda_n})c_n(f) - \sum_{n=-N}^{N} (\overline{c_n(f)} - \overline{\lambda_n})c_n(f) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A l'avant dernière ligne on a utilisé $\langle e_n, f\rangle = c_n(f)$ et le fait que $(e_n)_n$ est une famille orthonormée.

Finalement on a donc $\|f-P\|^2 = \|f-S_N\|^2 + \|S_N - P\|^2 \geq \|f-S_N\|^2$ avec égalité si et seulement si $\|S_N - P\| = 0$, i.e. $S_N = P$ puisque les fonctions S_N et P sont continues.

On montre ensuite l'inégalité de Bessel. Soit $N \in \mathbb{N}$. En appliquant ce qu'on a fait ci-dessus avec $P = 0$ on obtient

$$\|f\|^2 = \|f-S_N\|^2 + \|S_N\|^2 \geq \|S_N\|^2. \tag{4.4}$$

Comme $S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$ et que $(e_n)_n$ est orthonormée on obtient, voir (3.2), $\|S_N\|^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$. Pour tout N on a donc l'inégalité $\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2$. Comme on a une série à termes positifs et qu'elle est majorée, la série converge et on a bien l'inégalité de Bessel en passant à la limite $N \to \infty$. $\square$

Remarque 4.5. *Ce qu'on a fait là n'est pas particulier aux séries de Fourier. Cela repose principalement sur le fait qu'on a un produit scalaire et que $\mathcal{T}_N$ est de dimension finie. C'est un cas particulier de ce qu'on appelle la projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.*

On donne maintenant deux conséquences de la Proposition 4.3 qui sont en lien avec la convergence de la série de Fourier de f. Pour espérer que cette dernière converge il faut au moins que ses coefficients tendent vers 0, voir la Remarque 3.6. Le résultat suivant assure que c'est bien le cas.

Corollaire 4.1. *[Lemme de Riemann-Lebesgue] Si $f \in C^0_{2\pi,m}$ alors $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = \lim_{n\to\infty} a_n(f) = \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$.*

Démonstration. Cela découle directement de la convergence des séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1} |a_n|^2 + |b_n|^2$ (le terme général d'une série convergente tend vers 0). $\square$

Exemple 4.3. *On peut montrer que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, voir la Section 6.2. Cependant elle ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction $f \in C^0_{2\pi,m}$. En effet on aurait sinon $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout n. Cela contredirait alors la convergence de la série $\sum |b_n(f)|^2$.*

Théorème 4.1. *Si f est continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ (vers une fonction continue).*

Remarque 4.6. *On verra par la suite que dans ce cas elle converge vers f.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.1 il suffit de montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|$ converge. Comme f est continue et C^1 par morceaux, d'après la Proposition 4.2 on a $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ on a donc

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \frac{1}{2}\left(|c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann) et la série $\sum |c_n(f')|^2$ converge puisque f' est continue par morceaux. Par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum |c_n(f)|$ converge.

CHAPITRE 5

CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER

5.1 Le théorème de Dirichlet

Le théorème principal concernant la convergence des séries de Fourier est le théorème de Dirichlet (ou Jordan-Dirichlet).

Théorème 5.1 (Dirichlet). *Soit $f \in C^1_{2\pi,m}$. En particulier pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ les quantités $f(x_0^+) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ et $f(x_0^-) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ existent et sont finies. Alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a*

$$S(f)(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right).$$

Si f est continue en x_0 on a donc simplement $S(f)(x_0) = f(x_0)$.

Corollaire 5.1. *Si f est continue et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement, et donc uniformément, vers f sur $\mathbb{R}$.*

Le Corollaire découle directement du théorème de Dirichlet et du Théorème 4.1.

Remarque 5.1. *Le théorème est optimal dans le sens où on ne peut pas se passer de l'hypothèse C^1 par morceaux. Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en certains points.*

Avant de montrer le théorème de Dirichlet on va en donner une application directe. Il permet (entre autres) de calculer la valeur de certaines séries numériques.

Exemple 5.1. *On prend la fonction f de l'Exemple 4.1. Cette fonction est bien C^1 par morceaux. Le théorème de Dirichlet assure donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$S(f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Si on prend $x = \frac{\pi}{2}$ *la fonction* f *est continue en* $\frac{\pi}{2}$ *et* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$*. On a donc, puisque* $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1 \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Prenons maintenant la fonction g *de l'Exemple 4.1. Elle est cette fois continue et* C^1 *par morceaux. Sa série de Fourier converge donc normalement vers* g*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2} = g(x).$$

Si on prend $x = 0$ *on obtient alors*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = g(0) = 0 \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On peut alors utiliser cette série pour calculer (enfin) la somme de la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$*. On va pour ça la couper en 2 en séparant les termes* n *pairs et* n *impairs (vérifiez que toutes les séries utilisées sont bien convergentes et que le calcul est donc légitime). On a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

et donc $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$*, i.e.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Le reste de cette section a pour objectif de démontrer le théorème de Dirichlet. On va pour cela réécrire les sommes partielles $S_N(f)$ sous une forme un peu différente. Si $N \geq 0$ on peut écrire

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) \mathrm{e}^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int_0^{2\pi} f(y) \mathrm{e}^{-iny} \mathrm{e}^{inx} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \times \left(\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{in(x-y)} \right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Pout tout $N \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{int}$. On a alors

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) D_N(x-y) \, \mathrm{d}y.$$

Si on fait le changement de variable $t = x - y$ on peut également écrire (toutes les fonctions sont 2π-périodiques).

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-2\pi}^{x} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.1}$$

Les fonctions D_N sont appelées noyaux de Dirichlet et ont l'avantage de pouvoir facilement être calculées. En effet, si $t = 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$ on a $\mathrm{e}^{int} = 1$ pour tout n et donc $D_N(2m\pi) = 2N+1$. Sinon $\mathrm{e}^{it} \neq 1$ et on a affaire à la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{it} et de premier terme e^{-iNt}. On obtient donc

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \mathrm{e}^{-iNt}\frac{1-\mathrm{e}^{i(2N+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} \\ &= \mathrm{e}^{-iNt}\frac{\mathrm{e}^{i(N+1/2)t}\left(\mathrm{e}^{-i(N+1/2)t}-\mathrm{e}^{i(N+1/2)t}\right)}{\mathrm{e}^{it/2}\left(\mathrm{e}^{-it/2}-\mathrm{e}^{it/2}\right)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-i(N+1/2)t}-\mathrm{e}^{i(N+1/2)t}}{\mathrm{e}^{-it/2}-\mathrm{e}^{it/2}} \\ &= \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si f est la fonction constante égale à 1 on a facilement $c_0(f) = 1$ et $c_n(f) = 0$ si $n \neq 0$ donc $S_N(f)(x) = 1$ pour tout N et pour tout x. Ainsi l'identité (5.1) donne $1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout N. Comme de plus la fonction D_N est paire on a également

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

On résume tout cela dans le lemme suivant.

Lemme 5.1. *Pour tout $N \geq 0$ le noyau de Dirichlet $D_N(t) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{int}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$D_N(t) = 2N+1$ si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $D_N(t) = \dfrac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ sinon. En particulier la fonction D_N est paire.*
2. *$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1.$*
3. *Pour toute fonction $f \in C^0_{2\pi,m}$ on a $S_N(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x.*

Démonstration du Théorème de Dirichlet. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a, en utilisant la parité de D_N,

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)D_N(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Par ailleurs puisque $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x^-)+f(x^+)\right) D_N(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc, en utilisant $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$ avec $a=Nt$ et $b=\frac{t}{2}$,

$$\begin{aligned}
&S_N(f)(x) - \frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\right) D_N(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\right) \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\right) \times \left(\frac{\sin(Nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \cos(Nt)\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t}\right)\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin(Nt)\,\mathrm{d}t\\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\right)\cos(Nt)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Comme $f\in C^1_{2\pi,m}$ on a $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}+\frac{f(x-t)-f(x^-)}{t} = \lim_{y\to x^+} f'(y) - \lim_{y\to x^-} f'(y)$. On a également $\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2$. La fonction g définie sur $]0,\pi]$ par

$$g(t) = \left(\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t}\right)\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

et prolongée par imparité et 2π-périodicité est donc continue par morceaux. Par ailleurs la fonction définie par $h(t)=f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)$ est continue par morceaux et paire. En utilisant la parité de g, l'imparité de h et (4.1)-(4.2), l'identité (5.3) s'écrit donc

$$S_N(f)(x) - \frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right) = 4b_N(g)+4a_N(h),$$

et le résultat découle du lemme de Riemann-Lebesgue (Corollaire 4.1).

5.2 Approximation uniforme

Théorème 5.2 (Weierstrass)**.** *Soit f une fonction continue 2π-périodique. Il existe une suite $(P_N)_N$ de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f, i.e. telle que*

$$\|f-P_N\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-P_N(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]}|f(x)-P_N(x)| \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

Démonstration. Si f est continue et C^1 par morceaux le résultat est une conséquence du Corollaire 5.1 de la section précédente. On peut en effet prendre $P_N = S_N(f)$. Comme la série de Fourier converge normalement vers f elle converge uniformément, ce qui veut précisément dire que

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_N(f)(x)| = 0.$$

Si f est continue l'idée est d'approcher d'abord f par une fonction g qui est continue et C^1 par morceaux. Soit $N \geq 1$. Comme f est continue sur $[0, 2\pi]$ qui est un ensemble compact la fonction f y est uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in [0, 2\pi],\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon = \frac{1}{N}$, on prend $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2\pi}{p} < \delta$ et pour $k \in \{0, \ldots, , p\}$ on note $x_k = \frac{2k\pi}{p}$. On a en particulier $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \frac{1}{N}$ pour tout k et $f(x_p) = f(x_0)$. Soit f_N la fonction définie sur tout $[x_k, x_{k+1}[$ par

$$f_N(x) = \frac{p}{2\pi} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)(x - x_k) + f(x_k),$$

et prolongée par périodicité. f_N est la fonction affine par morceaux qui coincide avec f aux points x_k. On vérifie facilement que f_N est continue et C^1 par morceaux. De plus, si $x \in [0, 2\pi]$ et k est tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$ on a

$$\begin{aligned} |f_N(x) - f(x)| &\leq \left|\frac{p}{2\pi} \left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)(x - x_k)\right| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| < 2\varepsilon = \frac{2}{N}, \end{aligned}$$

i.e. $|f_N(x) - f(x)| < \frac{2}{N}$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ (les fonctions sont périodiques). Comme f_N est continue et C^1 par morceaux il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f_N, en particulier il existe un polynôme trigonométrique P_N tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $|f_N(x) - P_N(x)| < \frac{1}{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on aura donc

$$|f(x) - P_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - P_N(x)| < \frac{3}{N},$$

et ainsi $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - P_N(x)| < \frac{3}{N}$. La suite $(P_N)_N$ converge donc bien uniformément vers f.

Remarque 5.2. *L'hypothèse sur la continuité de f est indispensable. En effet, les polynômes trigonométriques sont des fonctions continues et une limite uniforme de fonctions continues est continue (voir L2). Si f est limite uniforme de polynômes trigonométriques alors nécessairement f est continue. Le théorème de Weierstrass garantit que n'importe quelle fonction continue périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.*

5.3 Convergence en moyenne quadratique. Formule de Parseval

On a vu dans la Section 4.2 que si $f \in C^0_{2\pi,m}$ alors pour tout $N \geq 0$ la N-ème somme partielle de la série de Fourier $S_N(f)$ est l'unique élément P de $\mathcal{T}_N$ qui approche le mieux f en moyenne quadratique, i.e. qui minimise la quantité $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)-P(f)(x)|^2\,\mathrm{d}x = \|f-P\|^2$. On a par ailleurs montré, voir (4.4), que pour tout N on a

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2, \tag{5.4}$$

d'où on a tiré l'inégalité de Bessel $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \le \|f\|^2$.

La question naturelle est alors : que se passe-t-il si $N \to \infty$? Au vu des théorèmes de Dirichlet et de Weierstrass on peut espérer que $\|f - S_N(f)\| \to 0$, au moins si f est continue ou C^1 par morceaux. On va voir qu'en fait c'est vrai dès que $f \in C^0_{2\pi,m}$.

Théorème 5.3. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors $\lim_{N\to\infty} \|f-S_N(f)\|^2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x)-S_N(f)(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$ et on a donc*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \qquad \textit{(Formule de Parseval)} \tag{5.5}$$

De même on a

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{5.6}$$

Corollaire 5.2. *Si f et g sont continues et ont les mêmes coefficients de Fourier, i.e. $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = g$. Plus généralement, si $f, g \in C^0_{2\pi,m}$ ont les mêmes coefficients de Fourier alors $f = g$ sauf éventuellement en leurs points de discontinuité.*

Démonstration. Comme $c_n(f) - c_n(g) = c_n(f - g)$, en appliquant la formule de Parseval à $f - g$ on en déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f) - c_n(g)|^2 = 0.$$

Puisque la fonction $|f - g|^2$ est positive et continue on en déduit que $f = g$. $\square$

Tout comme le théorème de Dirichlet la formule de Parseval permet par exemple de calculer la somme de certaines séries numériques.

Exemple 5.2. *On reprend la fonction périodique g qui vaut $g(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$. Ses coefficients de Fourier sont $a_0(g) = \pi$ et $a_{2n+1}(g) = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$. La formule de Parseval donne alors*

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En raisonnant comme dans l'Exemple 5.1 on peut alors obtenir la valeur de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. En effet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96},$$

d'où on tire $\displaystyle\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$ *et donc* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

Démonstration du théorème. Une fois montré que $\lim_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|^2=0$ la formule de Parseval découle directement de (5.4) en faisant tendre N vers l'infini. On montre donc que pour tout $f\in C^0_{2\pi,m}$ on a bien $\lim_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|^2=0$. L'idée est de dire qu'il y a "assez de polynômes trigonométriques" pour pouvoir approcher f. On va donc naturellement essayer d'utiliser le théorème de Weierstrass. Il faudra donc passer aussi de la norme infinie (qui apparait dans le théorème de Weierstrass) à la moyenne quadratique $\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Cela se fait facilement. En effet, si $f\in C^0_{2\pi,m}$ on a

$$\|f\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f\|_\infty^2\,\mathrm{d}x=\|f\|_\infty^2,$$

i.e. $\|f\|\le\|f\|_\infty$.

On considère d'abord le cas où f est continue. Soit $\varepsilon>0$. D'après le théorème de Weierstrass il existe $P\in\mathcal{T}$ tel que $\|f-P\|_\infty<\varepsilon$. On a donc $\|f-P\|<\varepsilon$. Si N_0 est le degré de P on a $P\in\mathcal{T}_N$ pour tout $N\ge N_0$ et donc d'après (4.3) pour tout $N\ge N_0$ on a

$$\|f-S_N(f)\|\le\|f-P\|<\varepsilon.$$

On a montré *pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe* N_0 *tel que pour tout* $N\ge N_0$ *on a* $\|f-S_N(f)\|<\varepsilon$. C'est précisément la définition de $\lim_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|^2=0$.

On suppose maintenant que f est seulement continue par morceaux. On va procéder de façon analogue à ce qu'on a fait dans la preuve du théorème de Weierstrass en commençant par approcher f par une fonction continue g. On note $\{x_1,\dots,x_m\}$ les points de discontinuité de f qui sont dans $[0,2\pi]$ avec éventuellement $x_1=0$ et $x_m=2\pi$ si f n'est pas continue en 0, et donc en 2π. Etant donné $\delta>0$ (que l'on fixera par la suite) tel que la distance minimale entre deux points de discontinuité soit supérieure à 2δ, on considère la fonction continue g qui coincide avec f en dehors des intervalles de la forme $]x_k-\delta,x_k+\delta[$ et affine sur ces intervalles, i.e telle que

$$g(x)=\frac{f(x_k+\delta)-f(x_k-\delta)}{2\delta}(x-x_k+\delta)+f(x_k-\delta).$$

La condition sur δ permet juste de s'assurer que ces intervalles sont bien 2 à 2 disjoints. Sur l'intervalle $]x_k-\delta,x_k+\delta[$ on a alors

$$|f(x)-g(x)|\le\left|\frac{f(x_k+\delta)-f(x_k-\delta)}{2\delta}(x-x_k+\delta)\right|+|f(x)-f(x_k-\delta)|\le 4\|f\|_\infty$$

Comme $f=g$ en dehors des intervalles $]x_k-\delta,x_k+\delta[$ on peut donc écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}|f(x)-g(x)|^2\,\mathrm{d}x\\ &\le \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}16\|f\|_\infty^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{16m\delta\|f\|^2}{\pi},\end{aligned}$$

i.e. $\|f-g\|^2 < \dfrac{16\|f\|^2\delta m}{\pi}$.

Par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 2\pi]$ on a

$$|f(x)-S_N(g)(x)|^2 \leq (|f(x)-g(x)|+|g(x)-S_N(g)(x)|)^2 \leq 2|f(x)-g(x)|^2+2|g(x)-S_N(g)|^2.$$

En intégrant entre 0 et 2π on obtient ainsi

$$\|f-S_N(g)\|^2 \leq 2\|f-g\|^2 + 2\|g-S_N(g)\|^2$$

et donc, en utilisant à nouveau (4.3) avec $P = S_N(g)$, pour tout N on a

$$\|f-S_N(f)\|^2 \leq \|f-S_N(g)\|^2 \leq 2\|f-g\|^2 + 2\|g-S_N(g)\|^2.$$

On peut maintenant finir la preuve dans le cas où f est continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. On commence par construire, comme ci-dessus, g continue telle que $2\|f-g\|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Il suffit pour cela de prendre $\delta < \frac{\varepsilon\pi}{64m\|f\|^2}$. La fonction g étant continue on a $\lim\limits_{N\to\infty} \|g-S_N(g)\| = 0$ donc il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$ on a $2\|g-S_N(g)\|^2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Au final, pour tout $N \geq N_0$ on aura

$$\|f-S_N(f)\|^2 \leq 2\|f-g\|^2 + 2\|g-S_N(g)\|^2 < \varepsilon.$$

On a montré : *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* N_0 *tel que si* $N \geq N_0$ *alors* $\|f-S_N(f)\|^2 < \varepsilon$. C'est précisément la définition de $\lim\limits_{N\to\infty} \|f-S_N(f)\|^2 = 0$. □

Remarque 5.3. *Même si l'application* $f \mapsto \|f\|$ *n'est pas une norme sur* $C^0_{2\pi,m}$ *on peut néanmoins démontrer l'inégalité triangulaire* $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *pour tous* $f, g \in C^0_{2\pi,m}$*. On aurait donc directement pu écrire dans la preuve* $\|f-S_N(g)\| \leq \|f-g\| + \|g-S_N(g)\|$ *et utiliser ensuite cette inégalité pour montrer que* $\lim\limits_{N\to\infty} \|f-S_N(f)\| = 0$.

On termine cette section par une remarque qui "combine" les théorèmes de Dirichlet et de Parseval. Pour simplifier on se place dans le cas où f est continue et C^1 par morceaux. D'une part le théorème de Dirichlet assure que $f = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$, la convergence étant même normale d'après le Corollaire 5.1. D'autre part le théorème de Parseval garantit lui que $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$. On retrouve essentiellement les propriétés indiquées à la fin de la Section 2.1 dans le cas des espaces vectoriels munis de bases orthonormées. Dans un sens la famille $(e_n)_n$ n'est pas seulement une famille orthonormée, mais c'est une "base orthonormée". Il y a cependant une grosse différence avec une base : on fait ici des combinaisons linéaires infinies (et c'est ça qui n'est pas évident et qui a demandé du travail).

5.4 Les fonctions T-périodiques

Comme on l'a dit à la fin de la Section 1 si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique avec $T > 0$, on peut se ramener au cas des fonctions 2π-périodiques en considérant la fonction $g(x) = f\left(\dfrac{T}{2\pi}x\right)$.

On vérifie facilement que g est continue par morceaux, resp. C^1 par morceaux, si et seulement si f l'est. Ainsi, si f est C^1 par morceaux on peut appliquer le théorème de Dirichlet à la fonction g et on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2}\left(g(x^-)+g(x^+)\right), \qquad \forall x\in\mathbb{R},\\
\iff\ &\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\mathrm{e}^{inx} = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{T}{2\pi}x^-\right)+f\left(\frac{T}{2\pi}x^+\right)\right), \qquad \forall x\in\mathbb{R},\\
\iff\ &\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\mathrm{e}^{in\omega t} = \frac{1}{2}\left(f(t^-)+f(t^+)\right), \quad \forall t\in\mathbb{R},
\end{aligned}$$

où on rappelle que $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

De même si $f\in C^0_{2\pi,m}$ la formule de Parseval appliquée à la fonction g et le changement de variable $t=\frac{T}{2\pi}x$ donnent

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(x)|^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\right|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, afin de ne faire apparaitre que la fonction f on peut noter en effectuant à nouveau le changement de variable $t=\frac{T}{2\pi}x$ que

$$c_n(g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\mathrm{e}^{-inx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

On peut bien entendu faire la même chose pour les séries en sin / cos. On résume tout cela dans le théorme suivant.

Théorème 5.4. *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique. On définit ses coefficients de Fourier*

$$c_n(f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-in\omega t}\,\mathrm{d}t,\ a_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \ \text{ et } \ b_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

La série de Fourier de f est la série trigonométrique

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(f)\mathrm{e}^{in\omega t}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n\geq1}a_n(f)\cos(n\omega t)+b_n(f)\sin(n\omega t).$$

Les séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq1}|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2$ convergent et on a les formules de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=\frac{1}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{|a_0(f)|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2=\frac{2}{T}\int_0^T|f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Enfin si f est de classe C^1 par morceaux sa série de Fourier converge simplement et pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(f)\mathrm{e}^{in\omega t}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f)\cos(n\omega t)+b_n(f)\sin(n\omega t)=\frac{1}{2}\left(f(t^-)+f(t^+)\right).$$

CHAPITRE 6

COMPLÉMENTS

6.1 Le théorème de Fejér

Lorsque f n'est pas C^1 par morceaux le théorème de Dirichlet ne s'applique pas. On peut même construire des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en certains points. L'exemple ci-dessous est dû à Fejér.

Exemple 6.1. *Soit f la fonction 2π-périodique, paire et définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left((2^{n^3}+1)\frac{x}{2}\right)$. On vérifie facilement que la fonction f est continue sur $[0,\pi]$ (convergence normale de la série) et donc sur $\mathbb{R}$. On peut cependant montrer que la série de Fourier de f diverge en $x=0$. Plus précisément on peut montrer que la sous-suite $\left(S_{2^{N^3}+1}(f)(0)\right)_N$ tend vers $+\infty$.*

Lorsqu'une suite diverge on peut utiliser des notions un peu plus faibles de convergence (il en existe plusieurs). Celle qu'on va utiliser ici est la convergence au sens de Cesàro.

Définition 6.1. *Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_n$ converge au sens de Cesàro vers $\ell \in \mathbb{C}$ si la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$ converge vers ℓ. La suite $(v_n)_n$ est appelée la suite des moyennes de Cesàro de la suite $(u_n)_n$.*

Remarque 6.1. *L'unicité de la limite de la suite $(v_n)_n$, si cette limite existe, garantit que si une suite $(u_n)_n$ converge au sens de Cesàro alors sa limite est unique.*

On a indiqué ci-dessus que cette notion de convergence était “plus faible”. On a en effet le résultat suivant.

Proposition 6.1. *Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ alors $(u_n)_n$ converge au sens de Cesàro vers $\ell \in \mathbb{C}$. La réciproque est fausse en général.*

Exemple 6.2. *Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. La suite $(u_n)_n$ diverge (ses sous-suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ ont des limites distinctes). Par contre elle converge au sens de Cesàro vers $\ell = 0$. En effet, on calcule facilement que si n est pair on a $v_n = \frac{1}{n+1}$ tandis que $v_n = 0$ si n est impair.*

Démonstration. Supposons que $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Si $n \geq n_0$ on a alors

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k - \ell \right| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0}^{n} |u_k - \ell| \\
&< \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} \varepsilon \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Comme la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - \ell|$ tend vers 0 il existe n_1 tel que si $n \geq n_1$ on a $w_n < \varepsilon$. Finalement pour $n \geq N = \max(n_0, n_1)$ on a $|v_n - \ell| < 2\varepsilon$ ce qui prouve bien que $(v_n)_n$ tend vers ℓ. $\square$

Peu après avoir trouvé son contre-exemple sur la convergence de séries de Fourier d'une fonction continue, sans hypothèse C^1 par morceaux, Fejér montre qu'on peut affaiblir l'hypothèse sur f à condition d'affaiblir la notion de convergence utilisée.

Définition 6.2. *Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. On appelle sommes de Fejér les moyennes de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f, i.e.*

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x).$$

Théorème 6.1. *[Fejér] Soit $f \in C^0_{2\pi,m}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $(S_N(f)(x))_N$ converge au sens de Cesàro vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$, i.e.*

$$\lim_{N\to\infty} T_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)).$$

Si de plus f est continue alors la convergence est uniforme, vers f.

L'idée de départ de la preuve est similaire à celle du théorème de Dirichlet : écrire $T_N(f)(x)$ sous la forme

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t)\, \mathrm{d}t,$$

où F_N est une fonction à préciser. Cela se fait assez facilement. Pour tout $n \geq 0$ on a

$S_n(f)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t$ où D_n est le noyau de Dirichlet. On a donc

$$\begin{aligned}
T_N(f)(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x)\\
&= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t)\right)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On définit donc les fonctions F_N, appelées noyaux de Fejér, par

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t).$$

Il découle directement des propriétés des fonctions D_n, voir le Lemme 5.1, que les fonctions F_N sont paires et vérifient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

On pourra en particulier écrire, c'est l'analogue de (5.2),

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left(f(x+t)+f(x-t)\right) F_N(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.1}$$

Enfin, tout comme pour les noyaux de Dirichlet, on peut calculer explicitement les noyaux de Fejér. Si $t\in 2\pi\mathbb{Z}$ on a $D_n(t) = 2n+1$ pour tout n donc

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(2n+1) = 1 + \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^{N} n = 1 + \frac{2}{N+1}\times\frac{N(N+1)}{2} = N+1.$$

Et si $t\notin 2\pi\mathbb{Z}$ on a $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(\left(N+\frac12\right)t\right)}{\sin\left(\frac t2\right)}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
F_N(t) &= \frac{1}{N+1}\times\frac{1}{\sin\left(\frac t2\right)}\times\sum_{n=0}^{N}\sin\left(\left(n+\frac12\right)t\right)\\
&= \frac{1}{N+1}\times\frac{1}{\sin\left(\frac t2\right)}\times\mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{N}\mathrm{e}^{i(n+1/2)t}\right)\\
&= \frac{1}{N+1}\times\frac{1}{\sin\left(\frac t2\right)}\times\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{it/2}\frac{1-\mathrm{e}^{i(N+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}}\right)\\
&= \frac{1}{N+1}\times\frac{1}{\sin\left(\frac t2\right)}\times\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i(N+1)t/2}\frac{\sin\left((N+1)\,t/2\right)}{\sin\left(\frac t2\right)}\right)\\
&= \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left((N+1)\,t/2\right)}{\sin\left(\frac t2\right)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ce qui va faire la différence avec les noyaux de Dirichlet c'est que les fonctions F_N sont toujours positives.

Lemme 6.1. *Pour tout* $0<\delta<\pi$ *on a* $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t = 0$ *et donc* $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Démonstration. Sur $[\delta,\pi]$ on a $\sin(t/2)\geq\sin(\delta/2)$ et donc $F_N(t)\leq\dfrac{1}{(N+1)\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$. On en déduit que

$$0\leq\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t\leq\frac{\pi-\delta}{(N+1)\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

et le résultat découle du théorème des gendarmes.

La deuxième limite découle simplement du fait que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t=1$ et de la relation de Chasles. □

L'idée est alors la suivante. Le lemme ci-dessus indique que, sur $[0,\pi]$, lorsque $N\to\infty$ la fonction F_N se concentre principalement près de 0 : en dehors de tout intervalle $[0,\delta]$ l'intégrale de F_N tend vers 0 alors que F_N est positive. Dans (6.1), au moins lorsque N est grand, tout se passe donc dans un petit intervalle $[0,\delta]$, i.e.

$$T_N(f)(x)\simeq\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta (f(x+t)+f(x-t))\,F_N(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to0^+}f(x\pm t)=f(x^\pm)$, si δ est petit on aura, sur $[0,\delta]$, $f(x\pm t)\simeq f(x^\pm)$ et donc

$$T_N(f)(x)\simeq\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \big(f(x^+)+f(x^-)\big)\,F_N(t)\,\mathrm{d}t\simeq\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\times\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_N(t)\,\mathrm{d}t\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}.$$

On termine la preuve en rendant rigoureuse l'idée donnée ci-dessus. Soit $\varepsilon>0$. Comme $\displaystyle\lim_{t\to0^+}f(x\pm t)=f(x^\pm)$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $t\in[0,\delta]$ on a $|f(x+t)-f(x^+)|<\varepsilon$ et $|f(x-t)-f(x^-)|<\varepsilon$. Pour ce $\delta>0$ on a alors

$$\begin{aligned}
&\left|T_N(f)(x)-\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))\right|\\
&\quad=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\pi f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-))F_N(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\quad\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \big|f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\big|\,F_N(t)\,\mathrm{d}t \qquad\qquad (F_N\text{ est positive!})\\
&\quad=\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \big|f(x+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\big|\,F_N(t)\,\mathrm{d}t\\
&\qquad\quad+\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \big|fx+t)+f(x-t)-f(x^+)-f(x^-)\big|\,F_N(t)\,\mathrm{d}t\\
&\quad\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \big|f(x+t)-f(x^+)\big|\,F_N(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi}\int_0^\delta \big|f(x-t)-f(x^-)\big|\,F_N(t)\,\mathrm{d}t+\frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t\\
&\quad\leq\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta F_N(t)\,\mathrm{d}t+\frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Comme la fonction F_N est positive on a, pour tout N, $\frac{1}{\pi}\int_0^\delta F_N(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Par ailleurs d'après le lemme 6.1 on a $\lim_{N\to\infty} \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$ on a $\frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_\delta^\pi F_N(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon$. Finalement, pour tout $N \geq N_0$ on a

$$\left|T_N(f)(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))\right| < 2\varepsilon.$$

On a montré : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_0 tel que si $N \geq N_0$ alors

$$\left|T_N(f)(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))\right| < 2\varepsilon,$$

i.e. $\lim_{N\to\infty} T_N(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Dans le cas où f est continue, en plus d'avoir $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$, le théorème de Heine garantit que f est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ (par périodicité). Dans la fin de la preuve ci-dessus le δ ne dépend donc pas de $x \in \mathbb{R}$ et donc le N_0 non plus (il ne dépend que de δ). La dernière phrase s'écrit alors : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_0 tel que si $N \geq N_0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|T_N(f)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$, c'est précisément la convergence uniforme de $T_N(f)$ vers f.

6.2 Transformation d'Abel et convergence des séries trigonométriques

Lorsqu'il n'y a pas convergence normale on peut parfois montrer la convergence simple de certaines séries trigonométriques à l'aide de ce qu'on appelle la transformation d'Abel. Celle-ci est l'analogue pour les sommes de l'intégration par parties pour les intégrales. Qu'un tel analogue existe n'est pas surprenant, une intégrale n'est qu'une (limite de) somme.

Etant données deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ et deux entiers $p < q$ on souhaite transformer la somme $\sum_{n=p}^{q} u_n v_n$. On ne traitera ici que des sommes finies tout comme l'intégration par parties ne se fait a priori que pour des intégrales sur des segments. Dans une intégration par parties on écrit

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

L'analogue pour les suites de la dérivée f' est la différence $u_{n+1} - u_n$, ou bien $u_n - u_{n-1}$ c'est là qu'il faudra faire un peu attention avec le côté discret des suites. De même si on veut voir la suite v_n comme la dérivée g' il faut trouver une suite $(V_n)_n$ dont $(v_n)_n$ serait obtenue en faisant $v_n = V_{n+1} - V_n$ ou bien $V_n - V_{n-1}$. Il y a une façon simple de le faire : en prenant pour V_n les sommes partielles de la série $\sum v_n$.

Proposition 6.2. *Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ et $p < q$ deux entiers. On note $(V_n)_n$ la suite des sommes partielles associée à la suite $(v_n)_n$, i.e. $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, avec la convention $V_{-1} = 0$.*

Alors
$$\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = u_q V_q - u_p V_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (u_{n+1} - u_n) V_n.$$

Démonstration. Pour tout n on a $v_n = V_n - V_{n-1}$. On écrit alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} u_n v_n &= \sum_{n=p}^{q} u_n V_n - \sum_{n=p}^{q} u_n V_{n-1} \\ &= \sum_{n=p}^{q} u_n V_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} u_{n+1} V_n \\ &= u_q V_q - u_p V_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (u_n - u_{n+1}) V_n \\ &= u_q V_q - u_p V_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (u_{n+1} - u_n) V_n.\end{aligned}$$

Remarque 6.2. *Plutôt que de prendre* $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ *on pourrait prendre n'importe quelle suite* $(\tilde V_n)_n$ *vérifiant* $\tilde V_n - \tilde V_{n-1} = v_n$. *On vérifie alors que*
$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (\tilde V_k - \tilde V_{k-1}) = \tilde V_n - \tilde V_{-1}.$$
Autrement dit les suites $(V_n)_n$ *et* $(\tilde V_n)_n$ *ne diffèrent que par une constante tout comme 2 primitives d'une fonction continue (sur un intervalle) sont égales à constante près. Le choix de la suite des sommes partielles correspond au choix d'une primitive particulière.*

Lorsque la série $\sum v_n$ *converge, si on note* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ *le reste de la série on a alors* $v_n = R_{n-1} - R_n$. *Autrement dit la suite* $(-R_n)_n$ *est une "primitive" de la suite* $(v_n)_n$. *On peut alors écrire la transformation d'Abel correspondante, ce qui donne*
$$\sum_{n=p}^{q} u_n v_n = -u_q R_q + u_p R_{p-1} + \sum_{n=p}^{q-1} (u_{n+1} - u_n) R_n. \tag{6.3}$$
Dans le cas des fonctions cela reviendrait au cas $g(x) = -\int_x^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t$, *ce qui est possible uniquement si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} g'(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

La transformation d'Abel permet de montrer facilement le résultat suivant qui s'applique très bien aux séries trigonométriques.

Théorème 6.2. *Soient* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *telles que*

1. *la suite* $(u_n)_n$ *est réelle et décroit vers* 0.
2. *la suite des sommes partielles* $(V_n)_n$ *associées à* $(v_n)_n$ *est bornée.*

Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Remarque 6.3. *Dans le cas où $v_n = (-1)^n$ on retrouve en fait le théorème des séries alternées.*

Démonstration. La transformation d'Abel avec $p = 0$ et $q = N$ permet d'écrire

$$\sum_{n=0}^{N} u_n v_n = u_N V_N + \sum_{n=0}^{N-1} (u_n - u_{n+1}) V_n.$$

Comme la suite $(V_n)_n$ est bornée et que la suite $(u_n)_n$ tend vers 0 on a $u_N V_N \to 0$. Il reste à montrer que la série $\sum (u_n - u_{n+1}) V_n$ converge. On va montrer qu'elle est en fait absolument convergente donc convergente.

En effet, puisque $(u_n)_n$ est décroissante on a $|(u_n - u_{n+1}) V_n| = (u_n - u_{n+1}) |V_n| \leq M(u_n - u_{n+1})$ où M est un majorant de la suite $(|V_n|)_n$. Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} M(u_n - u_{n+1}) = M(u_0 - u_{N+1}) \to M u_0$. Par comparaison de séries à termes positifs on en déduit que la série $\sum |(u_n - u_{n+1}) V_n|$ converge et donc la série $\sum (u_n - u_{n+1}) V_n$ est bien absolument convergente. □

Application à la convergence de séries trigonométriques. On va utiliser le théorème précédent avec $v_n = \sin(nx)$, $\cos(nx)$ ou e^{inx}. On calcule facilement que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{inx} = \begin{cases} \frac{1-\mathrm{e}^{i(N+1)x}}{1-\mathrm{e}^{ix}} = \mathrm{e}^{iNx/2} \frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6.4}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires on en déduit donc que

$$\sum_{n=0}^{N} \cos(nx) = \begin{cases} \cos(Nx/2) \frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6.5}$$

et

$$\sum_{n=0}^{N} \sin(nx) = \begin{cases} \sin(Nx/2) \frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Les sommes partielles (6.4) et (6.5) sont bornées pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ tandis que les sommes partielles (6.6) sont toujours bornées. Si on prend comme suite $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ cela montre par exemple la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série trigonométrique $\sum \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

En utilisant de façon un peu plus précise la transformation d'Abel on peut même montrer que si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont, comme dans le théorème, deux suites réelles décroissantes et qui tendent vers 0 alors les séries trigonométriques $\sum a_n \cos(nx)$ et $\sum b_n \sin(nx)$ convergent uniformément sur tout intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$. En particulier leur somme sera donc continue sur tout intervalle $[\delta, 2\pi - \delta]$ et donc sur $]0, 2\pi[$. Par périodicité elle sera continue (au moins) sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

On traite le cas du sinus, l'autre se fait de la même façon. Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ la transformation d'Abel donne

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx) = b_N \sin(Nx/2) \frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)} + \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) \sin(nx/2) \frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

On montre que chacun des deux termes du membre de droite converge uniformément. Pour tout $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ on a $|\sin(x/2)| \geq |\sin(\delta/2)|$. Donc d'une part

$$\sup_{x\in[\delta,2\pi-\delta]} \left| b_N \sin(Nx/2) \frac{\sin\left((N+1)x/2\right)}{\sin(x/2)} \right| \leq \frac{|b_N|}{\sin(\delta/2)} \to 0$$

et d'autre part

$$\sup_{x\in[\delta,2\pi-\delta]} \left| (b_n - b_{n+1}) \sin(nx/2) \frac{\sin\left((n+1)x/2\right)}{\sin(x/2)} \right| \leq \frac{b_n - b_{n+1}}{\sin(\delta/2)}.$$

Comme la série $\sum(b_n - b_{n+1})$ converge (c'est le même argument que dans la preuve du théorème), cela prouve que la série $\displaystyle\sum(b_n - b_{n+1}) \sin(nx/2) \frac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)}$ converge normalement sur $[\delta, 2\pi - \delta]$ et donc uniformément.