L3 MPI
2008-2009
Mathématiques

TD n°3: Variables aléatoires discrètes: loi, espérance, variance, fonction génératrice

Exercice 1. Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Comment peut-on modéliser le nombre de tirages nécessaires à l'aide d'une variable aléatoire?

Exercice 2. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$, et $Y = X^3 - X$.
a) Calculer l'espérance de X.
b) Calculer l'espérance de Y: en déterminant d'abord la loi de Y, puis sans déterminer la loi de Y.

Exercice 3. Dans une région donnée, 3% de la population est atteinte de la maladie M. 170 personnes se présentent à l'hôpital pour une consultation.
a) Modéliser le fait que le n-ème patient soit atteint de la maladie M ou non à l'aide d'une variable aléatoire X_n. Donner sa loi ainsi que son espérance et sa variance.
On note N le nombre de personnes qui se sont présentées pour la consultation et atteintes de la maladie M.
b) Exprimer N à l'aide des X_n. En déduire la loi de N ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières strictement positives. Montrer que X suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre p si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X > n) = (1-p)^n.$$

Exercice 5. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
a) Montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.
b) En déduire l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de la même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ du paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.
a) Calculer $P(U \leq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de U.
b) En s'inspirant de ce qui précède déterminer la loi de V.

Exercice 7. Soit ξ une variable aléatoire géométrique de paramètre p.
a) Calculer la fonction génératrice de ξ et en déduire $E(\xi)$, $\mathrm{Var}(\xi)$ et $E\big(1/(1+\xi)\big)$.
b) Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité conditionnelle $P(\xi \geq n+p \,|\, \xi > n)$.

Exercice 8. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des variables aléatoires indépendantes, de la loi de Bernoulli de paramètre p.
a) Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$:
  (i) par un calcul direct,
  (ii) en utilisant la fonction génératrice.
b) Calculer $E(S_n)$, $\mathrm{Var}(S_n)$ et $E\big(1/(1+S_n)\big)$.
c) Donner un exemple d'expérience modélisée par S_n.

Exercice 9. Soient ξ_1 et ξ_2 deux variables aléatoires binomiales indépendantes dont les lois de probabilité sont $B(n_1, p)$ et $B(n_2, p)$. Calculer la fonction génératrice et en déduire la loi de $S = \xi_1 + \xi_2$.

Exercice 10. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètres respectifs λ_i ($\lambda_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$).
a) Calculer la fonction génératrice de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et identifier la loi de cette v.a.
b) Déterminer la loi de $2X_1$, puis de $2X_1 + X_2$ lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Exercice 11. On lance au hasard N points sur l'intervalle $[0, \rho^{-1}N]$, avec $\rho > 0$. Pour un intervalle $[a,b] \subset [0, \rho^{-1}N]$ on note $M_N([a,b])$ le nombre de points tombés dans l'intervalle $[a,b]$.

a) Trouver la loi limite de $M_N([a,b])$ lorsque $N \to +\infty$.

$\star$ **b)** Soit t_N la coordonnée du point le plus proche de 0. Pour $t \geq 0$, calculer la probabilité que $t_N \geq t$, ainsi que la limite de cette probabilité quand $N \to +\infty$.

$\star$ **c)** Si $[a,b]$ et $[c,d]$ sont deux intervalles disjoints dans $[0,+\infty[$, les variables $M_N([a,b])$ et $M_N([c,d])$ sont elles indépendantes?

$\star$ **d)** Montrer que lorsque $N \to +\infty$ ces deux variables deviennent indépendantes, c'est-à-dire, pour $k, m \geq 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} P\big(M_N([a,b]) = k, M_N([c,d]) = m\big) = \lim_{N\to+\infty} P\big(M_N([a,b]) = k\big) \times \lim_{N\to+\infty} P\big(M_N([c,d]) = m\big)$$

$\star$ **Exercice 12.** Soit ξ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer $E(\xi)$, $\mathrm{Var}(\xi)$, la fonction génératrice de ξ et $E\big(1/(1+\xi)\big)$.

$\star$ **Exercice 13.** Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $P(T > n) \neq 0$ pour tout $n \in N^*$. On suppose que $P(T \geq n+p \,|\, T > n) = P(T \geq p)$ pour tous $p, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que T suit une loi géométrique. (C'est la seule loi sur $\mathbb{N}^*$ qui possède cette propriété dite "propriété de non vieillissement").

$\star$ **Exercice 14.** Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

a) Quelle est la loi de Y_n?

b) Pour quels couples (n,m) les v.a. Y_n et Y_m sont-elles indépendantes?

c) Calculer l'espérance et la variance de U_n.

d) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} P\Big(\mid \dfrac{U_n}{n} - p^2 \mid \geq \varepsilon\Big) = 0$.

$\star$ **Exercice 15.** Soit $(\xi_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Si $\xi_i = 1$, on dira qu'à l'instant i le résultat de l'épreuve est un succès. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ et $T_r(\omega) = \min\{n | S_n(\omega) = r\}$ le temps nécessaire pour obtenir r succès.

a) Déterminer la loi de T_1, $E(T_1)$, $\mathrm{Var}(T_1)$ et la fonction génératrice de T_1.

b) Déterminer $E(T_r)$, $\mathrm{Var}(T_r)$ et la fonction génératrice de T_r (*Indication*: montrer que $T_r = T_1^1 + T_1^2 + \ldots + T_1^r$ où les variables aléatoires $T_1^1, \ldots, T_1^r$ sont indépendantes et de même loi que T_1).

c) Trouver la loi de T_r.

Compléments: entropie d'une v.a. discrète.

Définitions. 1) *L'incertitude $i(A)$ d'un évènement A est définie par $i(A) = \log\big(1/P(A)\big)$. C'est un nombre réel positif ou $+\infty$ d'autant plus grand que l'évènement A est moins probable.*

2) *L'entropie $H(\xi)$ d'une variable aléatoire discrète ξ est posée égale à l'incertitude moyenne: si $\mathcal{X}$ est l'ensemble des valeurs de ξ,*

$$H(\xi) = \sum_{x\in\mathcal{X}} P(\xi = x) i(\xi = x) = \sum_{x\in\mathcal{X}} P(\xi = x) \log\Big(1/P(\xi = x)\Big).$$

Exercice 16. Montrer que pour deux évènements indépendants A et B, $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.

Exercice 17.

a) Montrer que pour toute variable aléatoire discrète ξ on a $H(\xi) \geq 0$, et que $H(\xi) = 0$ si et seulement si ξ est dégénérée (c'est-à-dire si $P(\xi = a) = 1$ pour un a).

b) Calculer l'entropie d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

c) Soit ξ une v.a. prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. En utilisant la concavité de la fonction logarithme, montrer que $H(\xi) \leq \log(n)$. Que peut-on en conclure sur l'entropie d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$?

$\star\star$ **Exercice 18.** On reprend l'exercice 9 de la feuille 2. On note ξ_n la v.a. décrivant la position de la puce au temps n, i.e. $\xi_n(\Omega) = \{1,2,3\}$, $p(\xi_n = 1) = \alpha_n$, $p(\xi_n = 2) = \beta_n$, $p(\xi_n = 3) = \gamma_n$.

a) Que vaut $H(\xi_0)$?

b) Exprimer $H(\xi_n)$, puis $H(\xi_{n+1})$, en fonction de α_n (on pourra remarquer que, pour tout n, $\beta_n = \gamma_n$).

c) Montrer que la suite $(H(\xi_n))_n$ est croissante. (*Indication*: on pourra étudier rapidement la fonction

$$f(x) = \frac{1+3x}{2}\log(2) + \frac{1}{2}(1-x)\log(1-x) + x\log(x) - \frac{1}{2}(1+x)\log(1+x)$$

sur l'intervalle $]0,1[$.)

d) Montrer que la suite $(H(\xi_n))_n$ converge et déterminer sa limite.