Université de Cergy Pontoise
Licence de Mathématiques L3M
Méthodes variationnelles
2009-2010

Feuille de TD 7
Multiplicateurs de Lagrange

Exercice 1.
a) Maximiser $f(x, y) = x + y$ sur l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$.
b) Soit $g(x, y) = x^2 + y^4 - 2x - 1$. Montrer que $g = 0$ est une contrainte régulière, et déterminer les extréma de $f(x, y) = x$ liés à cette contrainte.

Exercice 2. Trouver les extréma de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = z \end{cases}$$

a) à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.
b) à l'aide de considérations sur la restriction de f à la courbe.

Exercice 3.
a) Un fermier doit construire un enclos en rectangulaire au bord d'une rivière avec une palissade de 100m de long. Aidez le à en construire un de surface la plus grande possible.
b) On cherche à construire une boite de carton, sans couvercle, de volume 32 cm^3, déterminer la longueur de ses 3 cotés pour minimiser la quantité de carton utilisée. Y a-t-il un maximum ?
c) Même question pour une boite de carton de cotés a, $2a$,b.

Exercice 4. Soient h la fonction définie sur $]0, 1]$ par $h(t) = t \ln t$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^{*3} / \ x + y + z = 1\}$, et f la fonction définie sur V par $f(x, y, z) = x \ln(x) + y \ln(y) + z \ln(z)$.
a) Étudier h.
b) Montrer que f est une fonction négative.
c) Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de la fonction f.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 1} + yz$.
a) Montrer que f possède un maximum et un minimum globaux.
b) Déterminer ces extrema.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur la demi-sphère unité de $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = yz + \frac{1}{4} \ln x$$

a) Montrer que f ne possède pas de minimum.
b) Déterminer les trois points "possédant" un multiplicateur de Lagrange.
c) En étudiant les formes quadratiques en chacun de ces points, montrer que f possède un et un seul extremum local.
d) Montrer que pour $x < e^{-4}$, f prend des valeurs strictement négatives.
e) En déduire à l'aide d'un argument de compacité que f possède un maximum global, que l'on déterminera.

Exercice 7. Nous allons démontrer l'inégalité arithmético-géométrique qui compare la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, n étant un entier on a :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n; \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Soient s un réel positif, et f et g les fonctions définies par $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$, et $g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - s$

a) Montrer que $\Gamma = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n / g(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ est compact.

b) Montrer que f possède un maximum et un minimum sur Γ, déterminer le minimum.

c) Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique à l'aide du multiplicateur de Lagrange.

Exercice 8. Soit A une matrice carré $n \times n$. On pose pour toute matrice colonne à n lignes, $g(X) = {}^tXX - 1$ et $f(X) = {}^tX{}^tAAX$.

a) Montrer que $g = 0$ est une contrainte régulière.

b) Montrer que $g'(X)H = 2\,{}^tXH$, de même calculer $f'(X)H$.

c) Montrer que si f possède un extremum local en X_0 sur $g = 0$, alors X_0 est un vecteur propre de ${}^tAA$.

d) En déduire que la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne d'une matrice A est égale à la racine carrée du rayon spectral de ${}^tAA$, c'est à dire :

$$|||A|||_2 = \sqrt{\max\{|\lambda| / \lambda \text{ est une valeur propre de } {}^tAA\}}$$

Exercice 9. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un fermé de E, K un compact de E et $P \in E$.

a) Montrer qu'il existe $M_0 \in K$, tel que $\forall M \in K,\ \|P - M_0\| \leq \|P - M\|$.

b) Montrer qu'il existe $N_0 \in F$, tel que $\forall N \in F,\ \|P - N_0\| \leq \|P - N\|$. On appelle alors distance de P à F la valeur $\|P - N_0\|$.

c) Dans cette question $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 / x^2 + y^2 = z^2; xyz = 1\}$, calculer la distance de l'origine à F.

Exercice 10. *(Point de déchargement)* Soient A, B deux points dans $\mathbb{R}^k$ en dehors d'un hyperplan $H = \{x | {}^tnx = 0\}$. Déterminer $x \in H$ qui minimise $f(x) = \|x - A\|_2 + \|x - B\|_2$.