Université de Cergy Pontoise
Licence de Mathématiques L3M
Méthodes variationnelles
2009-2010

Feuille de TD 1
Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit les normes suivantes :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

a) Représenter les trois boules unité pour $n = 2$.
b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty.$$

Indication : pour montrer que $\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$, on pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le \|x\|_2 \times \|y\|_2$.
c) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
Remarque. On peut généraliser le résultat du c). On a en fait le théorème suivant : “Dans $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.”

Exercice 2. Soit $\ell^1 = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^\infty |x_n| < \infty\right\}$. On pose

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|, \quad \|x\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |x_n|.$$

a) La suite $(1, 1, 1, \cdots)$ est-elle dans ℓ^1 ?
b) Montrer que ℓ^1 est un espace vectoriel.
c) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ définissent deux normes sur ℓ^1.
d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit v_k l'élément de ℓ^1 qui correspond à la suite dont les premiers k-termes sont 1 et les autres termes sont nuls. Calculer $\|v_k\|_\infty$ puis $\|v_k\|_1$.
e) En déduire que ces deux normes ne sont pas équivalentes.
f) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et w_k l'élément de ℓ^1 défini par $w_k = \frac{1}{k}v_k$. Montrer que la suite $(w_k)_k$ converge pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 3. Sans justifications dire si les ensembles A_i sont ouverts, fermés, bornés, compacts dans E_i.

$A_1 = [0; 1];\ E_1 = \mathbb{R}$
$A_2 =]0; 1];\ E_2 = \mathbb{R}$
$A_3 = [0; +\infty[;\ E_3 = \mathbb{R}$
$A_4 = [0; 1] \times [-2; 4];\ E_4 = \mathbb{R}^2$
$A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\};\ E_5 = \mathbb{R}^2$
$A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 5y^2 < 9\};\ E_6 = \mathbb{R}^2$
$A_7 =]0; 1[\times\{0\};\ E_7 = \mathbb{R}^2$
$A_8 =]0; 1];\ E_8 =]0; 1]$

Exercice 4. Soit $g(x) = 1 + x/2$. Tracer les graphiques de g et de l'application identité. Posons $x_0 = 0$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
a) Déterminer x_1, x_2 et x_3. Donner une interprétation graphique.

b) Montrer que la suite x_n converge et que la limite est 2.

c) Plus généralement, soit $g_\lambda(x) = 1 + \lambda x$, avec $|\lambda| < 1$. Que peut être la limite éventuelle de la suite récurrente (x_n) définie par g_λ ? Déterminer une expression de x_n en fonction de x_0 et de λ. Montrer que (x_n) converge toujours dans ce cas.

d) Que se passe t-il si $|\lambda| > 1$ et puis $|\lambda| = 1$?

Exercice 5. (Théorème des applications contractantes dans un Banach) : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach et f une application de E dans E contractante c'est à dire :

$$\exists k \in [0, 1[, \forall x, y \in E,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

a) Soit $x_0 \in E$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n\|x_1 - x_0\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que (x_n) est une suite de Cauchy dans E.

c) Montrer que la suite converge vers un point fixe de f.

d) Montrer que f possède un et un seul point fixe l.

e) Montrer que $\|x_n - l\| \leq k^n\|x_0 - l\|$.

f) Montrer que la limite de la suite (x_n) est indépendante du choix de x_0.

Exercice 6. Soit $E = C^0([0, 1])$ munie de la norme sup. Soient f_1, f_2, f_3 trois applications de E dans E définie par :

$$f_1(\varphi)(x) = 1 + \frac{\varphi(0)}{3}x, \quad f_2(\varphi)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(t)\mathrm{d}t\ x^2, \quad f_3(\varphi)(x) = 1 + \int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que ces applications sont contractantes.

b) Pour chacune de ces application déterminer son unique point fixe.

Exercice 7. Soit $h(x) = x + e^{-x}$. Montrer que pour tout $x \neq y$, $|h(x) - h(y)| < |x - y|$. Est-ce que h est contractante sur $\mathbb{R}^+$, sur un compact de $\mathbb{R}^+$?

Exercice 8.

a) Soit E un espace de Banach et soit A un sous ensemble de E. Montrer que A est complet ssi A est fermé dans E.

b) Soit A un compact de E. Montrer que $B \subset A$ est compact ssi B est fermé.

Exercice 9. Soit ℓ^∞ l'espace des suites $s = (a_i)$ bornées de nombres réels, muni de la norme $\|s\| = \sup_{i \geq 0} |a_i|$.

a) Vérifier que cela définit bien une norme sur ℓ^∞.

b) On va montrer que c'est un espace de Banach. Soit $(s_n)_n = \big((s_n^k)_{k\in\mathbb{N}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^∞.

i) Montrer que (s_n) est une suite bornée.

ii) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la suite de réels $(s_n^k)_n$ converge, on note α_k sa limite.

iii) Montrer que la suite $\alpha = (\alpha_k)$ appartient à ℓ^∞.

iv) Montrer que la suite (s_n) converge vers α pour la norme $\|\cdot\|$.

c) Soit F l'ensemble des suites dans ℓ^∞ qui ne comportent qu'un nombre fini de termes non nuls. Montrer que c'est un sous espace vectoriel de ℓ^∞.

d) Montrer que F n'est pas ouvert.

e) Montrer que F n'est pas fermé, on pourra considérer les $s_n = (\underbrace{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n \text{ termes}}, 0, 0, \ldots)$