Université de Cergy Pontoise
Licence de Mathématiques L3M
Méthodes variationnelles
2009-2010

Feuille de TD 3
Différentielles

Exercice 1. Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Rappeler le Théorème de Rolle et de Taylor-Lagrange.

a) Montrer que si $|f'(x)| \geq K$ sur $]a,b[$, alors $|f(b) - f(a)| \geq K|b-a|$.

b) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(x) = e^{ix}$. Montrer qu'il n'existe pas de $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(2\pi) - g(0) = g'(c)(2\pi)$.

c) Montrer que a) n'est plus valable pour la fonction g.

Exercice 2. Soit $f : [0,\alpha] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telle que $f(\alpha) = f(0) = 0$ et $|f''(x)| \leq M$ sur $]0,\alpha[$. Montrer que $|f(x)| \leq x(\alpha - x)M/2$ sur $[0,\alpha]$. (Pour $x_0 \in]0,\alpha[$ fixé, prenons A telle que $f(x_0) = x_0(\alpha - x_0)A/2$ et puis on considère la fonction $g(x) = f(x) - x(\alpha - x)A/2$...)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable en un point v. La différentielle de f en v_0 est une application linéaire de quel espace vers quel espace ? Si l'on exprime la différentielle sous forme matricielle, quelle est la taille de la matrice ?

Exercice 4. *Utiliser $o(h)$ pour calculer la différentielle.* On rappelle que la différentielle de $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ au point v est une application linéaire $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(v+h) - f(v) - L(h) = o(h) \ , \quad \text{ou bien} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left(f(v+h) - f(v) - L(h)\right) = 0 \ .$$

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Quelle est la différentielle de f en 3 ? Quelle est la différentielle de f au point x ?

Exercice 5. Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. Soit $x_0 \in U$, on dit que f est dérivable en x_0 suivant la direction $h \in E$ ssi l'application $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ définie sur un intervalle de la forme $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{R}$ est dérivable en 0.

a) Montrer que si f est différentiable en x_0, alors elle est dérivable en x_0 suivant toutes les directions.

b) En considérant $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{sur } (\mathbb{R}^2)^* \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$, montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 6. Soit une application $f : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$, rappeler la définition de f est différentiable en un point $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Soit F définie par $F(A) = A \cdot ({}^tA)$. Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle au point A par la méthode suivante :

i) Pour $H \in \mathcal{M}(n,m)$ fixé, calculer $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(F(A+tH) - F(A))$. On note $L(H)$ la limite.

ii) Montrer que la fonction L ainsi définie est linéaire. Justifier que L est continue.

iii) Sur chaque espace vectoriel de matrices réelles on peut définir une norme de la façon suivante $\|M\|_\infty = \max_{i,j} |M_{i,j}|$, montrer en utilisant ces normes, qu'il existe une constante K telle que $\forall M, \ \|{}^tM\| \leq K\|M\|$.

iv) Montrer que $L : H \mapsto L(H)$ est bien la différentielle recherchée.

Exercice 7. On considère le déterminant $A \mapsto det(A)$ comme une application de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (vers quel espace ?). Cette application est-elle linéaire ? A l'aide de la méthode de l'exercice précédent, déterminer sa différentielle au point $I \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Montrer que l'application $A \mapsto \det(A)$ est différentiable au point $A = I$, la matrice identité. Déterminer $((\det)'(I))(H)$.
b) Montrer que l'application $A \mapsto \det(A)$ est différentiable en tout point $A \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ c'est à dire en tout point A inversible. Déterminer alors sa différentielle.

Exercice 9. Soit k un entier naturel, déterminer la différentielle des fonctions suivantes, sur un ouvert approprié de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$f_1 : A \mapsto tr(A)$	$f_3 : A \mapsto tr({}^tAA)$	$f_5 : A \mapsto A^k$	$f_7 : A \mapsto (A + A^2)^{-1}$
$f_2 : A \mapsto {}^tA$	$f_4 : A \mapsto (Id + A)^2$	$f_6 : A \mapsto A^{-2}$	$f_8 : A \mapsto A^{-k}$

Exercice 10. Soient $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f(v) = 3$, $g(v) = 3x+8y$, $A(v) = \begin{pmatrix} 3x + 8y \\ 2x - 5y \end{pmatrix}$, $F(v) = xy$ et $G(v) = \begin{pmatrix} xy \\ \sin(x + y) \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$. Calculer pour chacune de ces applications :
a) La matrice Jacobienne au point v ;
b) La différentielle au point v en tant qu'application linéaire ;
c) L'image du vecteur $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ par la différentielle au point $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.
a) Soit $f(t) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin\left(x^2 + xt\right) \mathrm{d}x$. Calculer $f'(0)$.
Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie. On considére les applications

$$E \ni \varphi \mapsto F(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad E \ni \varphi \mapsto G(\varphi) = \int_0^1 \varphi^2(x)\mathrm{d}x.$$

b) Montrer que F est linéaire et continue. Quelle est sa différentielle ?
c) Montrer que G est différentiable et déterminer sa différentielle.
d) Montrer que si $\varphi \in C^1$ et $\varphi(0) = \varphi(1)$, alors $(G'(\varphi))(\varphi') = 0$.

Exercice 12. Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x^2 + y^2 + z^2$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Calculer $f'(g(t))$ et $g'(t)$. Calculer $f \circ g(t)$ ainsi que sa dérivée. Est-ce que la régle de composition est vérifiée ? Soit $F : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z^2 \\ xy - 3 \\ 2y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Quelle est la différentielle de $F \circ F$ au point $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.
a) Montrer que $\varphi(x) = \|x\|^2$ est différentiable sur E. Préciser sa différentielle.
b) Retrouver la différentielle de l'application $\xi(x) = \|x\|$ sur E^* en utilisant a).
c) Montrer que $f_\lambda : E^* \to E^*$ définie par $x \mapsto \lambda x/\|x\|^2$ est différentiable sur E^* et que

$$(f'_\lambda(x))(h) = \frac{\lambda}{\|x\|^2}\left(h - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}x\right)$$

Exercice 14. Soient $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U$, on définit $A(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{x_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $B(x) = (x_1, x_1x_2) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$.
a) Pour $x \in U$ et $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, expliciter $(A'(x))(h)$ et $(B'(x))(h)$. Plus généralement, soit $f : U \to \mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$, $x \mapsto (f_{ij}(x))$. Que vaut $(f'(x))(h)$?
b) Calculer $B(x) \cdot ((A'(x))(h))$, $((B'(x))(h)) \cdot A(x)$, puis $((BA)'(x))(h)$. Y a-t-il une relation entre les trois résultats ? Expliquer.
c) Calculer ensuite $(AB)(x) := A(x)B(x)$ et déterminer $((AB)'(x))(h)$.

Exercice 15.
a) Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $f(X) = X^{-1}$. Que vaut $f(A)$? Que vaut $(f'(A))(H)$?
b) Soit $g(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 1+t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$ (sans calculer l'expression de $g(t)$).

Exercice 16. Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$. Soit $U = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) \neq 0\}$.
a) Montrer que U est un ouvert de E.
b) Soit $\psi : U \longrightarrow U$ telle que $\Psi(f) = 1/f$. Montrer que Ψ est différentiable sur U et déterminer sa différentielle. Est-ce que Ψ est C^1 sur U ?

Exercice 17. Soit f une fonction différentiable sur $(\mathbb{R}^2)^*$. Exprimer $\partial_x f$ et $\partial_y f$ en coordonnées polaires, on pourra poser $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, résoudre

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + y^2)f.$$