CY Cergy Paris Université
Département de Mathématiques
L3 Maths - S5
2022/2023

# Analyse Complexe

# TABLE DES MATIÈRES

# CHAPITRE 1

# FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Ce cours a pour objet principal les fonctions d'une variable complexe, c'est-à-dire les fonctions "de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$". Plus précisément on considèrera des fonctions définies sur un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, i.e. $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Tout comme pour les fonctions d'une variable réelle on s'intéressera aux notions de fonctions continues mais surtout dérivables, ainsi qu'à leurs propriétés. On reviendra également sur la notion de séries entières (avec variable complexe) qui joueront un rôle important. On s'intéressera enfin aux notions de primitive et d'intégrale d'une fonction le long d'un chemin inclus dans son ensemble de définition.

## 1.1 Topologie et convergence dans $\mathbb{C}$

Que ce soit pour parler de continuité, de dérivabilité ou de convergence de série, la notion de limite est présente. Egalement la "nature" de l'ensemble de définition peut être importante. C'est déjà le cas pour les fonctions réelles. Par exemple les théorèmes des valeurs intermédiaires et des accroissements finis ne sont vrais que si l'ensemble de définition est un *intervalle*. Egalement, pour étudier les extrema d'une fonction, si elle est continue sur un segment (plus généralement un *compact*) alors elle admet un minimum et un maximum. Inversement si elle est dérivable alors en un extremum sa dérivée s'annule à condition que l'ensemble de définition soit un *ouvert*. Dans cette section on commence par rapidement présenter quelques prérequis indispensables pour la suite. C'est l'adaptation à $\mathbb{C}$ de ce que vous avez vu dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$.

### 1.1.1 Module et distance

Afin de parler de convergence ou limite on a besoin d'avoir une notion de *distance* entre les éléments. Dans $\mathbb{R}$ la distance est obtenue à l'aide de la valeur absolue. Ici c'est simplement le module qui joue ce rôle. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ la distance entre $z_1$ et $z_2$ est, par définition, $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Ce qui traduit le fait qu'on ait une distance ce sont les trois propriétés suivantes :

1. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_2| = 0$ ssi $z_1 = z_2$, i.e. $d(z_1, z_2) = 0$ ssi $z_1 = z_2$,

2. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$, i.e. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$,
3. Pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$, i.e. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$. Cette inégalité est appelée *inégalité triangulaire.*

La dernière inégalité découle de $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (voir TD) avec $z = z_1 - z_2$ et $z' = z_2 - z_3$.

**Remarque 1.1.** *On identifie souvent $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (voir TD ainsi que la Section 1.3). Dans ce cas, en notant $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, on constate que $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ n'est rien d'autre que la distance euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^2$.*

### 1.1.2 Boules, ouverts et fermés

**Notation.** Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On note $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}$ le disque ouvert de centre $z_0$ et de rayon $r$. On note également $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq r\}$, resp. $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}$, le disque fermé, resp. le cercle, de centre $z_0$ et de rayon $r$.

**Définition 1.1.** *Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$, i.e. tel que $\Omega \subset \overline{D}(0, M)$.*

**Exercice 1.1.** *Montrer $\Omega$ est borné ssi il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que $\Omega \subset D(z_0, r)$.*

**Définition 1.2.** *$\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si pour tout $z \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \Omega$.*

**Définition 1.3.** *$F \subset \mathbb{C}$ est dit fermé si son complémentaire $\Omega = F^c = \mathbb{C} \setminus F$ est ouvert.*

**Remarque 1.2.** *Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{C}$ sont à la fois ouverts et fermés. Ce sont les seuls ensembles de $\mathbb{C}$ qui vérifient cette propriété.*

**Exercice 1.2.** *Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$ le disque $D(z_0, r)$ est ouvert.*

**Proposition 1.1.** *1. Toute réunion d'ensembles ouverts est un ouvert et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ouvert.*

*2. Toute intersection d'ensembles fermés est un fermé et toute réunion finie d'ensembles fermés est un fermé.*

**Exercice 1.3.** *Démontrer la proposition. C'est la même preuve que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.*

**Définition-Proposition 1.4.** *Soit $A \subset \mathbb{C}$.*

1. *Il existe un plus grand ouvert inclus dans $A$. On l'appelle intérieur de $A$, noté $\mathring{A}$. De plus $\mathring{A} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists r > 0,\ D(z, r) \subset A\}$.*
2. *Il existe un plus petit fermé contenant $A$. On l'appelle adhérence de $A$, notée $\overline{A}$. De plus $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \forall r > 0,\ D(z, r) \cap A \neq \emptyset\}$.*

**Définition 1.5.** *Soit $A \subset \mathbb{C}$. On dit que*

1. *$z \in A$ est un point isolé de $A$ s'il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \cap A = \{z\}$.*
2. *$A$ est un ensemble discret si tous ses points sont isolés.*
3. *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de $A$ si pour tout $r > 0$ on a $D(z, r) \cap A \neq \{z\}$ et $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$.*

**Remarque 1.3.** *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de $A$ si et seulement si $z \in \overline{A \setminus \{z\}}$.*

**Exemple 1.1.** *$A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ est discret et admet 0 comme unique point d'accumulation.*

**Exercice 1.4.** *Soit $\Omega$ un ouvert non-vide. Montrer que tout $z \in \Omega$ est un point d'accumulation de $\Omega$.*

### 1.1.3 Convergence de suites et séries

**Définition 1.6.** *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, noté $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

*Lorsqu'elle existe la limite est unique.*

**Remarque 1.4.** *La suite $(z_n)_n$ converge (dans $\mathbb{C}$) vers $\ell$ si et seulement si les suites $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ convergent (dans $\mathbb{R}$) respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$. Cela découle de l'encadrement*

$$\max(|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

Les propriétés qui suivent se montrent toutes exactement de la même façon que leurs analogues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Les preuves sont laissées à titre d'exercice.

**Proposition 1.2.** *Soient $(z_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$ et $\lim_{n\to\infty} w_n = \ell'$. Alors $\lim_{n\to\infty} \alpha z_n + w_n = \alpha\ell + \ell'$ et $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \ell\ell'$. Si de plus $w_n \neq 0$ pour tout $n$ et $\ell' \neq 0$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.*

**Proposition 1.3.** *Soit $F \subset \mathbb{C}$. L'ensemble $F$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(z_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$, si $(z_n)_n$ converge (dans $\mathbb{C}$) alors sa limite $\ell$ est dans $F$.*

**Proposition 1.4.** *Soit $A \subset \mathbb{C}$. $z \in \overline{A}$ ssi il existe $(z_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.*

**Corollaire 1.1.** *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de $A$ ssi il existe $(z_n)_n \in (A \setminus \{z\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$.*

**Définition 1.7.** *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum z_n$ converge si la suite $(Z_n)_n$ des sommes partielles, définies par $Z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, converge. On note alors $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sa limite appelée somme de la série.*

**Remarque 1.5.** *En utilisant $\mathrm{Re}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(z_k)$, $\mathrm{Im}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(z_k)$ ainsi que la Remarque 1.4 on vérifie que la série $\sum z_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ convergent. Dans ce cas on a $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.*

Dans certaines situations on n'a pas accès à la limite, c'est souvent le cas lorsqu'on étudie la convergence des séries, et la notion de suite de Cauchy joue alors un rôle important.

**Définition 1.8.** *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

**Théorème 1.1.** *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors la suite $(z_n)_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que $\mathbb{C}$ est complet.*

**Démonstration.** On vérifie facilement que $(z_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ sont de Cauchy. Le résultat découle alors de son analogue pour les suites réelles : les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ sont de Cauchy si et seulement si elles convergent. □

C'est ce résultat qui est à la base de la propriété importante ci-dessous, puisqu'elle permet de se ramener aux séries à termes réels positifs.

**Proposition 1.5.** *Si $\sum |z_n|$ converge alors $\sum z_n$ converge.*

**Démonstration.** Si $\sum |z_n|$ converge alors la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} |z_k|\right)_n$ converge donc est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > m \geq N,\ \left| \sum_{k=0}^{n} |z_k| - \sum_{k=0}^{m} |z_k| \right| = \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on prend $N$ comme ci-dessus. Pour tous $n > m \geq N$ on a

$$|Z_n - Z_m| = \left| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{m} z_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon.$$

La suite des sommes partielles $(Z_n)_n$ est donc de Cauchy et donc converge, i.e. $\sum z_n$ converge.

### 1.1.4 Compacité

**Définition 1.9.** *Une sous-suite, ou suite extraite, d'une suite $(z_n)_n$ est une suite $(z_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.*

**Proposition 1.6.** *Si la suite $(z_n)_n$ converge vers $\ell$ alors toute sous-suite de $(z_n)_n$ converge aussi vers $\ell$ (c'est comme dans $\mathbb{R}$).*

**Définition 1.10.** *On dit que $\ell$ est une valeur d'adhérence de la suite $(z_n)_n$ s'il existe une sous-suite de $(z_n)_n$ qui converge vers $\ell$.*

**Définition 1.11.** *Un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est dit compact si toute suite $(z_n)_n$ d'éléments de $K$ admet une sous-suite qui converge dans $K$. Autrement dit, quelle que soit $(z_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in K$ tels que $\lim_{n\to\infty} z_{\varphi(n)} = \ell$.*

**Proposition 1.7.** *$K \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

**Corollaire 1.2.** *Si $A \subset \mathbb{C}$ est borné alors $\overline{A}$ est compact.*

### 1.1.5 Connexité par arcs

La notion d'ensemble connexe par arcs, voir la Définition 1.13 ci-dessous, est assez intuitive. Essentiellement un ensemble est connexe par arcs s'il est "constitué d'un seul morceau". On peut voir cette notion comme l'analogue dans $\mathbb{C}$ de celle d'intervalle dans $\mathbb{R}$. On a besoin pour la définir de la notion de fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ que l'on retrouvera dans le Chapitre 4 quand on parlera d'intégrale le long d'un chemin.

**Définition 1.12.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est continue en $t_0 \in [a,b]$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall t \in [a,b],\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

*On dit que $f$ est continue sur $[a,b]$ si elle est continue en tout $t_0 \in [a,b]$.*

On peut facilement vérifier la propriété suivante.

**Proposition 1.8.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $t_0 \in [a,b]$. La fonction $f$ est continue en $t_0$, resp. sur $[a,b]$, si et seulement si les fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $\mathrm{Re}(f) : t \mapsto \mathrm{Re}\,(f(t))$ et $\mathrm{Im}(f) : t \mapsto \mathrm{Im}\,(f(t))$ sont continues en $t_0$, resp. sur $[a,b]$.*

**Remarque 1.6.** *L'image de $f$ est l'ensemble $\{f(t)\,|\,t \in [a,b]\}$. C'est un "chemin" dans $\mathbb{C}$ et l'idée de la continuité est que si $f$ est continue alors ce chemin est en un seul morceau.*

**Définition 1.13.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que $\Omega$ est connexe par arcs si pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ il existe un intervalle $[a,b]$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue telle que $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ et pour tout $t \in [a,b]$ on a $\gamma(t) \in \Omega$, autrement dit si n'importe quels points $z_1, z_2$ dans $\Omega$ peuvent être reliés par un chemin continu inclus dans $\Omega$.*

**Remarque 1.7.** *Dans la définition de connexe par arcs on suppose souvent que $[a,b] = [0,1]$. Ce n'est pas restrictif. En effet, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est comme dans la définition ci-dessus alors la fonction $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(a + u(b-a))$ est continue et vérifie $\tilde{\gamma}(0) = z_1$, $\tilde{\gamma}(1) = z_2$ et $\tilde{\gamma}(u) \in \Omega$ pour tout $u \in [0,1]$.*

**Exemple 1.2.** *1) Le segment d'extrêmités $z_1$ et $z_2$, noté $[z_1, z_2]$, peut être décrit par la fonction $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2$.*
*2) Le cercle de centre $z_0$ et de rayon $r$ peut être décrit par la fonction $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{it}$.*

**Définition 1.14.** *On appelle* domaine *de $\mathbb{C}$ tout ensemble ouvert et connexe par arcs.*

**Exercice 1.5.** *Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ le disque $D(z_0, r)$ est un domaine.*

On rencontre parfois des notions un peu plus fortes que connexes par arcs.

**Définition 1.15.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que*

1. *$\Omega$ est convexe si pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ on a $[z_1, z_2] \subset \Omega$.*
2. *$\Omega$ est étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ on a $[z_0, z] \subset \Omega$.*

**Proposition 1.9.** *Un ensemble convexe est étoilé et un ensemble étoilé est connexe par arcs.*

**Exercice 1.6.** *Démontrez la proposition ci-dessus.*

## 1.2 Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

### 1.2.1 Notion de limite

**Définition 1.16.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $f$ tend vers $\ell$ lorsque $z$ tend vers $a$, noté $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall z \in \Omega,\ |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

**Proposition 1.10.** *Lorsqu'elle existe la limite est unique.*

**Remarque 1.8.** *La condition $a \in \overline{\Omega}$ assure que quelque soit $\delta > 0$ l'ensemble $\{z \in \Omega \,|\, |z-a| < \delta\}$ n'est pas vide. C'est cela qui permet de garantir l'unicité de la limite, si elle existe.*

On a bien entendu toutes les propriétés usuelles sur les limites (somme, produit, quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas et a une limite non nulle, composée lorsque c'est possible). Cela peut se montrer facilement à l'aide de la proposition suivante.

**Proposition 1.11.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \ell$ si et seulement si*

$$\forall (z_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}, \ \lim_{n\to\infty} z_n = a \ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \ell.$$

A partir de la notion de limite on définit facilement les notions de fonctions continues et de fonctions dérivables comme on le fait dans $\mathbb{R}$. Les propriétés de base sont alors les même que dans $\mathbb{R}$ et se montrent exactement de la même façon.

### 1.2.2 Continuité

**Définition 1.17.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. La fonction $f$ est continue en $z_0$ si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Elle est continue sur $\Omega$ si elle est continue en tout $z_0 \in \Omega$.*

En utilisant la Proposition 1.11 on montre facilement les propriétés usuelles.

**Proposition 1.12.** *1) Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ continues et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et $fg$ sont continues. Si de plus $g$ ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.*

*2) Soient $f : \Omega_f \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \to \mathbb{C}$ continues et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est continue sur $\Omega_f$.*

**Exemple 1.3.** *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{C}$. De même pour les fonctions $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$, $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto |z|^2$. Si $P$ et $Q$ sont deux fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$. On rappelle que si $Q$ est de degré $n$ il possède au plus $n$ racines, i.e. l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$ a au plus $n$ éléments.*

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les principaux théorèmes que vous avez vus concernant les fonctions continues sont : le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que toute fonction continue sur un segment soit bornée et atteigne ses bornes, i.e. elle admet un minimum et un maximum. Ici cela ne peut plus avoir de sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ : si $z, z'$ sont deux nombres complexes arbitraires que signifie $z \leq z'$ ? On a par contre la généralisation suivante du second résultat.

**Théorème 1.2.** *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $f : K \to \mathbb{C}$ continue. Alors l'ensemble $f(K)$ est compact. En particulier il est borné, i.e. il existe $M$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in K$. De plus la fonction $|f| : K \to \mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum sur $K$.*

**Démonstration.** Soit $(w_n)_n \in (f(K))^{\mathbb{N}}$. On veut montrer que $(w_n)_n$ admet une sous-suite qui converge dans $f(K)$, i.e. il existe une sous-suite $(w_{\varphi(n)})_n$ et $w \in f(K)$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} w_{\varphi(n)} = w$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition, il existe $z_n \in K$ tel que $w_n = f(z_n)$. La suite $(z_n)_n$ ainsi construite est dans $K$ qui est compact donc elle admet une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers un certain $z \in K$. Comme $f$ est continue, la suite de terme général $f(z_{\varphi(n)}) = w_{\varphi(n)}$ converge vers $w = f(z) \in f(K)$. La suite $(w_n)_n$ possède donc bien une sous-suite convergente dans $f(K)$, ce qui prouve que $f(K)$ est compact.

Le même raisonnement appliqué à la fonction continue $|f| : K \to \mathbb{R}$ (c'est une composée de fonctions continues) montre que l'ensemble $|f|(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$ donc en particulier il est fermé. Soit $M := \sup\limits_{z\in K} |f(z)|$. On sait que $M$ est fini puisque $f$ est bornée, on va montrer que $M$ est atteint. Comme $M := \sup\limits_{z\in K} |f(z)|$ il existe $(w_n)_n$, $w_n = |f(z_n)|$, dans $|f|(K)$ telle que $w_n \to M$. Comme $|f|(K)$ est fermé on a $M \in |f|(K)$, i.e. il existe $z_M \in K$ tel que $|f(z_M)| = |f|(z_M) = M$. La fonction $|f|$ admet donc bien un maximum. Le même raisonnement montre que $|f|$ admet aussi un minimum. $\square$

### 1.2.3 Dérivabilité

Pour parler de dérivabilité on va maintenant supposer que $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

**Définition 1.18.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$.*

1. *On dit que $f$ est dérivable en $z_0$ si la limite $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe (dans $\mathbb{C}$). On notera alors $f'(z_0)$ cette limite.*
2. *On dit que $f$ est dérivable, ou* holomorphe, *sur $\Omega$ si $f$ est dérivable en tout $z_0 \in \Omega$.*
3. *On dit que $f$ est une fonction* entière *si $f$ est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C}$.*
4. *On dit que $f$ est de classe $C^1$ si elle est dérivable et si la fonction $f' : z \mapsto f'(z)$ est continue. Par récurrence elle est $C^k$, $k \geq 2$, si elle est $C^{k-1}$ et si $f^{(k-1)}$ est $C^1$. Elle est $C^\infty$ si elle est $C^k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.*

**Remarque 1.9.** *De façon équivalente $f$ est dérivable en $z_0$ si la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$. Attention ici $h$ est complexe !! La limite est alors $f'(z_0)$.*

On peut également reformuler la définition de dérivable de la façon suivante : $f$ est dérivable en $z_0$ de dérivée $f'(z_0)$ si et seulement si au voisinage de $z_0$ on a

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|). \tag{1.1}$$

Les propriétés suivantes se montrent alors comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Proposition 1.13.** *1. Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et $fg$ sont holomorphes et on a, pour tout $z_0 \in \Omega$,*

$$(f + \lambda g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda g'(z_0) \quad \text{et} \quad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

*Si de plus $g$ ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe et on a, pour tout $z_0 \in \Omega$,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

*2. Soient $f : \Omega_f \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \to \mathbb{C}$ holomorphes et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est holomorphe sur $\Omega_f$ et on a $(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \times g' \circ f(z_0)$ pour tout $z_0 \in \Omega_f$.*

**Exercice 1.7.** *Montrez la proposition ci-dessus.*

**Exemple 1.4.** *1) Les fonctions polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Si $P$ et $Q$ sont deux fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,|\, Q(z) = 0\}$.*
*2) La fonction définie par $f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Pour tout $h \neq 0$ on a $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \dfrac{\bar{h}}{h}$. Si $h$ est réel on a donc $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = 1 \to 1$ lorsque $h \to 0$. Par contre si $h$ est imaginaire pur on a $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = -1 \to -1$ lorsque $h \to 0$. La limite $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ n'existe donc pas, donc $f$ n'est pas dérivable en $z_0$.*
*3) La fonction définie par $g(z) = |z|^2$ n'est dérivable qu'en $z_0 = 0$. En effet si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $h \neq 0$ on a*

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{|z_0+h|^2 - |z_0|^2}{h} = \frac{z_0\bar{h} + \overline{z_0}h + |h|^2}{h} = z_0\frac{\bar{h}}{h} + \overline{z_0} + \bar{h}.$$

*Les deux derniers termes ont une limite lorsque $h$ tend vers $0$. Par contre on a vu que $\frac{\bar{h}}{h}$ n'avait pas de limite, donc le premier terme n'a pas de limite sauf si $z_0 = 0$. Conclusion $f$ n'est pas dérivable sauf en $0$ où on a $f'(0) = 0$.*

**Exercice 1.8.** *Etudier la dérivabilité des fonctions $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$.*

**Définition 1.19.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $F$ est une primitive de $f$ sur $\Omega$ si $F$ est holomorphe sur $\Omega$ et vérifie $F' = f$.*

**Exemple 1.5.** *Si $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = z^m$ admet pour primitive sur $\mathbb{C}^*$ la fonction $F(z) = \frac{1}{m+1} z^{m+1}$. On verra plus loin que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive <u>sur $\mathbb{C}^*$</u>.*

Bien qu'à première vue tout semble similaire à ce qu'on fait dans $\mathbb{R}$ on va voir qu'il n'en est rien et que le fait de prendre des (limites de) taux d'accroissements dans $\mathbb{C}$ a de grosses conséquences :

1. il va être beaucoup plus difficile à une fonction d'être dérivable dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto |x|^2$ par exemple est dérivable dans $\mathbb{R}$ mais on a vu que $z \mapsto |z|^2$ n'était pas dérivable dans $\mathbb{C}$.
   En parlant de fonctions non-dérivables, on a vu que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ était continue sur $\mathbb{C}$ mais dérivable nul part. Essayez de construire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit continue partout mais dérivable nul part... C'est faisable, mais beaucoup plus difficile.
2. les fonctions dérivables auront beaucoup de propriétés qui ne sont pas forcément vraies dans $\mathbb{R}$. La plus frappante au début est sûrement le fait qu'une fonction holomorphe sera automatiquement $C^\infty$ (et même mieux).
3. les fonctions continues n'ont pas forcément de primitive. C'est un peu relié au point précédent : si $f$ a une primitive alors il existe $F$ holomorphe telle que $F' = f$. Donc, d'après ce qu'on a dit dans le point précédent, $F$ sera $C^\infty$ et donc $f$ aussi. En particulier $f$ sera holomorphe. Conclusion : seules les fonctions holomorphes sur $\Omega$ peuvent avoir une primitive sur $\Omega$. Attention on ne dit pas que toutes les fonctions holomorphes sur $\Omega$ ont une primitive sur $\Omega$. Ce sera par exemple le cas de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

## 1.3 Dérivabilité dans $\mathbb{C}$ - Différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$

Comme indiqué dans la Section 1.1.1 on identifie souvent $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ via l'application $J : \mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ il est alors naturel de se demander s'il y a une différence entre considérer $f$ comme fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ou comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, i.e. considérer la fonction $\tilde{f} = J \circ f \circ J^{-1} : (x, y) \mapsto (\mathrm{Re}(f(x+iy)), \mathrm{Im}(f(x+iy)))$ définie sur $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + iy \in \Omega\}$. Comme on l'a remarqué, la distance dans $\mathbb{C}$ donnée à l'aide du module correspond à la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. On peut donc a priori s'attendre à ce que tout se passe dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}^2$. Concernant la continuité cette idée est correcte.

**Proposition 1.14.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. $f$ est continue en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si et seulement $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ est continue en $(x_0, y_0)$.*

**Remarque 1.10.** *La fonction $\tilde{f}$ est une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. La notion de continuité est bien entendu celle que vous avez vue en L2.*

**Exercice 1.9.** *Démontrez la proposition ci-dessus. Il suffit d'écrire les deux définitions "$f$ est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$" et "$\tilde{f}$ est continue en $(x_0, y_0)$".*

On va voir dans cette section que ce qui est vrai pour la continuité ne l'est plus en ce qui concerne la dérivabilité et qu'il est plus "difficile" pour une fonction d'être dérivable vue comme fonction dans $\mathbb{C}$ que comme fonction dans $\mathbb{R}^2$.

On rappelle (voir le cours de Fonctions de Plusieurs Variables du S3) que pour des fonctions de deux variables l'analogue de la dérivabilité est la différentiabilité : si $U \subset \mathbb{R}^2$, $g : U \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$ alors $g$ est différentiable en $(x_0, y_0)$ si

1. les dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent,
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{g(x, y) - g(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$

La seconde condition peut se réécrire

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0) + o\left(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|\right). \quad (1.2)$$

Une condition suffisante pour que $g$ soit différentiable est que les deux dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ existent et soient des fonctions continues (on dit que $g$ est $C^1$). Lorsque $g = (P, Q)$ est une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ elle est différentiable, resp. $C^1$, si et seulement si les deux fonctions $P$ et $Q$ sont différentiables, resp. $C^1$. En particulier si les deux fonctions $P$ et $Q$ sont des fonctions polynômes alors $g$ est de classe $C^1$ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

**Exemple 1.6.** *1) Soit $f_1$ définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = \bar{z}$. Alors $\tilde{f}_1(x, y) = (x, -y)$ est évidemment $C^1$, et donc différentiable, puisque les deux fonctions $P_1(x, y) = x$ et $Q_1(x, y) = -y$ sont des fonctions polynômes. Pourtant on a vu que $f_1$ n'était pas dérivable au sens complexe.*

*2) Soit $f_2$ définie sur $\mathbb{C}$ par $f_2(z) = |z|^2$. Alors $\tilde{f}_2(x, y) = (x^2 + y^2, 0)$ est aussi $C^1$ puisque les deux fonctions $P_2(x, y) = x^2 + y^2$ et $Q_2(x, y) = 0$ sont à nouveau des fonctions polynômes. De même on a vu que $f_2$ n'était pas dérivable au sens complexe, sauf en 0.*

Comme le montre l'exemple ci-dessus on peut trouver des fonctions très simples qui sont dérivables / différentiables en tant que fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ mais dont pourtant les fonctions correspondantes $f_1$ et $f_2$ ne sont pas dérivables comme fonctions vues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Dans la suite de cette section on va chercher à comprendre quel est le lien entre différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et dérivable dans $\mathbb{C}$.

Etant donnée $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on notera $P(x, y) = \mathrm{Re}(f(x + iy))$ et $Q(x, y) = \mathrm{Im}(f(x + iy))$ de façon à ce que $\tilde{f} = (P, Q)$. En utilisant (1.2) on voit que la fonction $\tilde{f}$ est différentiable en $(x_0, y_0)$ si les quatre dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en ce point et si

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0,y_0) \\ Q(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\|(x,y) - (x_0,y_0)\|\right). \tag{1.3}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de $\tilde{f} = (P, Q)$ au point $(x_0, y_0)$. Si on note $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A$ ($\Phi$ est ce qu'on appelle la différentielle de $\tilde{f}$ au point $(x_0, y_0)$ habituellement notée $D\tilde{f}(x_0, y_0)$), l'identité (1.3) s'écrit

$$\begin{array}{rrcl} & \tilde{f}(x,y) & = & \tilde{f}(x_0,y_0) + \Phi(x - x_0, y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \\ \Longleftrightarrow & f(z) & = & f(z_0) + J^{-1} \circ \Phi \circ J(z - z_0) + o(|z - z_0|). \end{array}$$

Si on compare avec (1.1) on constate que $f$ sera dérivable en $z_0$ pourvu qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $J^{-1} \circ \Phi \circ J(z - z_0) = \lambda \times (z - z_0)$ i.e. que l'application $J^{-1} \circ \Phi \circ J$ soit $\underline{\mathbb{C}\text{-linéaire}}$. On aura alors $\lambda = f'(z_0)$. Cela impose des conditions sur la matrice $A$ (voir TD) et donc sur les dérivées partielles de $P$ et $Q$, à savoir

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0).$$

**Lemme 1.1.** *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ alors les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en $(x_0, y_0)$ et on a*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) = \mathrm{Re}(f'(z_0)) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = -\mathrm{Im}(f'(z_0)). \tag{1.4}$$

**Démonstration.** On traite le cas de la fonction $P$, celui de $Q$ est laissé à titre d'exercice. Pour $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x_0 + h, y_0) \in \tilde{\Omega}$ on a, en utilisant la continuité de la fonction $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{P(x_0 + h, y_0) - P(x_0, y_0)}{h} & = & \dfrac{\mathrm{Re}(f(z_0 + h)) - \mathrm{Re}(f(z_0))}{h} \\ & \overset{h \in \mathbb{R}}{=} & \mathrm{Re}\left(\dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}\right) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(f'(z_0)), \end{array}$$

ce qui prouve que $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe et vaut $\mathrm{Re}(f'(z_0))$.

De même pour $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x_0, y_0 + h) \in \tilde{\Omega}$ on a, en utilisant cette fois la continuité de la fonction $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$,

$$\begin{aligned}\frac{P(x_0, y_0 + h) - P(x_0, y_0)}{h} &\overset{h\in\mathbb{R}}{=} \mathrm{Re}\left(\frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h}\right) \\ &= -\mathrm{Im}\left(\frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}\right) \overset{h\to 0}{\longrightarrow} -\mathrm{Im}(f'(z_0)),\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$ existe et vaut $-\mathrm{Im}(f'(z_0))$. □

**Notation.** On note en général $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x + iy) := \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x + iy) := \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) + i\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$. La notation est naturelle puisque $P$ et $Q$ représentent les parties réelles et imaginaires de $f$, la seule différence étant que $f$ est définie sur $\mathbb{C}$ tandis que $P$ et $Q$ le sont sur $\mathbb{R}^2$. En utilisant l'application $J$ qui identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ on a en fait simplement $\dfrac{\partial f}{\partial x} = J^{-1} \circ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \circ J$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = J^{-1} \circ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \circ J$.

Avec cette notation le Lemme 1.1 s'écrit : si $f$ est dérivable en $z_0$ alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ existent et on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0)$.

**Proposition 1.15.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. $f$ est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en $(x_0, y_0)$ avec*

$$i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \iff \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{1.5}$$

*Ces deux égalités s'appellent les conditions de Cauchy-Riemann. Dans ce cas on a*

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

**Démonstration.** Supposons que $f$ est dérivable en $z_0$. D'après le Lemme 1.1 les dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ existent en $(x_0, y_0)$. Si $z = x + iy \in \Omega$ on a, d'après (1.4),

$$\begin{aligned}& P(x, y) - P(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0) \\ = \ & \mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(z_0)) - \mathrm{Re}(f'(z_0)) \times \mathrm{Re}(z - z_0) + \mathrm{Im}(f'(z_0)) \times \mathrm{Im}(z - z_0) \\ = \ & \mathrm{Re}(f(z)) - \mathrm{Re}(f(z_0)) - \mathrm{Re}\left(f'(z_0)(z - z_0)\right) \\ = \ & \mathrm{Re}\big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}& \left|P(x, y) - P(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\right| \\ = \ & \big|\mathrm{Re}\big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)\big| \\ \leq \ & |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| && \text{car } |\mathrm{Re}(w)| \leq |w| \text{ pour tout } w \in \mathbb{C} \\ = \ & o(|z - z_0|) && \text{car } f \text{ est dérivable en } z_0 \\ = \ & o\left(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|\right),\end{aligned}$$

ce qui prouve que $P$ est différentiable en $(x_0, y_0)$. Le raisonnement est le même pour $Q$ en remplaçant Re par Im.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose que $P$ et $Q$ sont différentiables en $(x_0, y_0)$ et que (1.5) est vérifiée. On a alors, pour $z = x + iy \in \Omega$ et en utilisant (1.5),

$$\begin{aligned}
f(z) &= P(x,y) + iQ(x,y) \\
&= P(x_0,y_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&\quad + iQ(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|\right) \\
&= f(z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(z-z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(z-z_0) + o(|z-z_0|),
\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$ existe, i.e. $f$ est dérivable en $z_0$ avec

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0),$$

où on utilise à nouveau (1.5) pour obtenir la dernière égalité. □

**Remarque 1.11.** *Lorsque* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *existent on utilise également les notations suivantes :*

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

*La proposition ci-dessus peut alors se traduire sous la forme : $f$ est dérivable en $z_0$ si et seulement si $\tilde f$ est différentiable en $z_0$ avec de plus $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$. Dans ce cas $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.*

Comme une fonction holomorphe est différentiable si on la voit comme fonction sur $\mathbb{R}^2$ toutes les propriétés valables pour les fonctions différentiables sont vraies pour les fonctions holomorphes. On utilisera la propriété suivante qui est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis (voir le cours de fonctions de plusieurs variables de L2 et le cours de calcul différentiel du S6). On en donnera une autre preuve dans la Section 3.4.

**Proposition 1.16.** *Si $\Omega$ est un domaine de $\mathbb{C}$, i.e. un ouvert connexe par arcs, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe de dérivée nulle alors $f$ est constante.*

**Remarque 1.12.** *Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ le résultat analogue repose aussi sur les accroissements finis et n'est vrai que pour les fonctions définies sur un intervalle. L'hypothèse "intervalle" est ici remplacée par "connexe par arcs" : l'ensemble de définition doit être en un seul morceau.*

**Remarque 1.13.** *Les conditions de Cauchy-Riemann peuvent paraitre anodines au premier abord mais ont en fait de grosses conséquences. Si une fonction $f$ est holomorphe alors il y a un lien très fort entre ses parties réelles et imaginaires (c'est ce que disent les conditions de Cauchy-Riemann). On peut par exemple montrer (voir TD) que si une fonction holomorphe sur un domaine $\Omega$ est à valeurs réelles (sa partie imaginaire est donc constante égale à zéro) alors cette fonction est constante.*

# CHAPITRE 2

# FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE ENTIÈRE

Les seuls exemples de fonctions dérivables dans $\mathbb{C}$ qu'on a vus jusqu'ici sont ceux des fonctions polynômes et des quotients de fonctions polynômes. Afin d'enrichir cette “collection” de fonctions dérivables l'étape naturelle suivante est d'essayer les polynômes de “degré infini”, autrement dit les fonctions définies par des séries entières.

## 2.1 Suites et séries de fonctions de la variable complexe

Certains des résultats que vous avez vus en L2 sur les suites et séries de fonctions d'une variable réelle se généralisent facilement au cas des fonctions d'une variable complexe. On les utilisera par la suite surtout dans le cadre des séries entières.

**Définition 2.1.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que*

1. *$(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si pour tout $z \in \Omega$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$.*
2. *$(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$.*

La convergence uniforme implique bien entendu la convergence simple. Son intérêt se trouve par exemple dans la propriété suivante.

**Proposition 2.1.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\Omega$ alors sa limite $f$ est continue sur $\Omega$.*

**Démonstration.** Soit $z_0 \in \Omega$. Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $z \in \Omega$ vérifie $|z - z_0| < \delta$ alors $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= |(f(z) - f_n(z)) + (f_n(z) - f_n(z_0)) + (f_n(z_0) - f(z_0))| \\
&\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\
&\leq 2 \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)|.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $\sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pour ce $N$ on a donc pour tout $z \in \Omega$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_N(z) - f_N(z_0)|.$$

Puisque $f_N$ est continue il existe $\delta > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta$ alors $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Finalement pour tout $z$ tel que $|z - z_0| < \delta$ on a $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ce qui prouve que $f$ est continue en $z_0$. C'est vrai pour tout $z_0 \in \Omega$ donc $f$ est continue sur $\Omega$. □

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, même à valeurs complexes, on a également le résultat suivant sur l'interversion limite/intégrale.

**Proposition 2.2.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$ alors $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

**Remarque 2.1.** *1. La convergence uniforme garantit que $f$ est continue donc l'intégrale de $f$ a un sens.*

*2. La convergence de la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$ fait partie du résultat.*

*3. Lorsque la convergence n'est pas uniforme, mais qu'on a juste convergence simple, les deux propriétés ci-dessus (continuité de la limite et interversion limite / intégrale) sont fausses (voir cours de L2).*

**Démonstration.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq \left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \leq (b-a) \times \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$$

et le résultat découle de la convergence uniforme et du théorème des gendarmes. □

**Remarque 2.2.** *Dans le cas des fonctions d'une variable réelle vous avez également vu un résultat concernant la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions. Les choses sont un peu différentes (et en fait plus simples) pour les fonctions d'une variable complexe, voir la Section 4.5.2.*

Dans la suite on utilisera les résultats précédents surtout dans le cadre des séries de fonctions.

**Définition 2.2.** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que*

1. *la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_n$ converge simplement vers $f$. On notera alors $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.*
2. *la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_n$ converge uniformément vers $f$, i.e. si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Omega} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| = 0.$$

3. *la série* $\sum f_n$ *converge normalement s'il existe* $(\alpha_n)_n$ *telle que* $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ *pour tout* $z \in \Omega$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$ *et telle que* $\sum \alpha_n$ *converge. De façon équivalente,* $\sum f_n$ *converge normalement si la série numérique de terme général* $\sup_{z\in\Omega} |f_n(z)|$ *converge.*

**Proposition 2.3.** *Si la série* $\sum f_n$ *converge normalement alors elle converge uniformément. En particulier*

1. *si les* $f_n$ *sont continues sur* $\Omega$ *alors la fonction définie par* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *est continue sur* $\Omega$.
2. *si les* $f_n$ *sont définies et continues sur un intervalle* $[a, b]$ *alors* $f$ *est continue et* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

**Démonstration.** Soit $(\alpha_n)_n$ telle que $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\sum \alpha_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, pour tout $z \in \Omega$ la série $\sum |f_n(z)|$ converge donc, d'après la Proposition 1.5, la série $\sum f_n(z)$ converge. La fonction $f = \sum f_n$ est donc bien définie. De plus, pour tous $m > n$ et tout $z \in \Omega$ on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k.$$

En passant à la limite $m \to \infty$ on a ainsi, pour tout $z \in \Omega$, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$ et donc $\sup_{z\in\Omega} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$. Le membre de droite est le reste d'une série convergente donc tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini. On en déduit la convergence uniforme de $\sum f_n$ à l'aide du théorème des gendarmes.

Les deux autres propriétés découlent directement de la convergence uniforme et des Propositions 2.1 et 2.2 appliquées à la suite des sommes partielles. $\square$

## 2.2 Séries entières

**Définition 2.3.** *On appelle série entière toute série de fonctions de la forme* $\sum a_n z^n$ *où* $z$ *est une variable complexe et* $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

**Définition 2.4.** *On appelle rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *la quantité*

$$R := \sup\{r \geq 0 \,|\, \textit{la suite } (a_n r^n)_n \textit{ est bornée}\} \in [0, +\infty].$$

$D(0, R)$ *est appelé disque de convergence de la série entière.*

**Remarque 2.3.** $R$ *est bien défini car l'ensemble* $\{r \geq 0 \,|\, \textit{la suite } (a_n r^n)_n \textit{ est bornée}\}$ *est non-vide (il contient* $0$*). Si* $R = +\infty$ *on a simplement* $D(0, R) = \mathbb{C}$.

**Remarque 2.4.** *Si* $0 \leq r_1 \leq r_2$ *et* $(a_n r_2^n)_n$ *est bornée alors* $(a_n r_1^n)_n$ *est aussi bornée. Par conséquent la suite* $(a_n r^n)_n$ *est bornée pour tout* $r < R$.

La terminologie rayon de convergence est justifiée par le résultat suivant.

**Proposition 2.4.** *Soit $R$ le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc convergente.*
2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.*

**Remarque 2.5.** *La proposition montre qu'on pourrait définir de façon équivalente le rayon de convergence par $R = \sup\{r \geq 0 \,|\, \text{la série } \sum a_n r^n \text{ converge}\}$. On a également les propriétés parfois utiles suivantes qui découlent directement de 1. et 2. : si $z \in \mathbb{C}$ est tel que la série $\sum a_n z^n$ diverge alors $R \leq |z|$ tandis que si la série $\sum a_n z^n$ converge alors $R \geq |z|$.*

**Démonstration.** 1. Si $R = 0$ il n'y a rien à prouver, on suppose donc $R \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Soit $r$ tel que $|z| < r < R$. Par définition de $R$ la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout $n$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| = |a_n r^n| \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

Comme $\dfrac{|z|}{r} < 1$ la série $\sum M \left(\dfrac{|z|}{r}\right)^n$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |a_n z^n|$ converge.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Par définition de $R$ la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée donc ne tend pas vers 0. Nécessairement la série $\sum a_n z^n$ diverge. □

Le domaine de convergence de la série entière est donc essentiellement déterminé par son rayon de convergence : elle converge sur $D(0,R)$ et diverge en dehors de $\overline{D}(0,R)$. Par contre le théorème précédent ne dit rien sur la convergence de la série lorsque $|z| = R$.

**Exemple 2.1.** *Les séries entières $\sum z^n$, $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ et $\sum \frac{1}{n} z^n$ ont toutes les trois rayon de convergence $R = 1$. La première diverge pour tout $z \in C(0,1)$, la deuxième converge pour tout $z \in C(0,1)$ et on vérifie facilement que la troisième diverge si $z = 1$ et converge si $z = -1$ (on peut en fait montrer qu'elle converge pour tout $z \in C(0,1) \setminus \{1\}$).*

La somme d'une série entière est une fonction $f$ définie a priori sur l'ouvert $D(0,R)$. Afin d'étudier les propriétés de $f$ le résultat suivant jouera un rôle crucial.

**Proposition 2.5.** *Pour tout $r < R$ la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$. En particulier la fonction $f$ définie sur $D(0,R)$ par $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue.*

**Démonstration.** L'idée de la preuve est similaire à celle de la Proposition 2.4. Soit $r < R$ et $\rho$ tel que $r < \rho < R$. Par définition de $R$ la suite $(a_n \rho^n)_n$ est bornée, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n \rho^n| \leq M$ pour tout $n$. Pour tout $z \in \overline{D}(0,r)$ on a

$$|a_n z_n| = |a_n \rho^n| \times \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Comme $\dfrac{r}{\rho} \in ]0,1[$ la série $\sum M \left(\dfrac{r}{\rho}\right)^n$ converge et donc la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

En utilisant la Proposition 2.3 on en déduit que $f$ est continue sur $D(0,r)$ pour tout $r < R$ et donc sur $D(0,R)$. En effet, si $z_0 \in D(0,R)$ il existe $r$ tel que $|z_0| < r < R$. En particulier $z_0 \in D(0,r)$ et comme $f$ est continue sur $D(0,r)$ elle est continue en $z_0$. $\square$

Les critères suivants donnent deux moyens de calculer le rayon de convergence. Ils découlent des critères de D'Alembert et de Cauchy pour les séries numériques à termes positifs.

**Proposition 2.6** (Règle de D'Alembert)**.** *On suppose que $a_n \neq 0$ pour $n$ assez grand. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$ (éventuellement $\ell = +\infty$) alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$, avec la convention $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$.*

**Proposition 2.7** (Règle de Cauchy)**.** *Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \ell$ (éventuellement $\ell = +\infty$) alors la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R = \frac{1}{\ell}$, avec les mêmes conventions que ci-dessus.*

**Remarque 2.6.** *Dans la règle de Cauchy on peut remplace* $\lim$ *par* $\limsup$. *Cette dernière a l'avantage de toujours exister contrairement à la limite. On parle alors de règle d'Hadamard (ou de Cauchy-Hadamard).*

**Démonstration.** On montre la règle de D'Alembert, celle de Cauchy se montre de la même manière et est laissée à titre d'exercice.

On suppose donc que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Si $z = 0$ la série $\sum a_n z^n$ converge. Soit donc $z \neq 0$. On a alors

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \times |z| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell|z|.$$

Pour tout $z$ tel que $\ell|z| < 1$ la série converge (règle de D'Alembert pour les séries numériques) et donc $R \geq |z|$. Ainsi $R \geq \sup\{|z| \,|\, \ell|z| < 1\} = \dfrac{1}{\ell}$. Inversement pour tout $z$ tel que $\ell|z| > 1$ la série diverge donc $R \leq |z|$. Ainsi $R \leq \inf\{|z| \,|\, \ell|z| > 1\} = \dfrac{1}{\ell}$. Au final on a bien $R = \frac{1}{\ell}$. $\square$

**Remarque 2.7.** *Ces règles sont souvent utilisées dans la pratique. Il est cependant parfois plus simple de revenir à la définition du rayon de convergence. Par exemple, la série $\sum z^{n^2}$ a pour rayon de convergence* 1*. Notez qu'ici la suite $a_n$ est définie par $a_n = 1$ si $n$ est un carré et $a_n = 0$ sinon, on ne pourra donc même pas essayer d'appliquer la règle de D'Alembert pour les séries entières.*

Les propriétés générales suivantes s'intéressent à la somme et au produit de séries entières.

**Proposition 2.8.** *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note $f$ et $g$ les sommes de ces séries sur leur disque de convergence respectif. Alors le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum (a_n + \lambda b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ et sur $D(0, \min\{R_a, R_b\})$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) z^n = f(z) + \lambda g(z)$.*

**Démonstration.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, donc la série de terme général $(a_n + \lambda b_n) z^n = a_n z^n + \lambda b_n z^n$ converge et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+\lambda b_n)z^n = f(z)+\lambda g(z)$. Cela prouve, voir la Remarque 2.5, que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ vérifie $R \geq |z|$. Comme c'est vrai pour tout $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ on en déduit que $R \geq \min\{R_a, R_b\}$. $\square$

**Remarque 2.8.** *1. On peut avoir $R > \min\{R_a, R_b\}$. Il suffit de prendre $a_n = -b_n = 1$ pour tout $n$ et $\lambda = 1$. On aura alors $R_a = R_b = 1$ tandis que $a_n - b_n = 0$ et donc $R = +\infty$.*
*2. Si $R_a \neq R_b$ alors le rayon de la série $\sum(a_n+b_n)z^n$ est $R = \min\{R_a, R_b\}$. Prenons le cas $R_a < R_b$. Si $R_a < |z| < R_b$ la série $\sum a_n z^n$ diverge tandis que $\sum b_n z^n$ converge et donc $\sum(a_n+b_n)z^n$ diverge. On en déduit que $R \leq |z|$ (voir la Remarque 2.5). C'est vrai pour tout $R_a < |z| < R_b$ et donc $R \leq R_a$. Combiné avec la proposition ci-dessus on en déduit que $R = R_a = \min\{R_a, R_b\}$.*

Afin d'étudier le produit de séries entières on aura besoin du résultat suivant.

**Proposition 2.9.** *Soit $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum\limits_n \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ soient absolument convergentes. Alors la série de terme général $\gamma_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k}$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\right). \tag{2.1}$$

*La série $\sum\gamma_n$ est appelée produit de Cauchy des séries $\sum\alpha_n$ et $\sum\beta_n$.*

**Remarque 2.9.** *Si seulement l'une des deux séries $\sum\alpha_n$ ou $\sum\beta_n$ est absolument convergente et que l'autre est convergente mais pas absolument alors on peut montrer que $\sum\gamma_n$ est convergente (mais pas absolument) et que (2.1) reste vraie. Si par contre aucune des deux séries $\sum\alpha_n$ et $\sum\beta_n$ n'est supposée absolument convergente, tout en étant toutes les deux convergentes, il se peut que la série $\sum\gamma_n$ diverge (voir TD).*

**Démonstration.** Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}|\gamma_n| &\leq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k|\times|\beta_{n-k}|\right) && \text{Inégalité triangulaire}\\
&= \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}|\alpha_k|\times|\beta_{n-k}| && \text{Interversion des sommes sur } n \text{ et } k\\
&= \sum_{k=0}^{N}\left(|\alpha_k|\times\sum_{n=k}^{N}|\beta_{n-k}|\right) &&\\
&= \sum_{k=0}^{N}\left(|\alpha_k|\times\sum_{j=0}^{N-k}|\beta_j|\right) && \text{Décalage d'indice}\\
&\leq \sum_{k=0}^{N}\left(|\alpha_k|\times\sum_{j=0}^{\infty}|\beta_j|\right) && \text{Termes positifs}\\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|\times\sum_{j=0}^{\infty}|\beta_j|. && \text{Termes positifs}
\end{aligned}$$

La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N}|\gamma_n|\right)_N$ est donc bornée. On en déduit que la série $\sum|\gamma_n|$ converge (car c'est une série à termes positifs).

On montre maintenant (2.1). Pour tout $N\in\mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\beta_n\right)-\sum_{k=0}^{N}\gamma_n\right| &= \left|\sum_{n,m=0}^{N}\alpha_n\beta_m-\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{k}\alpha_n\beta_{k-n}\right| \\
&= \left|\sum_{n,m=0}^{N}\alpha_n\beta_m-\sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{0\le n,m\le N\\ n+m=k}}\alpha_n\beta_m\right| \\
&= \left|\sum_{0\le n,m\le N}\alpha_n\beta_m-\sum_{\substack{0\le n,m\le N\\ n+m\le N}}\alpha_n\beta_m\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{0\le n,m\le N\\ n+m>N}}\alpha_n\beta_m\right| \\
&\le \sum_{\substack{0\le n,m\le N\\ n+m>N}}|\alpha_n|\times|\beta_m| \qquad \text{Inégalité triangulaire} \\
&\le \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n+m>N}}|\alpha_n|\times|\beta_m| \qquad \text{Termes positifs} \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|\times|\beta_{k-n}|.
\end{aligned}$$

Le membre de droite est le reste de la série de terme général $u_k=\sum_{n=0}^{k}|\alpha_n|\times|\beta_{k-n}|$. Comme les séries $\sum|\alpha_n|$ et $\sum|\beta_n|$ convergent (absolument), d'après la première partie de la preuve la série $\sum u_k$ converge (absolument) donc son reste tend vers 0. En passant à la limite $N\to\infty$ on obtient donc

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\beta_n\right)-\sum_{n=0}^{N}\gamma_n=0,$$

et comme les trois séries $\sum\alpha_n$, $\sum\beta_n$ et $\sum\gamma_n$ convergent cela prouve (2.1). □

**Proposition 2.10.** *Soient $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a$ et $R_b$, et de sommes $f$ et $g$. Si $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$, le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum c_nz^n$ vérifie $R\ge\min\{R_a,R_b\}$ et sur le disque de rayon $\min\{R_a,R_b\}$ on a $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=f(z)\times g(z)$.*

**Démonstration.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Alors, d'après la Proposition 2.4, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument donc on peut appliquer la Proposition 2.9. On en déduit que la série de terme général

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = c_n z^n$$

converge et vérifie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)g(z)$. La fin de la preuve est ensuite la même que celle de la Proposition 2.8. □

La question naturelle suivante est celle de la dérivabilité, au sens complexe, des fonctions définies par des séries entières.

**Proposition 2.11.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Alors la série entière $\sum (n+1)a_{n+1} z^n$ a pour rayon de convergence $R$. De plus la fonction $f$ définie sur $D(0,R)$ par $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe et on a, pour tout $z \in D(0,R)$,*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

En raisonnant par récurrence on en déduit le résultat important suivant.

**Corollaire 2.1.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Sa somme définit une fonction infiniment dérivable sur $D(0,R)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in D(0,R)$ on a*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}.$$

*En particulier on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

**Remarque 2.10.** *A l'aide des séries entières on peut ainsi fabriquer de nouvelles fonctions holomorphes, en plus des polynômes et des fractions rationnelles. On peut également remarquer que, tout comme pour les polynômes et les fractions rationnelles, ces fonctions sont automatiquement $C^\infty$ (sur leur disque de convergence).*

**Démonstration de la Proposition.** On note $R'$ le rayon de convergence de la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$. Montrons que $R = R'$. Par définition de $R'$, si $r < R'$ la suite de terme général $b_n = (n+1) a_{n+1} r^n$ est bornée. Or, pour $n \geq 1$,

$$|a_n r^n| = r |a_n r^{n-1}| \leq r \times |n a_n r^{n-1}|$$

donc la suite $(a_n r^n)_n$ est aussi bornée ce qui prouve que $R \geq r$. Comme c'est vrai pour tout $r < R'$ on en déduit que $R \geq R'$. Réciproquement, soit $r < R$ et $\rho$ tel que $r < \rho < R$. On a

$$(n+1) a_{n+1} r^n = \frac{1}{\rho}(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n a_{n+1} \rho^{n+1}.$$

Puisque $\rho < R$ la suite $(a_n\rho^n)_n$ est bornée et comme $\frac{r}{\rho} < 1$ on a $\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n = 0$. Finalement la suite $((n+1)a_{n+1}r^n)_n$ tend vers 0 donc est bornée. Cela prouve que $r \le R'$. Comme c'est vrai pour tout $r < R$ on obtient $R \le R'$.

Montrons maintenant que $f$ est dérivable sur $D(0,R)$ et que $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$. Soit $z_0 \in D(0,R)$ et $r < R - |z_0|$, de façon à ce que $D(z_0,r) \subset D(0,R)$. Pour tout $z \in D(z_0,r)$, $z \neq z_0$, on a

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0}.$$

Sur $D(z_0,r)$ on définit la fonction $g_n$ par $g_n(z) = a_n\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}$ si $z \neq z_0$ et $g_n(z_0) = na_n z_0^{n-1}$. Les fonctions $g_n$ sont continues sur $D(z_0,r)$ (expliquez pourquoi). On va montrer que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $D(z_0,r)$. En effet, pour tout $z \in D(z_0,r)$ et $n \ge 1$ on a

$$\begin{aligned}
|z^n - z_0^n| &= \left|(z-z_0)\sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-1-k}\right| \\
&\le |z-z_0| \times \sum_{k=0}^{n-1} |z_0|^k |z|^{n-1-k} && \text{Inégalité triangulaire} \\
&\le |z-z_0| \times \sum_{k=0}^{n-1} (|z_0|+r)^k (|z_0|+r)^{n-1-k} && \text{car } z \in D(z_0,r) \Rightarrow |z| \le r + |z_0| \\
&= |z-z_0| \times n(|z_0|+r)^{n-1}
\end{aligned}$$

et donc $|g_n(z)| \le n|a_n|(|z_0|+r)^{n-1}$. Puisque $|z_0|+r < R$ la série $\sum n|a_n|(|z_0|+r)^{n-1}$ converge donc la série $\sum g_n$ converge normalement sur $D(z_0,r)$. Sa somme est donc continue, en particulier elle est continue en $z_0$, i.e.

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1}. \qquad \square$$

Dans tout ce qu'on a fait on a considéré des séries entières "centrées en 0". Si $z_0 \in \mathbb{C}$ on peut de façon analogue considérer des séries entières "centrées en $z_0$", i.e. de la forme $\sum a_n(z-z_0)^n$. Si la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $R$ alors la série $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge normalement sur tout disque $D(z_0,r)$ avec $r < R$ et diverge pour tout $z \notin \overline{D}(z_0,R)$. Par ailleurs, si $g$ désigne la somme de la série $\sum a_n z^n$ et $f$ celle de la série $\sum a_n(z-z_0)^n$ alors pour tout $z \in D(z_0,R)$ on a $f(z) = g(z-z_0)$. Tous les résultats qu'on a vus dans cette section se généralisent donc immédiatement aux fonctions définies par des séries entières de la forme $\sum a_n(z-z_0)^n$. En particulier si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sur $D(z_0,R)$ alors $f$ est $C^\infty$ et pour tout $n$ on a $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, i.e.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

**Remarque 2.11.** *La formule ci-dessus doit vous sembler familière. Pourquoi ?*

## 2.3 La fonction exponentielle

Parmi toutes les fonctions définies par une série entière l'une des plus importantes, si ce n'est la plus importante, est certainement la fonction exponentielle.

**Définition-Proposition 2.5.** *La série entière* $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *a pour rayon de convergence* $R = +\infty$*. Sa somme est appelée fonction exponentielle, notée* $\exp(z)$ *ou* $\mathrm{e}^z$*.*

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer la règle de D'Alembert. □

**Définition 2.6.** *Les fonctions* cos *(cosinus) et* sin *(sinus)sont définies sur* $\mathbb{C}$ *par*

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

*On a alors* $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$*.*

**Remarque 2.12.** *1. Par définition les restrictions des fonctions exponentielles, sinus et cosinus à* $\mathbb{R}$ *sont à valeurs réelles (ce sont les sommes de séries entières à coefficients réels). En particulier si* $z = it \in i\mathbb{R}$*, et puisque* $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$*, on a* $\cos(t) = \mathrm{Re}(\exp(it))$ *et* $\sin(t) = \mathrm{Im}(\exp(it))$*. Attention, si* $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ *les nombres* $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *ne sont par réels et* $\cos(z)$ *et* $\sin(z)$ *ne sont pas les parties réelles et imaginiaires de* $\exp(iz)$*.*
*2. On définit aussi les fonctions* cosh *et* sinh *par* $\cosh(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}$ *et* $\sinh(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$*. Par définition on a alors* $\cos(z) = \cosh(iz)$ *et* $\sin(z) = -i\sinh(iz)$*. Les fonctions* cos *et* cosh *sont paires tandis que les fonctions* sin *et* sinh *sont impaires.*

Dans cette section on va établir un certain nombre de propriétés de la fonction exponentielle, et leur lien avec les fonctions cosinus et sinus, en n'utilisant que les Définitions 2.5 et 2.6 et cela sans rien présupposé de connu sur ces fonctions y compris lorsque $z = x$ est réel. On ne suppose pas non plus avoir connaissance du nombre $\pi$ que l'on va construire à l'occasion. On verra plus loin, voir la Remarque 4.4, que cette définition coincide bien avec celle usuelle reliant le rayon d'un cercle et son périmètre.

**Théorème 2.1.** *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(0) = 1$.
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$*.*
3. *Pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *on a* $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$*.*
4. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $\exp(z) \neq 0$ *et* $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$*.*
5. *La fonction* exp *est holomorphe et vérifie* $\exp'(z) = \exp(z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$*. De même les fonctions* cos *et* sin *sont holomorphes sur* $\mathbb{C}$ *et vérifient* $\cos'(z) = -\sin(z)$ *et* $\sin'(z) = \cos(z)$*.*
6. *La restriction de* exp *à* $\mathbb{R}$ *définit une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0, +\infty[$*.*
7. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *on a* $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$*. En particulier* $|\exp(z)| = 1$ *si et seulement si* $z = it \in i\mathbb{R}$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a alors* $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$*.*

8. *Il existe un unique réel positif, noté $\pi$, tel que $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i$ et tel que $\mathrm{e}^z = 1$ si et seulement si $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$, i.e. $z = 2in\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. On a alors $\exp(i\pi) = -1$.*
9. *La fonction $\exp$ est périodique de période $2i\pi$. Par conséquent les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont périodiques de période $2\pi$.*
10. *La fonction $t \mapsto \exp(it)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Pour tout $z \in \mathbb{U}$ il existe un unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $z = \exp(it)$ et pour tout $t' \in \mathbb{R}$ on a $z = \exp(it')$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t' = t + 2n\pi$.*
11. *La fonction $\exp$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.*

Si $z \in \mathbb{C}^*$ on a $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. La propriété 10. assure alors qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \exp(it)$ et que $t$ est unique à multiple de $2\pi$ près. Cela conduit à la définition suivante et la proposition qui suit découle directement de la propriété 10.

**Définition 2.7.** *Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. Tout nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \exp(it)$ est appelé un argument de $z$.*

**Proposition 2.12.** *Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors $z$ possède un unique argument à addition d'un multiple de $2\pi$ près. Ainsi étant donné n'importe quel intervalle $I$ semi-ouvert de longueur $2\pi$, i.e. de la forme $I = [a, a+2\pi[$ ou $I = ]a, a+2\pi]$, tout nombre complexe non nul admet un unique argument dans $I$.*

La suite de cette section est consacrée à démontrer le Théorème 2.1. On va voir que les propriétés 1. à 7. sont assez simples à prouver. La suite demande un peu plus de travail.

La propriété 1. est immédiate par définition.

Les propriétés de la conjugaison assurent que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{z}^n}{n!}$ et la propriété 2. découle alors de la continuité de la fonction $z \mapsto \bar{z}$ :

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z}).$$

La propriété 3. utilise la Proposition 2.9. Soient $\alpha_n = \frac{z_1^n}{n!}$ et $\beta_n = \frac{z_2^n}{n!}$. Ces séries convergent absolument donc on a $\exp(z_1)\exp(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ où

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!},$$

i.e. $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$.

En prenant alors $z_1 = z = -z_2$ on obtient $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$ ce qui prouve la propriété 4.

La propriété 5. découle directement de la Proposition 2.11. En particulier on a montré que $\exp(0) = 1$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On retrouve ainsi bien la définition de la fonction exponentielle que vous avez vue en terminale (et dont vous avez jusque là admis l'existence !).

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après 5. et vérifie

$$\exp'(x) = \exp(x) = \exp(x/2)\exp(x/2) > 0$$

puisque $\exp(x/2) \in \mathbb{R}^*$. La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. Pour tout $x > 0$ la série définissant la fonction exponentielle est à termes positifs donc $\exp(x) \geq 1 + x$ (sa somme partielle pour $n = 1$) ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$. En utilisant $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ on en déduit la limite en $-\infty$. Cela prouve la propriété 6.

**Remarque 2.13.** *Pour $x > 0$, toujours en utilisant que la fonction exponentielle est la somme d'une série à termes positifs on peut écrire $\exp(x) \geq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc $\dfrac{\exp(x)}{x^n} \geq \dfrac{x}{(n+1)!}$. On montre ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ pour tout entier $n$ (croissances comparées).*

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)}$. En utilisant 2. et 3. on a donc $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\mathrm{Re}(z)) = (\exp(\mathrm{Re}(z)))^2$. Comme $|\exp(z)|$ et $\exp(\mathrm{Re}(z))$ sont strictement positifs on a bien $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$ et donc $|\exp(z)| = 1$ si et seulement si $\exp(\mathrm{Re}(z)) = 1$, i.e. si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$ puisque exp est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ d'après 6. Finalement, si $t \in \mathbb{R}$ on a vu que $\cos(t) = \mathrm{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \mathrm{Im}(\exp(it))$ donc $1 = |\exp(it)|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$. Cela prouve la propriété 7.

Pour montrer 8. on va utiliser les fonctions cos et sin sur $\mathbb{R}$. On aura pour cela besoin du lemme suivant.

**Lemme 2.1.** *Soit $(a_n)_n$ une suite (réelle) décroissante qui tend vers 0 et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série alternée $\sum(-1)^n a_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{2n+1} \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \leq S_{2n}$.*

**Démonstration.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$. La suite $(S_{2n})_n$ est donc décroissante et converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, on a donc nécessairement $S_{2n} \geq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. L'autre inégalité s'obtient de même en montrant que la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante. □

On va maintenant considérer la fonction cos sur l'intervalle $[0, 2]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\cos(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$. En particulier $\cos(2) = -1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}$. On a une série alternée avec $a_n = \frac{4^n}{(2n)!}$. On vérifie que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} \leq 1$ pour tout $n \geq 2$ (la suite $a_n$ n'est pas décroissante à partir de $n = 0$ c'est pour cela qu'on a isolé les deux premiers termes). D'après le lemme on a donc $\cos(2) \leq -1 + \dfrac{(-1)^2 2^4}{4!} = -\dfrac{1}{3} < 0$. On montre maintenant que cos est strictement décroissante sur $[0, 2]$. D'après 5. la fonction cos est dérivable et vérifie $\cos'(t) = -\sin(t)$. On va à nouveau utiliser le lemme, cette fois à la fonction sin. On a bien une série alternée avec cette fois $a_n = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Si $t \in ]0,2]$ on a bien $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{t^2}{(2n+3)(2n+2)} \leq \frac{4}{6} < 1$, et donc

$$\sin(t) \;\geq\; \sum_{n=0}^{1}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \;=\; t-\frac{t^3}{6} \;=\; \frac{t}{6}(6-t^2) > 0, \qquad \forall t \in ]0,2].$$

La fonction cos est donc continue strictement décroissante sur $[0,2]$ et vérifie $\cos(0) = 1 > 0$ (par définition de cos à l'aide de la série entière !) et $\cos(2) < 0$. Il existe donc un unique $t_0 \in ]0,2[$ tel que $\cos(t_0) = 0$. On pose $\pi = 2t_0$. On a alors $\sin^2(\pi/2) = 1-\cos^2(\pi/2) = 1$ et comme $\sin(t) > 0$ sur $]0,2]$ et que $\pi/2 \in ]0,2]$ on en déduit que $\sin(\pi/2) = 1$. Finalement $\exp(i\pi/2) = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$. On a alors, en utilisant 3., $\exp(i\pi) = \exp(i\pi/2)\exp(i\pi/2) = i^2 = -1$ et de même $\exp(2i\pi) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient facilement par récurrence que $\exp(2in\pi) = 1$ et le résultat reste vrai pour $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ en utilisant 2. avec $z = 2in\pi$.

Il reste à montrer que si $\exp(z) = 1$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2in\pi$. Soit donc un tel $z = x+iy$. Puisque $\exp(z) = 1$ est de module 1, d'après 7. on a $x = 0$. Soit maintenant $n$ la partie entière du nombre réel $\frac{y}{2\pi}$ et $t = y - 2n\pi$. On va montrer que $t = 0$ ce qui prouvera que $z = iy \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière on a $t \in [0,2\pi[$ et $\exp(it) = \exp(iy - i2n\pi) = \exp(iy)\exp(-i2n\pi) = 1$. On considère alors le nombre complexe $\exp(it/4)$ mis sous forme algébrique, i.e. $\exp(it/4) = u+iv$ avec $u = \cos(\frac{t}{4})$ et $v = \sin(\frac{t}{4})$. Comme $t/4 \in [0,\pi/2[$ l'étude des fonctions cos et sin effectuée ci-dessus montre que $0 < u \leq 1$ et $0 \leq v < 1$ avec $u = 1$ et $v = 0$ si et seulement si $t = 0$. D'autre part en utilisant 3. on a

$$1 = \exp(it) = (\exp(it/4))^4 = (u+iv)^4 = u^4+v^4-6u^2v^2+4i(u^3v-uv^3),$$

donc $1 = u^4+v^4-6u^2v^2$ et $0 = uv(u^2-v^2)$. Si $v \neq 0$ la seconde égalité donne $u^2-v^2 = 0$ et donc $u = v$ ($u$ et $v$ sont tous les deux positifs). Mais alors $u^4+v^4-6u^2v^2 = -4u^2$ ne peut pas être égal à 1. Ainsi $v = 0$ donc $u = 1$ et on a bien $t = 0$.

Pour finir la preuve de 8. il reste à montrer l'unicité d'un tel nombre positif. Soit donc $\alpha > 0$ vérifiant ces propriétés. En particulier $\mathrm{e}^{2i\alpha} = 1$ donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = n\pi$, et en intervertissant les rôles de $\alpha$ et $\pi$ il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi = m\alpha$ et donc $\alpha = nm\alpha$. Les nombres $\alpha$ et $\pi$ sont tous les deux strictement positifs donc $n,m \in \mathbb{N}^*$ et on en déduit que $n = m = 1$, i.e. $\alpha = \pi$.

La propriété 9. (périodicité de la fonction exponentielle) découle directement de la propriété 3. et de $\exp(2i\pi) = 1$.

On montre maintenant que la fonction $t \mapsto \exp(it)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Soit donc $z \in \mathbb{U}$, on veut montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = \exp(it)$. Si $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ sont positifs, comme $x^2+y^2 = 1$ on a $0 \leq x \leq 1$ donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction cos sur $[0,\pi/2]$ il existe $t \in [0,\pi/2]$ tel que $x = \cos(t)$. On a alors $y^2 = 1-x^2 = 1-\cos^2(t) = \sin^2(t)$ et comme $y$ et $\sin(t)$ sont positifs ($y$ par hypothèse et $\sin(t)$ d'après l'étude précédente) on a $y = \sin(t)$. Finalement on a bien $z = x+iy = \exp(it)$. Si $x$ est positif et $y$ est négatif on applique ce qui précède à $\bar{z} = x-iy$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{z} = \exp(it)$ et donc $z = \overline{\exp(it)} = \exp(\overline{it}) = \exp(-it)$. Le résultat est donc vrai pour tout $z$ de partie réelle positive. Finalement si $x = \mathrm{Re}(z) < 0$ on applique ce qui précède à $-z$. Il existe donc $t$ tel que $-z = \exp(it)$ et donc $z = -\exp(it) = \exp(i\pi)\exp(it) = \exp(i(t+\pi))$. La fonction $t \mapsto \exp(it)$ est donc bien surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

On passe à la deuxième partie de la propriété 10., i.e. si $z \in \mathbb{U}$ il existe un unique $t \in [0,2\pi[$ tel que $z = \exp(it)$ et pour tout $t' \in \mathbb{R}$ on a $z = \exp(it')$ ssi il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$t' = t + 2n\pi$. Soit donc $z \in \mathbb{U}$. Si $t, t' \in \mathbb{R}$ sont tels que $z = \exp(it) = \exp(it')$ alors d'après 3. on a $\exp(i(t'-t)) = 1$ et donc d'après 8. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t' = t + 2n\pi$. De plus, si $z \in \mathbb{U}$ et $t'$ vérifie $z = \exp(it')$ alors en prenant $n$ la partie entière de $\frac{t'}{2\pi}$ et $t = t' - 2n\pi$ on a bien $t \in [0, 2\pi[$ et $\exp(it) = \exp(it')\exp(-2in\pi) = z$. Enfin si $t, t' \in [0, 2\pi[$ sont tels que $\exp(it) = \exp(it')$ on a $t' - t \in ]-2\pi, 2\pi[$ et $t' - t \in 2\pi\mathbb{Z}$ donc nécessairement $t' - t = 0$, i.e. $t = t'$. La propriété 10. est donc bien démontrée.

Il reste finalement à montrer que exp est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$ on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(z) = w$. On a $\frac{w}{|w|} \in \mathbb{U}$ donc d'après 10. il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{w}{|w|} = \exp(iy)$, i.e. $w = |w|\exp(iy)$. Mais $|w| \in ]0, +\infty[$ donc d'après 6. il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = |w|$ et ainsi $w = |w|\exp(iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x + iy)$ ce qui prouve que exp est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

## 2.4 Logarithme complexe

Comme dans $\mathbb{R}$ on va chercher à *inverser* la fonction exponentielle, i.e. trouver une fonction $f$ telle que $\exp(f(z)) = z$. D'une part on a vu que exp était surjective sur $\mathbb{C}^*$ mais qu'elle ne s'annulait pas. Il va donc falloir au moins restreindre l'ensemble de définition d'un éventuel logarithme à $\mathbb{C}^*$. D'autre part, et c'est le plus gros problème, la fonction exp n'est pas injective ! N'importe quel $z \in \mathbb{C}^*$ a plusieurs antécédents par la fonction exponentielle, et même une infinité. On sait cependant de "quelle façon" elle n'est pas injective. En effet, $\exp(w_1) = \exp(w_2)$ si et seulement si $\exp(w_1 - w_2) = 1$ et donc si et seulement si $w_1 - w_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (c'est le 8. du Théorème 2.1). En d'autres termes si $f(z)$ est un "logarithme" de $z$ alors tout nombre de la forme $f(z) + 2in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, en est également un (et ils sont tous de cette forme).

Plus précisément, si $z \neq 0$ et si on écrit $z = |z|\exp(i\arg(z))$ où $\arg(z)$ est un argument de $z$ (n'importe lequel) alors

$$\exp(f(z)) = z \iff \exp(f(z)) = |z|\exp(i\arg(z)) \iff \exp(f(z)) = \exp\big(\ln(|z|) + i\arg(z)\big)$$

où ln est, comme d'habitude, la bijection réciproque de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (la fonction ln est bien définie d'après le 6. du Théorème 2.1). On a donc envie d'écrire $f(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ et on retrouve le fait que le logarithme de $z$ n'est défini qu'à l'addition d'un multiple entier de $2i\pi$ près puisque l'argument n'est défini qu'à l'addition d'un multiple entier de $2\pi$ près.

**Définition 2.8.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une* détermination *du logarithme sur $\Omega$ si $f$ est continue et vérifie $\exp(f(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$.*

Avec ce qu'on a dit ci-dessus, si une détermination du logarithme existe sur $\Omega$ elle n'est pas unique puisqu'on peut lui ajouter un multiple entier de $2i\pi$. C'est en fait essentiellement la seule possibilité. On rappelle qu'un domaine $\Omega$ est un ouvert connexe par arcs.

**Proposition 2.13.** *Si $\Omega$ est un domaine de $\mathbb{C}$ et si $f$ et $g$ sont deux déterminations du logarithme sur $\Omega$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = g(z) + 2ik\pi$ pour tout $z \in \Omega$.*

**Démonstration.** Pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = z = \exp(g(z))$ donc $\exp(f(z) - g(z)) = 1$. D'après le Théorème 2.1, pour tout $z \in \Omega$ il existe $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) - g(z) = 2ik(z)\pi$.

Ce que dit la proposition c'est qu'en fait $k(z)$ ne dépend pas de $z$. On veut donc montrer que la fonction $k : \Omega \ni z \mapsto k(z) \in \mathbb{Z}$ est constante.

Soient $z_1, z_2 \in \Omega$, il faut montrer que $k(z_1) = k(z_2)$. Comme les fonctions $f$ et $g$ sont continues la fonction $k$ est aussi continue. L'idée est de pouvoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires : pour aller d'un entier à un autre, s'ils sont différents il faudrait passer par des valeurs non-entières ce qui est exclus. Pour cela il faut d'abord se ramener à une fonction d'une variable réelle. Puisque $\Omega$ est connexe par arcs il existe une fonction continue $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle que $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ et $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout $t$. La fonction $\varphi = k \circ \gamma : t \mapsto k(\gamma(t))$ est ainsi une fonction d'une variable réelle, continue sur $[a, b]$ (composée de fonctions continues) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et même dans $\mathbb{Z}$. En particulier elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Si $\varphi(a) = k(z_1) \neq k(z_2) = \varphi(b)$ la fonction $\varphi$ prendrait toutes les valeurs comprises entre $k(z_1)$ et $k(z_2)$ y compris donc des valeurs non entières. C'est impossible et donc $k(z_1) = k(z_2)$. □

Dans l'idéal on aimerait prendre $\Omega$ le plus grand possible, et donc $\Omega = \mathbb{C}^*$. On va voir que ce n'est pas possible, i.e. il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

**Proposition 2.14.** *Si $\Omega$ est un ouvert contenant $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ alors il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\Omega$. En particulier il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.*

**Démonstration.** Supposons par l'absurde qu'on ait une détermination du logarithme $f$ sur $\Omega$. Comme $\mathbb{U} \subset \Omega$ on peut définir la fonction $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ par $g(t) = f(\exp(it))$. En particulier on a $g(2\pi) = f(\exp(2i\pi)) = f(\exp(0)) = g(0)$. Par ailleurs, comme $f$ est une détermination du logarithme on doit avoir $\exp(f(z)) = z$ et donc $\exp(g(t)) = \exp\big(f(\exp(it))\big) = \exp(it)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$ il existe $k(t) \in \mathbb{Z}$ tel que $g(t) = it + 2ik(t)\pi$. Comme la fonction $g$ est continue la fonction $k(t)$ aussi et elle est donc constante (c'est le même argument que celui utilisé dans la Proposition 2.13). Ainsi $g(0) = 2ik\pi$ tandis que $g(2\pi) = 2i(k + 1)\pi$. Cela contredit $g(0) = g(2\pi)$. □

**Remarque 2.14.** *La proposition ci-dessus est en fait plus générale. On peut voir dans la preuve que ce qui pose problème est le fait d'avoir "fait tout un tour autour de 0". Si $\Omega$ est un ouvert contenant un chemin fermé "entourant" l'origine on ne pourra pas trouver de détermination du logarithme sur $\Omega$. Pour espérer trouver une détermination du logarithme il faut "couper" $\mathbb{C}$ de façon à ne pas pouvoir faire un tel tour.*

**Définition-Proposition 2.9.** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus \mathrm{e}^{i\theta}\mathbb{R}_+ = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \forall r \geq 0,\ z \neq r\exp(i\theta)\}$. Alors la fonction exponentielle est bijective de $\{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in \mathbb{R},\ y \in ]\theta, \theta + 2\pi[\}$ dans $\Omega_\theta$. Sa bijection réciproque $f_\theta$ est une détermination du logarithme sur $\Omega_\theta$. Elle est donnée par $f_\theta(z) = \ln(|z|) + i\arg_\theta(z)$ où $\arg_\theta(z)$ est l'unique argument de $z$ dans l'intervalle $]\theta, \theta + 2\pi[$.*

*Si on prend $\theta = -\pi$ on parle de détermination principale du logarithme et on la note* Log. *Sa restriction à $]0, +\infty[$ coincide avec le logarithme népérien.*

**Démonstration.** Avec tout ce qu'on a fait précédemment la seule chose à justifier est la continuité de ces fonctions (par définition une détermination du logarithme est continue). On le fait dans le cas $\theta = -\pi$.

Si $\theta$ est un argument de $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ on a $x = |z|\cos(\theta)$ et $y = |z|\sin(\theta)$. De plus, si $\theta \in ]-\pi, \pi[$ on vérifie (faites-le !) que $\dfrac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. On en déduit que pour tout $z = x + iy \in \Omega_{-\pi} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ on a

$$\arg_{-\pi}(x+iy) = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

et donc

$$\mathrm{Log}(x+iy) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + i2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

La fonction de deux variables réelles $(x, y) \mapsto \left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), 2\arctan\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$ est continue (composée, quotient,...) et donc, d'après la Proposition 1.14, la fonction Log est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ □

Dans $\mathbb{R}$ l'autre propriété importante de la fonction logarithme est qu'elle est dérivable et surtout que sa dérivée est la fonction inverse. On a l'analogue dans $\mathbb{C}$ : les déterminations du logarithme sont, à constante près, les primitives de la fonction inverse.

**Proposition 2.15.** *Soit $\Omega$ un domaine inclus dans $\mathbb{C}^*$.*

1. *Si $f$ est une détermination du logarithme sur $\Omega$ alors $f$ est holomorphe sur $\Omega$ et vérifie $f'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$.*
2. *Réciproquement, si $f$ est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\Omega$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) - \alpha$ est une détermination du logarithme sur $\Omega$.*

**Remarque 2.15.** *En utilisant la Proposition 2.14 on en déduit en particulier que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ bien qu'elle y soit continue et même infiniment dérivable. Par contre elle en a sur les domaines $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$.*

**Démonstration.** 1. Soit $f$ une détermination du logarithme sur $\Omega$ et $z_0 \in \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = z$ et donc en particulier $f(z) \neq f(z_0)$ si $z \neq z_0$ (sinon on aurait $\exp(f(z)) = \exp(f(z_0))$. De plus la fonction $f$ est continue donc, par composition de limites et puisque $\exp' = \exp$ on a, pour tout $z \neq z_0$,

$$\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{\exp(f(z)) - \exp(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \xrightarrow{z \to z_0} \exp'(f(z_0)) = \exp(f(z_0)) = z_0.$$

Puisque $z_0 \neq 0$ on en déduit que $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z_0}$ ce qui prouve que $f$ est dérivable en $z_0$ avec $f'(z_0) = \frac{1}{z_0}$.

2. Soit $f$ une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\Omega$. En particulier la fonction $f$ est holomorphe avec $f'(z) = \dfrac{1}{z}$ donc la fonction définie sur $\Omega$ par $g(z) = \dfrac{\exp(f(z))}{z}$ est holomorphe sur $\Omega$ $(0 \notin \Omega)$ et vérifie

$$g'(z) = \frac{zf'(z)\exp(f(z)) - \exp(f(z))}{z^2} = 0.$$

Comme $\Omega$ est connexe par arcs on peut utiliser la Proposition 1.16 ce qui prouve que $g$ est constante. On note $\kappa$ sa valeur. Pour tout $z \in \Omega$ on a donc $\exp(f(z)) = \kappa z$. Comme exp ne s'annule pas on a nécessairement $\kappa \in \mathbb{C}^*$ et puisqu'elle est surjective sur $\mathbb{C}^*$ il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\kappa = \exp(\alpha)$. Ainsi pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = \exp(\alpha)z \Leftrightarrow \exp(f(z) - \alpha) = z$. La fonction $f(z) - \alpha$ est donc bien une détermination du logarithme. $\square$

On termine cette section sur le logarithme en faisant le lien avec les séries entières.

**Proposition 2.16.** *La série entière* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ *a pour rayon de convergence* 1 *et pour tout* $z \in D(1,1)$ *on a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n = \mathrm{Log}(z)$ *la détermination principale du logarithme.*

**Démonstration.** Le rayon de convergence de la série entière s'obtient facilement avec la règle de D'Alembert. Si on note $f(z)$ la somme de cette série la fonction $f$ est donc holomorphe dans $D(1,1)$ et pour tout $z \in D(1,1)$, i.e. tel que $|z-1| < 1$, on a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \overset{|z-1|<1}{=} \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

La fonction $f$ est donc une primitive de $\frac{1}{z}$ sur $D(1,1)$. C'est donc, à constante près, une détermination du logarithme sur $D(1,1)$. Comme la fonction Log est aussi une telle détermination sur le domaine $D(1,1)$, d'après la Proposition 2.13 il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \mathrm{Log}(z) + \alpha$ pour tout $z \in D(1,1)$. Or $f(1) = 0 = \mathrm{Log}(1)$ donc $\alpha = 0$ et $f(z) = \mathrm{Log}(z)$ pour tout $z \in D(1,1)$. $\square$

**Remarque 2.16.** *Attention, la fonction* Log *est définie sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *mais n'est égal à* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$ *que si* $z \in D(1,1)$. *Une telle situation arrive souvent. Pensez par exemple à la fonction* $g$ *définie sur* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ *par* $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ *mais qui ne coincide avec la série entière* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *que si* $|z| < 1$ *(si* $|z| \geq 1$ *la série diverge de toutes façons).*

# CHAPITRE 3

# FONCTIONS ANALYTIQUES

## 3.1 Séries entières et fonctions analytiques

**Définition 3.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que $f$ est développable en série entière en $z_0$, noté* DSE *en $z_0$ s'il existe une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ de rayon de convergence $R$ non nul et $r \in ]0, R[$ tels que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sur $D(z_0, r)$.*

La proposition suivante suit directement de ce qu'on a vu sur les séries entières (Section 2.2).

**Proposition 3.1.** *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est* DSE *en $z_0$ alors il existe $r > 0$ tel que $f$ est $C^\infty$ sur $D(z_0, r)$ et pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n. \tag{3.1}$$

*En particulier, s'il existe le DSE en $z_0$ est unique.*

**Exemple 3.1.** *Une fonction polynomiale $P$ est DSE en tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et si $n = \deg(P)$ alors $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$.*

**Exemple 3.2.** *La fonction $f$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ est* DSE *en $z_0 = 0$. Pour tout $z \in D(0,1)$ on a en effet $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.*

**Exemple 3.3.** *On a vu à la fin du chapitre précédent, cf Proposition 2.16, que la fonction* Log *(logarithme principal) était DSE en $z_0 = 1$.*

**Exemple 3.4.** *Prenons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$. Est-elle DSE ? Si oui, en quel $z_0$ ? Etant donné $z_0 \neq 0$ on voudrait écrire, au voisinage de $z_0$, $f$ sous la forme*

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. *On va donc naturellement chercher à faire apparaitre* $z-z_0$. *On écrit* $f(z) = \frac{1}{z-z_0+z_0} = \frac{1}{z_0} \times \frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0}}$. *Si* $\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < 1$, *i.e. si* $z \in D(z_0, |z_0|)$, *on a alors*

$$f(z) = \frac{1}{z_0} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}(z-z_0)^n.$$

*La fonction* $f$ *est donc DSE en n'importe quel* $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

**Définition 3.2.** *Soit* $\Omega$ *un ouvert et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$. *On dit que* $f$ *est* analytique *sur* $\Omega$ *si pour tout* $z_0 \in \Omega$ *la fonction* $f$ *est* DSE *en* $z_0$.

**Exemple 3.5.** *L'Exemple 3.4 montre que la fonction* $f(z) = \frac{1}{z}$ *est analytique sur* $\mathbb{C}^*$.

Les propositions qui suivent découlent directement de ce qu'on a fait sur les séries entières.

**Proposition 3.2.** *Soit* $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ *analytiques et* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Alors les fonctions* $f + \lambda g$ *et* $fg$ *sont analytiques sur* $\Omega$.

**Proposition 3.3.** *Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est analytique alors elle est infiniment dérivable et pour tout* $k$ *sa dérivée* $f^{(k)}$ *est analytique.*

**Exercice 3.1.** *Démontrez ces deux propositions.*

Les fonctions polynômiales sont évidemment analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier. On montrera dans la Section 3.4 qu'en fait toutes les fonctions de classe $C^1$ sont analytiques sur leur ensemble de définition, et de même pour toutes les fonctions dérivables (voir le Chapitre 4).

**Exercice 3.2.** *Montrer que la fonction exponentielle est analytique. Indication : comme dans l'Exemple 3.4, si* $z_0 \in \mathbb{C}$ *écrire* $z = z_0 + (z - z_0)$.

## 3.2 Zéros isolés et prolongement analytique

Le fait qu'une fonction soit analytique a des conséquences importantes (en plus du côté infiniment dérivable). Pouvoir développer en série entière permet d'avoir des informations dans tout un disque (le disque de convergence de la série entière) à partir seulement d'informations au voisinage d'un point $z_0$ (ce qui permet d'obtenir les dérivées successives $f^{(n)}(z_0)$ et donc la série).

**Proposition 3.4.** *Soit* $\Omega$ *un domaine et* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analytique. S'il existe* $z_0 \in \Omega$ *tel que* $f^{(n)}(z_0) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $f$ *est nulle.*

**Remarque 3.1.** *1. Un tel résultat est faux si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* $C^\infty$, *sans supposer qu'elle est analytique. Vous pouvez montrer que la fonction définie par* $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$ *est* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et vérifie* $f^{(n)}(0) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Cependant* $f$ *n'est pas nulle. Vous pouvez également vérifier qu'elle n'est pas DSE en* $0$, *et donc pas analytique.*
*2. Si on suppose que* $f^{(n)}(z_0) = 0$ *pour tout* $n \geq 1$ *alors en considérant* $g(z) = f(z) - f(z_0)$ *on en déduit que* $f$ *est constante. Plus généralement si on suppose que* $f^{(n)}(z_0) = 0$ *pour tout* $n \geq N+1$ *alors en considérant* $g(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ *on en déduit que* $f$ *est une fonction polynôme de degré au plus* $N$.

**Remarque 3.2.** *On peut avoir l'impression que demander à toutes les dérivées en un point d'être nulles est une condition forte. On peut voir cela autrement. Si $f$ est analytique sur un domaine $\Omega$ et est nulle sur un ouvert non-vide $\Omega_0 \subset \Omega$, même si $\Omega_0$ est "minuscule", alors $f$ est nulle partout ! En effet soit $\Omega_0$ un tel ouvert et $z_0 \in \Omega_0$. Comme $f$ est nulle sur tout $\Omega_0$ toutes ses dérivées sont nulles sur $\Omega_0$ (dérivées de la fonction constante égale à 0 sur $\Omega_0$). En particulier $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $f$ est nulle (sur tout $\Omega$ !).*

**Démonstration.** Soit $Z = \{z \in \Omega \,|\, f^{(n)}(z) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$. On va montrer que $Z = \Omega$ ce qui prouvera en particulier que $f(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$.

On commence par montrer que l'ensemble $Z$ possède les deux propriétés suivantes :

1. $Z$ est ouvert,
2. Si $(z_k)_k$ est une suite d'éléments de $Z$ telle que $\lim_{k\to\infty} z_k = z \in \Omega$ alors $z \in Z$. On dit que $Z$ est un fermé de $\Omega$ (on a supposé que la limite était au moins dans $\Omega$).

1. Soit $z_1 \in Z \subset \Omega$. $f$ est analytique sur $\Omega$ donc il existe $r > 0$ tel que sur $D(z_1, r)$ on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$. Comme $z_1 \in Z$ la fonction $f$ est donc constante égale à zéro sur $D(z_1, r)$ et donc $D(z_1, r) \subset Z$. L'ensemble $Z$ est bien ouvert.
2. Soit $(z_k)_k$ dans $Z$ telle que $\lim_{k\to\infty} z_k = z \in \Omega$. Si $n \in \mathbb{N}$ on a donc $f^{(n)}(z_k) = 0$ pour tout $k$ et comme $f^{(n)}$ est continue sur $\Omega$ on en déduit que $f^{(n)}(z) = \lim_{k\to\infty} f^{(n)}(z_k) = 0$ (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse $z \in \Omega$). C'est vrai pour tout $n$ donc $z \in Z$.

On va en déduire que $Z = \Omega$. Par définition de $Z$ on sait déjà que $Z \subset \Omega$ et on montre donc que $\Omega \subset Z$. Soit donc $z_1 \in \Omega$, on montre que $z_1 \in Z$. Par hypothèse il existe $z_0 \in Z$. Comme $\Omega$ est un domaine il existe $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ continue tel que $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$ et $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, 1]$. On considère $J = \{t \in [0, 1] \,|\, \gamma(t) \in Z\}$. On va montrer que $1 \in J$ et donc que $z_1 = \gamma(1) \in Z$. L'ensemble $J$ est borné (il est inclus dans $[0, 1]$) et non-vide puisque $0 \in J$. Il admet donc une borne supérieure $T$. Par définition de la borne supérieure il existe $(t_k)_k \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $t_k \to T$. Par définition de $J$ pour tout $k$ on a $z_k = \gamma(t_k) \in Z$ et par continuité de $\gamma$ on a $z_k \to \gamma(T) = z \in \Omega$. La propriété 2. ci-dessus prouve que $z \in Z$ et donc $T \in J$. Montrons enfin que $T = 1$. Par la propriété 1. $Z$ est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(z, \varepsilon) \subset Z$. Puisque $\gamma$ est continue il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - T| < \delta$ alors $|\gamma(t) - z| = |\gamma(t) - \gamma(T)| < \varepsilon$ et donc $\gamma(t) \in Z$. Autrement dit $]T - \delta, T + \delta[\, \cap [0, 1] \subset J$. Si $T < 1$ cela contredit la définition de $T = \sup J$. □

**Remarque 3.3.** *Ce qu'on a montré ci-dessus est qu'en fait si $\Omega$ est connexe par arcs alors un sous-ensemble non-vide de $\Omega$ (ici $Z$) qui est à la fois ouvert et fermé dans $\Omega$ est égal à $\Omega$ tout entier. Un ensemble qui vérifie cette propriété est dit connexe et on a donc montré que si $\Omega$ est connexe par arcs alors $\Omega$ est connexe. Dans la plupart des livres on trouve en fait comme définition d'un domaine que c'est un ouvert connexe. On peut en fait montrer que pour les <u>ouverts</u> de $\mathbb{C}$ les deux notions de connexe et connexe par arcs coincident. La notion d'ensemble connexe par arcs est plus intuitive que celle de connexe, c'est pour ça qu'on l'a choisie dans la définition d'un domaine.*

**Théorème 3.1.** *[Principe des zéros isolés] Soit $\Omega$ un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non-nulle. Alors l'ensemble $Z(f) := \{z \in \Omega \,|\, f(z) = 0\}$ des zéros de $f$ est un* *ensemble discret, i.e. tout zéro de $f$ est isolé : pour tout $z_0 \in Z(f)$ il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \cap Z(f) = \emptyset$, autrement dit pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a $f(z) \neq 0$.*

**Démonstration.** Soit $f$ analytique non-nulle et $z_0 \in Z(f)$. D'après la proposition précédente il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (sinon $f$ serait nulle). Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. Comme $f$ est DSE en $z_0$ il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^{n_0}\left[\frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-n_0}\right]. \quad (3.2)$$

Le terme entre crochets est la somme d'une série entière sur $D(z_0, R)$. Sa somme $g(z)$ est donc continue, en particulier $\lim_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0$. Donc il existe $0 < r < R$ tel que $g$ ne s'annule pas sur $D(z_0, r)$. Comme $(z - z_0)^{n_0}$ ne peut s'annuler qu'en $z_0$ on en déduit que pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a $f(z) \neq 0$. □

Comme le montre la preuve, l'important est que $f$ soit analytique et pas qu'elle soit définie sur $\mathbb{C}$. On peut définir de façon analogue la notion de fonction analytique pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et le résultat reste vrai. Par contre il est faux si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est seulement $C^\infty$.

**Exercice 3.3.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$. Montrer que $f$ est $C^\infty$. Quel est l'ensemble des zéros de $f$ ? Comparez également ce qui se passe ici avec le résultat de la Proposition 3.4.*

**Corollaire 3.1.** *Soit $\Omega$ un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non-nulle. Pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$ la fonction $f$ admet un nombre fini de zéros dans $K$. Par conséquent l'ensemble $Z(f)$ des zéros de $f$ est au plus dénombrable.*

**Remarque 3.4.** *L'équation (3.2) montre que si $f$ est analytique non nulle alors pour tout zéro $z_0$ de $f$ il existe $n_0 \geq 1$ tel que $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$ avec $g$ telle que $g(z_0) \neq 0$. De plus cet entier est donné par $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. On verra par la suite que $g$ est alors analytique (on sait au moins qu'elle est DSE en $z_0$). Par analogie avec les polynômes on a la définition suivante.*

**Définition 3.3.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ non nulle et $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ est appelé l'ordre de $z_0$.*

**Corollaire 3.2.** *Soit $\Omega$ un domaine et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ l'ensemble $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{z \in \Omega \,|\, f(z) = \alpha\}$ est soit discret soit égal à $\Omega$.*

**Démonstration.** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la fonction $g(z) = f(z) - \alpha$. Si $f^{-1}(\{\alpha\}) \neq \Omega$ la fonction $g$ est analytique non-nulle donc l'ensemble $Z(g)$ de ses zéros est un ensemble discret. Mais on a précisément $Z(g) = f^{-1}(\{\alpha\})$. □

**Corollaire 3.3.** *Soit $\Omega$ un domaine et $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Si l'ensemble $A = \{z \in \Omega \,|\, f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans $\Omega$ alors $f = g$.*

**Démonstration.** La fonction $f - g$ est analytique et $A = Z(f - g)$. Si $A$ admet un point d'accumulation dans $\Omega$, par continuité de $f - g$ celui-ci est dans $A$. Ainsi $A = Z(f - g)$ n'est pas discret et donc $A = \Omega$, i.e. $f - g = 0$. □

**Théorème 3.2.** *[Principe du prolongement analytique] Soit $\Omega$ un domaine, $\Omega_0 \subset \Omega$ un ouvert non-vide et $f : \Omega_0 \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors $f$ admet au plus un prolongement analytique sur $\Omega$, i.e. si $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ sont analytiques telles que pour tout $z \in \Omega_0$ on a $f_1(z) = f_2(z) = f(z)$ alors $f_1 = f_2$.*

**Démonstration.** Soient $f_1, f_2$ deux prolongements de $f$. $A = \{z \in \Omega \,|\, f_1(z) = f_2(z)\}$ contient $\Omega_0$ et a donc un point d'accumulation dans $\Omega$ (Exercice 1.4). Donc $A = \Omega$.

## 3.3 Formule de Cauchy pour les fonctions analytiques

On a vu que les coefficients du DSE en $z_0$ d'une fonction analytique $f$ étaient naturellement reliés aux dérivées successives de $f$ en $z_0$. Le résultat suivant montre comment on peut également les obtenir uniquement à l'aide de $f$, sans utiliser les dérivées de cette dernière.

**Proposition 3.5.** *Soit $\sum a_n(z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ (éventuellement $R = +\infty$) et $f$ sa somme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in ]0, R[$ on a*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

**Remarque 3.5.** *Pour $n = 0$ la formule ci-dessus devient, puisque $a_0 = f(z_0)$,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

*Pour une fonction $f$ définie par une série entière centrée en $z_0$, la valeur de $f$ en $z_0$ est égale à la moyenne des valeurs de $f$ le long d'un cercle de centre $z_0$ (de n'importe quel rayon $r$ plus petit que le rayon de convergence). C'est ce qu'on appelle une* formule de la moyenne.

**Démonstration.** Soit $r \in ]0, R[$. On note $g_r$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_r(t) = f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)$. Comme $f$ est la somme d'une série entière elle est $C^\infty$ dans $D(0, R)$ et donc en particulier $C^1$. La fonction $g_r$ est donc de classe $C^1$ et, par définition de $f$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$g_r(t) = f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m \mathrm{e}^{imt}.$$

La fonction $g_r$ est ce qu'on appelle une série trigonométrique (voir le cours sur les séries de Fourier au S6). Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|a_m r^m \mathrm{e}^{imt}\mathrm{e}^{-int}| = |a_m r^m|$ et, puisque $r < R$, la série $\sum |a_m r^m|$ converge. Ainsi la série de fonctions $\sum_m a_m r^m \mathrm{e}^{imt}\mathrm{e}^{-int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0, 2\pi]$. On peut ainsi intervertir série et intégrale dans le calcul suivant

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m \mathrm{e}^{imt}\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_m r^m \mathrm{e}^{i(m-n)t}\,\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

On vérifie facilement que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ikt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{ik}\mathrm{e}^{ikt}\right]_0^{2\pi} = 0$. Ainsi toutes les intégrales dans (3.5) sont nulles sauf celle pour $m = n$. Et on a finalement

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_n r^n\,\mathrm{d}t = a_n r^n.$$

□

La formule de la moyenne montre qu'on peut obtenir la valeur d'une fonction analytique en un point $z_0$ à partir des valeurs le long d'un cercle centré en $z_0$. La formule de Cauchy ci-dessous montre qu'on peut en fait obtenir sa valeur en n'importe quel point à l'intérieur d'un disque à l'aide des valeurs sur le cercle (à condition que le rayon soit assez petit). Autrement dit, les valeurs d'une fonction analytique sur un cercle déterminent entièrement la fonction à l'intérieur de ce cercle (ce n'est pas étonnant à cause du principe de prolongement analytique), et ce de façon "explicite". La formule (3.6) jouera un rôle essentiel dans la suite pour montrer que, de façon surprenante, n'importe quelle fonction $C^1$ est analytique (et donc $C^\infty$).

**Théorème 3.3.** *[Formule de Cauchy] Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytique, $z_0 \in \Omega$ et $R$ tel que $f$ soit DSE sur $D(z_0, R)$. Alors pour tout $r \in ]0, R[$ on a, pour tout $z \in D(z_0, r)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it}\,\mathrm{d}t. \tag{3.6}$$

**Remarque 3.6.** *1) Si on prend $z = z_0$ on retrouve la formule de la moyenne (3.4).*

*2) La fonction constante égale à 1 est bien entendu analytique, avec $R = +\infty$ quel que soit $z_0$. Dans ce cas la formule (3.6) donne, pour tout $r > 0$ et $z \in D(z_0, r)$*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z}\,\mathrm{d}t = 1. \tag{3.7}$$

**Démonstration.** Soit $z_0 \in \Omega$, $(a_n)_n$ et $R$ tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ sur $D(z_0, R)$. Soient également $r < R$ et $z \in D(z_0, r)$. D'après (3.3) on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int}\,\mathrm{d}t \right) (z - z_0)^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} (z - z_0)^n\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.8}$$

$f$ est continue sur $C(z_0, r)$ donc y est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$\left| \frac{1}{r^n} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} (z - z_0)^n \right| \leq M \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n.$$

Comme $z \in D(z_0, r)$ on a $\left| \frac{z - z_0}{r} \right| < 1$ donc la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(t) = \frac{1}{r^n} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int} (z - z_0)^n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut donc intervertir série et intégrale dans (3.8) et on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f\left(z_0 + re^{it}\right) \left( \frac{z - z_0}{re^{it}} \right)^n \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) \times \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{re^{it}}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) \times \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

## 3.4 Analyticité des fonctions $C^1$

On va établir dans cette section qu'une fonction $C^1$, i.e. holomorphe avec $f'$ continue, est forcément analytique et donc en particulier $C^\infty$. Cela permettra également de préciser le rayon de convergence $R$ du DSE en un point $z_0$ d'une fonction analytique (pour le moment si $f$ est analytique on sait juste qu'un tel $R$ existe mais rien de plus).

Soit donc $f$ une fonction de classe $C^1$ sur $\Omega$ et $z_0 \in \Omega$. On souhaite montrer que $f$ s'écrit comme somme d'une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ sur un certain disque $D(z_0,R)$ (c'est ce que signifie "$f$ est analytique"). Une première étape serait de savoir ce que peuvent être les coefficients $a_n$ : il est plus facile de montrer un résultat de la forme "Soit $a_n = \ldots$, montrons que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ pour $z \in D(0,R)$ avec $R = \ldots$" que de montrer "il existe des $a_n$ (qu'on ne connait pas) tels que...". La Proposition 3.5 montre que si $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sur $D(z_0,R)$ alors nécessairement pour tout $r \in ]0,R[$ on doit avoir

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

Etant donnée $f$ de classe $C^1$ on va donc naturellement considérer ces coefficients et la série entière associée. Notons qu'a priori les $a_n$ dépendent de $r$ (on a montré qu'ils ne dépendaient pas de $r$ si $f$ était analytique mais pour le moment on ne le sait pas, c'est justement ce qu'on veut montrer). On notera donc $a_n(r)$ la quantité définie par le membre de droite de (3.9).

**Lemme 3.1.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $C^1$, $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0,R) \subset \Omega$. Alors pour tout $r \in ]0,R[$ la série entière $\sum a_n(r)(z-z_0)^n$, où*

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t,$$

*a un rayon de convergence au moins égal à $r$. De plus pour tout $z \in D(z_0,r)$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z-z_0)^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

Le lemme ci-dessus ne montre pas encore que la série entière $\sum a_n(r)(z-z_0)^n$ a pour somme $f(z)$. Cependant on peut reconnaitre dans le membre de droite de (3.10) l'expression qui apparait dans la formule de Cauchy (3.6). A nouveau, si $f$ était analytique on pourrait affirmer que cette quantité coincide avec $f(z)$. On montrera que cela reste vrai même si on suppose juste que $f$ est $C^1$ (voir le Lemme 3.2 ci-dessous).

**Démonstration.** La preuve est essentiellement la même que celle du Théorème 3.3.

La fonction $f$ est continue sur $C(z_0,r)$ donc y est bornée. Il existe donc $M_r \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0,2\pi]$ on a $|f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})| \leq M_r$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|r^n a_n(r)| \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\right|\,\mathrm{d}t \;\leq\; M_r.$$

La suite $(a_n(r)r^n)_n$ est donc bornée ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série $\sum a_n(r)(z-z_0)^n$ est au moins égal à $r$.

Soit maintenant $z \in D(z_0, r)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z-z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t \right) (z-z_0)^n \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \times \left(\frac{z-z_0}{r\mathrm{e}^{it}}\right)^n \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $\left| f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \times \left(\frac{z-z_0}{r\mathrm{e}^{it}}\right)^n \right| \leq M_r \left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n$. Comme $z \in D(z_0, r)$ on a $\left|\frac{z-z_0}{r}\right| < 1$. La série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(t) = f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right) \times \left(\frac{z-z_0}{r\mathrm{e}^{it}}\right)^n$ converge donc normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut ainsi intervertir série et intégrale et la fin de la preuve est identique à celle du Théorème 3.3. □

**Lemme 3.2.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $C^1$, $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors pour tout $r \in ]0, R[$ et tout $z \in D(z_0, r)$ on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = f(z).$$

**Démonstration.** Soit $r \in ]0, R[$ et $z \in D(z_0, r)$. D'après (3.7) on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{it}}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z}\,\mathrm{d}t = 1$ et donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.$$

On souhaite donc montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.$$

On considère pour ça la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(s(z_0 + r\mathrm{e}^{it}) + (1-s)z\right)}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t,$$

et on veut donc montrer que $g(0) = g(1)$. On va en fait montrer que $g$ est constante.

La fonction $g$ est définie comme une intégrale à paramètres $g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s, t)\,\mathrm{d}t$ où $\Phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est définie par $\Phi(s, t) = \frac{f(s(z_0 + r\mathrm{e}^{it}) + (1-s)z)}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it}$. C'est une fonction de classe $C^1$ (en tant que fonction de 2 variables réelles) car composée / produit /quotient de fonctions $C^1$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (voir le cours d'Intégration du S4) garantit que la fonction $g$ est $C^1$ et que

$$g'(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'\left((s(z_0 + r\mathrm{e}^{it}) + (1-s)z\right) r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Si $s \neq 0$ on reconnait alors sous le signe intégrale la dérivée (par rapport à la variable de $t$) de la fonction $t \mapsto \frac{1}{is} f\big((s(z_0 + re^{it}) + (1-s)z\big)$. De plus cette dernière fonction prend la même valeur en $t = 0$ et $t = 2\pi$ (la fonction $t \mapsto e^{it}$ est $2\pi$-périodique), donc pour $s \neq 0$ on a

$$g'(s) \;=\; \frac{1}{2i\pi s}\left[f\left((s(z_0 + re^{it}) + (1-s)z\right)\right]_{t=0}^{2\pi} \;=\; 0.$$

On vérife par ailleurs facilement que $g'(0) \;=\; \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f'(z)\, re^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; 0$. La fonction $g'$ est nulle sur $[0,1]$ donc $g$ est constante et en particulier

$$g(1) = g(0) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; f(z).$$

□

En combinant les deux lemmes précédents on obtient donc que pour tout $r \in ]0, R[$ et tout $z \in D(z_0, r)$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z - z_0)^n \;=\; f(z)$, i.e. on a montré que $f$ était bien DSE en $z_0$ puisqu'on a trouvé un disque de rayon non nul (n'importe quel $r < R$ convient) dans lequel $f$ s'écrit comme la somme d'une série entière. On peut en déduire finalement que les $a_n(r)$ ne dépendent pas de $r$ et que ce développement est valable dans tout $D(z_0, R)$.

En effet, puisque $f$ est DSE en $z_0$, par unicité du développement en série entière les coefficients de ce développement ne dépendent pas du choix de $r < R$ et on peut les noter simplement $a_n$. Enfin, si $z \in D(z_0, R)$ il suffit de choisir $r \in ]|z - z_0|, R[$ (de façon à ce que $z \in D(z_0, r)$) pour s'assurer que la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge. La série converge donc dans tout $D(z_0, R)$ ce qui garantit bien que son rayon de convergence est au moins égal à $R$. En résumé on a montré le théorème suivant.

**Théorème 3.4.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $C^1$, $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int}\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de $r \in ]0, R[$,*
2. *la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $R$,*
3. *pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.*

*Par conséquent la fonction $f$ est analytique sur $\Omega$ (donc $C^\infty$) et pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $R$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ on a*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \;=\; a_n \;=\; \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right) e^{-int}\,\mathrm{d}t, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall\, 0 < r < R. \tag{3.11}$$

On peut tout de suite en déduire que dès que $f$ est $C^1$, comme elle est analytique, en plus d'être $C^\infty$ elle vérifie les résultats montrés dans les sections précédentes : principe des zéros isolés, du prolongement analytique et formules de la moyenne et de Cauchy. On peut, par exemple, également en déduire une autre preuve de la Proposition 1.16.

**Démonstration de le Proposition 1.16.** Puisque $f'$ est constante égale à 0 c'est une fonction continue, i.e. $f$ est $C^1$. La fonction $f$ est donc analytique sur $\Omega$ qui est un domaine.

Comme $f'$ est nulle toutes les dérivées successives de $f$ sont nulles aussi et la fonction $f$ est donc constante, voir la Remarque 3.2. $\square$

On a montré dans la Section 3.1 que la somme et le produit de fonctions analytiques étaient analytiques. On n'a cependant pas parlé du quotient ni de la composée. Cela reste bien entendu vrai mais la preuve directement à partir de la définition de fonction analytique n'est pas immédiate à écrire. Avec le théorème précédent ça devient presque évident.

**Proposition 3.6.** *1. Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ analytiques telles que $g$ ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est analytique sur $\Omega$.*

*2. Soient $f : \Omega_f \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \to \mathbb{C}$ analytiques et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est analytique sur $\Omega_f$.*

**Démonstration.** La preuve est la même dans les deux cas. Comme $f$ et $g$ sont analytiques elles sont $C^1$. Donc $\frac{f}{g}$, resp. $g \circ f$, est $C^1$ et donc analytique d'après le Théorème 3.4. $\square$

Lorsqu'on a une fonction analytique elle est, par définition, DSE en tout point $z_0$ de son ensemble de définition. Par contre on ne sait rien a priori sur le rayon de convergence du développement en $z_0$. Le théorème ci-dessus permet de préciser celui-ci.

**Proposition 3.7.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ est tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ alors le rayon de convergence du DSE de $f$ en $z_0$ est au moins égal à $R$, i.e. (3.1) est vraie sur tout disque $D(z_0, R)$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$.*

**Démonstration.** Soit $z_0 \in \Omega$ et $R$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Si $f$ est analytique elle est $C^1$ donc d'après le Théorème 3.4 DSE en $z_0$ avec rayon de convergence au moins $R$. $\square$

**Exemple 3.6.** *La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$. On a vu dans l'Exemple 3.4 que son DSE en $z_0$ avait pour rayon de convergence $|z_0|$. Le disque $D(z_0, |z_0|)$ est bien le plus grand disque centré en $z_0$ et inclus dans $\mathbb{C}^*$.*

On revient enfin sur la formule de Cauchy (Théorème 3.3) en précisant pour quels rayons celle-ci a lieu. On a vu, pour les fonctions analytiques et donc désormais pour les fonctions $C^1$, que c'était pour tout rayon $r$ inférieur au rayon de convergence du DSE de $f$ en $z_0$. On a donc la version suivante

**Théorème 3.5.** *[Formule de Cauchy] Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $C^1$, $z_0 \in \Omega$ et $R$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors pour tout $r \in ]0, R[$ on a, pour tout $z \in D(z_0, r)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} \, dt. \tag{3.12}$$

**Remarque 3.7.** *Le membre de droite de (3.12) a en fait un sens dès que $z_0 + re^{it} - z \neq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$, i.e. $z \notin C(z_0, r)$. Si $z \in D(z_0, r)$ le théorème affirme qu'il est égal à $f(z)$. Le même raisonnement que celui fait dans la preuve du Lemme 3.2 montre que la fonction définie sur $[0, 1]$ par*

$$g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(s(z_0 + re^{it}) + (1 - s)z\right)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} \, dt$$

*est constante même si $z$ est à l'extérieur du cercle $C(z_0,r)$, i.e. $|z-z_0|>r$. Si $z\in D(z_0,r)$ on a vu alors que $g(0)=f(z)$. Si par contre $|z-z_0|>r$ on peut montrer qu'alors $g(0)=0$. En effet, on a*

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{f(z)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z_0+r\mathrm{e}^{it}-z}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{f(z)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}\times\frac{1}{1-\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{f(z)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}\right)^n\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

*La convergence normale de la série de fonction* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}\right)^n$ *sur* $[0,2\pi]$ *(faites-le) garantit qu'on peut, là encore, intervertir série et intégrale. On a ainsi*

$$g(0) = -\frac{f(z)}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}\right)^n\mathrm{d}t = -\frac{f(z)}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{z-z_0}\right)^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t,$$

*et on vérifie facilement que pour tout $n\geq 1$ on a* $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t=0$. *Finalement $g(0)=0$ et donc pour tout $z$ tel que $|z-z_0|>r$ on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)}{z_0+r\mathrm{e}^{it}-z}r\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t=0. \tag{3.13}$$

*On reviendra sur la formule de Cauchy et sur (3.13) dans la Section 4.4.*

## 3.5 Théorème de Liouville et principe du maximum

On termine ce chapitre avec deux résultats importants sur les fonctions de classe $C^1$, le Théorème de Liouville et le principe du maximum.

### 3.5.1 Théorème de Liouville

**Théorème 3.6** (Liouville). *Si $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est de classe $C^1$ et bornée alors $f$ est constante.*

**Remarque 3.8.** *Ce résultat est totalement faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si on suppose qu'elles sont analytiques. La fonction $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est analytique et bornée mais n'est pas constante.*

**Démonstration.** Soit $n\geq 1$. Comme $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{C}$, d'après le Théorème 3.4 appliqué en $z_0=0$, pour tout $r>0$ (on a ici $R=+\infty$ puisque $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{C}$ tout entier) on a

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ ($f$ est bornée par hypothèse). On a donc, pour tout $r > 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \;\leq\; \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \mathrm{e}^{-int} \right| \,\mathrm{d}t \;\leq\; \frac{Mn!}{r^n}.$$

En faisant tendre $r$ vers l'infini (l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $r > 0$) on en déduit que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est constante égale à $f(0)$. $\square$

On donne comme application du théorème de Liouville une (des nombreuses) démonstration du théorème de D'Alembert-Gauss, aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre.

**Théorème 3.7** (D'Alembert-Gauss)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors $P$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

**Démonstration.** On raisonne par contraposition en supposant que $P$ n'a aucune racine et en montrant que alors $P$ est constant. La fonction $z \mapsto P(z)$ est $C^1$ sur $\mathbb{C}$ (elle est même évidemment analytique) et ne s'annule pas donc la fonction $f = \frac{1}{P}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{C}$. Il suffit alors de montrer que $f$ est bornée. D'après le théorème de Liouville elle sera constante donc la fonction $P$ le sera aussi. On écrit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ avec $a_n \neq 0$ (tous les coefficients ne sont pas nuls sinon $P$ serait nul). On a, pour $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{1}{P}(z) = \frac{1}{z^n}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)^{-1}$$

Comme $a_n \neq 0$ on en déduit que $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. Il existe donc $R > 0$ tel que si $|z| > R$ on a $|f(z)| \leq 1$. Par ailleurs $\overline{D}(0, R)$ est compact et la fonction $f$ est continue donc il existe $M \geq 0$ tel que si $|z| \leq R$ on a $|f(z)| \leq M$. Finalement pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \leq \max(1, M)$. $f$ est donc bien bornée.

### 3.5.2 Principe du maximum

**Proposition 3.8.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $C^1$. Alors pour tous $z_0 \in \Omega$, $R$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $0 < r < R$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right|^2 \,\mathrm{d}t. \tag{3.14}$$

**Démonstration.** Soit $z_0 \in \Omega$, $R$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $r \in ]0, R[$. D'après le Théorème 3.4 pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ avec $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

La Proposition 2.5 assure que la suite de fonctions $(f_N)_N$ définies par $f_N(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n$ converge uniformément vers $f$ sur $\overline{D}(z_0, r)$ et donc en particulier sur $C(z_0, r)$. Autrement dit la suite de fonctions $(g_N)_N$ définies sur $[0, 2\pi]$ par $g_N(t) = f_N\left(z_0 + re^{it}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n r^n \mathrm{e}^{int}$ converge uniformément vers $g(t) = f\left(z_0 + re^{it}\right)$. On vérifie alors que le membre de droite de

(3.14) est $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^2\,dt$ tandis que le membre de gauche est $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_N(t)|^2\,dt$. En effet, pour tout $N$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_N(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{g_N(t)}g_N(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^N\sum_{m=0}^N\overline{a_nr^n\mathrm{e}^{int}}a_mr^m\mathrm{e}^{imt}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^N\sum_{m=0}^N\overline{a_n}a_mr^{n+m}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(m-n)t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On calcule facilement que $\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(m-n)t}\,\mathrm{d}t=2\pi$ si $n=m$ et vaut 0 sinon. D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_N(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^N\overline{a_n}a_nr^{2n} = \sum_{n=0}^N|a_n|^2r^{2n}$$

et on a donc bien $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_N(t)|^2\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^\infty|a_n|^2r^{2n}$.

Pour montrer (3.14) il faut donc justifier que $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_N(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(t)|^2\,\mathrm{d}t$. Il suffit pour cela de montrer que la suite de fonctions $(|g_N|^2)_N$ converge uniformément vers $|g|^2$, sachant que $(g_N)_N$ converge uniformément vers $g$. Pour tout $t\in[0,2\pi]$ on a

$$\begin{aligned}\left||g_N(t)|^2-|g(t)|^2\right| &= |\overline{g_N}(t)g_N(t)-\overline{g}(t)g(t)|\\ &= |(\overline{g_N}(t)-\overline{g}(t))\,g_N(t)+\overline{g}(t)\,(g_N(t)-g(t))|\\ &\le |\overline{g_N}(t)-\overline{g}(t)|\times|g_N(t)|+|\overline{g}(t)|\times|g_N(t)-g(t)|\\ &= |g_N(t)-g(t)|\times(|g_N(t)|+|g(t)|)\\ &\le |g_N(t)-g(t)|\times(|g_N(t)-g(t)|+2|g(t)|).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup_{t\in[0,2\pi]}\left||g_N(t)|^2-|g(t)|^2\right|\le\sup_{t\in[0,2\pi]}|g_N(t)-g(t)|\times\left(\sup_{t\in[0,2\pi]}|g_N(t)-g(t)|+2\sup_{t\in[0,2\pi]}|g(t)|\right),$$

et comme $\lim_{N\to\infty}\sup_{t\in[0,2\pi]}|g_N(t)-g(t)|=0$ (c'est la convergence uniforme de $g_N$ vers $g$) on a bien $\lim_{N\to\infty}\sup_{t\in[0,2\pi]}\left||g_N(t)|^2-|g(t)|^2\right|\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}0$, i.e. $|g_N|^2$ converge uniformément vers $|g|^2$. □

**Théorème 3.8.** *[Principe du maximum] Soit $\Omega$ un domaine et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ de classe $C^1$. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0$ alors $f$ est constante.*

**Remarque 3.9.** *Encore une fois ce résultat est totalement faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si la fonction est analytique comme le montre l'exemple de la fonction* sin.

**Démonstration.** Supposons que $|f|$ admette un maximum local en $z_0$. Il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \overline{D}(z_0, r)$ on a $|f(z_0)| \geq |f(z)|$. En particulier pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ et donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right|^2 \mathrm{d}t \ \leq \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 \,\mathrm{d}t = |f(z_0)|^2.$$

D'après (3.14) on a donc $|f(z_0)|^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n} \leq |f(z_0)|^2$. On en déduit que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc, puisque $f$ est $C^1$ et donc analytique, $f$ est constante égale à $f(z_0)$ d'après la Proposition 3.4. $\square$

**Définition 3.4.** *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ on appelle frontière, ou bord, de $\Omega$ l'ensemble $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$. En particulier si $\Omega$ est ouvert on a $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.*

**Exemple 3.7.** *Si $\Omega = D(z_0, R)$ alors $\partial\Omega = C(z_0, R)$.*

**Théorème 3.9.** *[Principe du maximum, version globale] Soit $\Omega$ un domaine borné et $f$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe $C^1$ sur $\Omega$. Alors $f$ est bornée et $\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$. Si de plus il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$ alors $f$ est constante.*

Si on a une fonction continue sur un compact $K$ on sait d'après le Théorème 1.2 que $|f|$ admet un maximum. Ce que dit le principe du maximum c'est que, si $K$ est de la forme $K = \overline{\Omega}$ avec $\Omega$ ouvert et qu'en plus $f$ est $C^1$ sur $\Omega$, alors le maximum de $|f|$ est atteint sur le bord de $\Omega$, et uniquement sur le bord sauf si $f$ (et pas seulement $|f|$) est constante.

**Démonstration.** $\Omega$ est borné donc, d'après le Corollaire 1.2, $\overline{\Omega}$ est compact. Comme $f$ est continue le Théorème 1.2 assure que $f$ est bornée et que $|f|$ admet un maximum. Le même argument prouve que $|f|$ admet un maximum sur $\partial\Omega$. Cet ensemble est en effet fermé, c'est l'intersection des deux fermés $\overline{\Omega}$ et $\Omega^c$, et borné puisque inclus dans $\overline{\Omega}$ donc compact.

Comme $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$ on a évidemment $\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \geq \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$. On montre l'autre inégalité. Soit $z_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $|f(z_0)| = \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$. On a soit $z_0 \in \partial\Omega$ soit $z_0 \in \Omega$. Si $z_0 \in \partial\Omega$ on a alors

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = |f(z_0)| \leq \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|.$$

Si par contre $z_0 \in \Omega$ alors $z_0$ est un maximum local de $f : \Omega \to \mathbb{C}$. D'après le Théorème 3.8 on en déduit que $f$ est constante sur $\Omega$ et donc par continuité elle est constante sur $\overline{\Omega}$. En effet supposons que $f(z) = C$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $z \in \overline{\Omega}$, alors il existe $(z_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \to z$ mais $f(z_n) = C$ pour tout $n$ et comme $f$ est continue elle converge vers $f(z) = \lim f(z_n) = C$. Si $f$ est constante sur $\overline{\Omega}$ on a évidemment $\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$.

Finalement l'argument ci-dessus montre bien que si $z_0 \in \Omega$ est tel que $|f(z_0)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$ alors $f$ est constante. $\square$

# CHAPITRE 4

# INTÉGRALES ET PRIMITIVES

On s'est intéressé jusqu'ici aux propriétés des fonctions dérivables, et surtout $C^1$, d'une variable complexe. On va maintenant s'intéresser à la question de la “réciproque”, celle de l'existence de primitives d'une fonction $f$ donnée (dans $\mathbb{R}$ il suffit que $f$ soit continue pour avoir une primitive) et à la notion étroitement liée d'intégrale le long d'un chemin.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue et supposons que $f$ admette une primitive $F$. Dans ce cas $F$ est dérivable avec $F' = f$, et comme $f$ est continue $F$ est $C^1$ et donc analytique. Sa dérivée $f$ est donc aussi analytique, en particulier dérivable. Une fonction continue qui n'est pas dérivable, comme la fonction $f(z) = \bar{z}$, ne peut donc pas avoir de primitive. Cependant même une fonction analytique n'a pas forcément de primitive (du moins sur tout son ensemble de définition). On en a vu un exemple dans la Section 2.4, la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est définie et analytique sur $\Omega = \mathbb{C}^*$ mais n'y admet pas de primitive, voir la Remarque 2.15.

Afin de voir comment trouver une primitive d'une fonction $f$ donnée on peut se rappeler ce qu'on sait dans $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, avec $I$ un intervalle, et $x_0 \in I$ alors la fonction définie sur $I$ par $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $f$. L'idée est de faire la même chose dans $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ avec $\Omega$ un domaine et $z_0 \in \Omega$, pour tout $z \in \Omega$ on choisit un chemin $\gamma$ allant de $z_0$ à $z$ (un tel $\gamma$ existe puisque $\Omega$ est un domaine donc connexe par arcs) et on “définit” l'intégrale de $f$ le long du chemin $\gamma$, i.e. $F(z) = \displaystyle\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w$. Il y a alors immédiatement plusieurs questions qui se posent :

1. Que veut dire cette intégrale ?
2. Une fois qu'on aura défini une telle intégrale, celle-ci dépend-elle du choix du chemin $\gamma$ reliant $z_0$ à $z$ ? Si $F(z)$ dépend du choix du chemin $\gamma$ pourquoi y en aurait-il un meilleur qu'un autre ? Remarquons que ce problème ne se pose pas dans $\mathbb{R}$ puisque pour aller de $x_0$ à $x$ il n'y a qu'un chemin : le segment d'extrêmités $x_0$ et $x$. On va voir que dans $\mathbb{C}$ ce n'est pas aussi évident et que l'intégrale peut dépendre du choix du chemin.
3. Si cette intégrale ne dépend pas du chemin, définit-on ainsi une primitive de $f$ ?

On obtiendra au passage comme conséquence que toute fonction holomorphe (dérivable) est automatiquement $C^1$, et donc analytique. Ainsi tous les résultats du chapitre précédent resteront vrais en remplaçant l'hypothèse “$f$ est $C^1$” par “$f$ est holomorphe”.

## 4.1 Intégrale le long d'un chemin

**Définition 4.1.** *1. On appelle* chemin *toute application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et $C^1$ par morceaux. L'image du chemin $\gamma$ est l'ensemble $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset \mathbb{C}$.*

*2. Un chemin est dit* fermé *si $\gamma(a) = \gamma(b)$, i.e. les points de départ et d'arrivée sont identiques.*

*3. Un chemin est dit* simple *si $\gamma$ est injectif sur $[a,b[$, i.e. mis à part éventuellement à ses extrêmités $\Gamma$ ne passe pas deux fois par le même "point de $\mathbb{C}$".*

*4. Un chemin fermé simple est appelé un* lacet.

**Exemple 4.1.** *1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ alors $\gamma$ est un lacet dont l'image est le cercle $C(z_0, r)$ parcouru dans le sens trigonométrique.*

*2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_0 + re^{-it}$ alors $\gamma$ est un lacet dont l'image est le cercle $C(z_0, r)$ parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique.*

*3. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2$ alors $\gamma$ est un chemin simple dont l'image est le segment $[z_1, z_2]$ (parcouru de $z_1$ vers $z_2$).*

**Définition 4.2.** *Soit $\Omega$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin dont l'image est incluse dans $\Omega$, i.e. tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$. On appelle intégrale de $f$ le long de $\gamma$ la quantité*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

**Remarque 4.1.** *Lorsque $\gamma$ est de classe $C^1$ il n'y a pas de problème dans la définition ci-dessus. Lorsque la fonction $\gamma$ est seulement $C^1$ par morceaux il existe une subdivision $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ telle que $\gamma$ soit $C^1$ sur chaque $]t_k, t_{k+1}[$ et dont la restriction à chacun de ces intervalles est prolongeable en une fonction de classe $C^1$ sur $[t_k, t_{k+1}]$. En particulier $\gamma'(t)$ n'est pas forcément définie aux points $t_k$. L'intégrale (4.1) est alors à comprendre dans le sens*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

*où avec un léger abus de notation, pour chaque $k$, la fonction $\gamma'$ désigne le prolongement par continuité à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ de la fonction $\gamma'$ a priori définie sur $]t_k, t_{k+1}[$.*

La définition (4.1) est assez naturelle. Le long du chemin $\gamma$ on a $z = \gamma(t)$ et tout se passe "comme si" on faisait le chemin de variable $z = \gamma(t)$, le $\mathrm{d}z$ donnant alors le $\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ comme pour les changements de variables dans les intégrales dans $\mathbb{R}$. Attention, ce n'est cependant pas un changement de variable qu'on fait ici mais bien la définition de la quantité $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

**Exemple 4.2.** *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma$ le segment d'extrêmités $\alpha$ et $\beta$. On peut alors paramétrer ce segment par $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto \alpha + t(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}$. Etant donnée une fonction continue $f$ on a alors, puisque $\gamma'(t) = \beta - \alpha$ pour tout $t$,*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 f\big(\alpha + t(\beta-\alpha)\big) \times (\beta - \alpha)\,\mathrm{d}t \overset{s=\alpha+t(\beta-\alpha)}{=} \int_\alpha^\beta f(s)\,\mathrm{d}s.$$

*On retrouve évidemment l'intégrale usuelle entre $\alpha$ et $\beta$, parcourue dans le même sens que le segment c'est-à-dire en allant de $\alpha$ vers $\beta$.*

*Si $\alpha < \beta$ on peut aussi paramétrer ce segment par $\gamma : [\alpha, \beta] \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$. On a alors $\gamma'(t) = 1$ pour tout $t$ et on retrouve à nouveau*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La propriété ci-dessous découle directement de la définition et la preuve est laissée à titre d'exercice.

**Proposition 4.1** (Linéarité)**.** *Soit $\Omega$ un ouvert, $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin dont l'image est incluse dans $\Omega$. Alors $\displaystyle\int_\gamma (\lambda f + g)(z)\,\mathrm{d}z = \lambda \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$.*

**Exemple 4.3.** *1) Soient $\gamma_1$ et $\gamma_2$ les chemins définis par $\gamma_1 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{-it} \in \mathbb{C}$. L'image de $\gamma_1$ est le quart de cercle de centre $0$ et de rayon $r$ partant du point d'affixe $r$ et allant au point d'affixe $ir$ dans le sens trigonométrique (on parle aussi de sens direct) tandis que l'image de $\gamma_2$ est le trois-quart de cercle de centre $0$ et de rayon $r$ partant du point d'affixe $r$ et allant au point d'affixe $ir$ dans le sens inverse du sens trigonométrique (on parle de sens indirect). Leurs images $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ sont incluses dans $\mathbb{C}^*$. Soit $f : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$. On a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r\mathrm{e}^{it}} \times ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = i\frac{\pi}{2},$$

*tandis que*

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{3\pi/2} \frac{1}{r\mathrm{e}^{-it}} \times -ir\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t = -i\frac{3\pi}{2}.$$

*On peut voir sur cet exemple que l'intégrale de $f$ entre les deux points d'affixes respectives $r$ et $ir$ dépend a priori du chemin choisi puisque les intégrales le long de $\gamma_1$ et de $\gamma_2$ sont différentes.*

*2) Considérons maintenant les chemins $\gamma_3 : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{i2t} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_4 : \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{-it} \in \mathbb{C}$. L'image de $\gamma_3$ est la même que celle de $\gamma_1$ tandis que celle de $\gamma_4$ est la même mais parcourue dans le sens inverse. On calcule alors*

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{r\mathrm{e}^{i2t}} \times 2ir\mathrm{e}^{i2t}\,\mathrm{d}t = i\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{-it}} \times -ir\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t = -i\frac{\pi}{2}.$$

*On peut voir que l'intégrale le long de $\gamma_3$ est la même que pour $\gamma_1$ (les images des chemins sont les mêmes et parcourues dans le même sens) tandis que celle le long de $\gamma_4$ en est l'opposée (l'image est la même mais parcourue dans le sens inverse).*

*3) On considère enfin les chemins $\gamma_5 : [0, 2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_6 : [0, 4\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$. Leurs images sont le cercle $C(0, r)$ parcouru dans le sens trigonométrique, une fois pour $\gamma_5$ et deux fois pour $\gamma_6$. On calcule facilement cette fois que $\displaystyle\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi$ et $\displaystyle\int_{\gamma_6} f(z)\,\mathrm{d}z =$*

$4i\pi = 2\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z$. *Le fait de parcourir deux fois le cercle a pour effet de compter double l'intégrale de* $f$.

Les propriétés 2. et 3. observées dans l'exemple ci-dessus sont assez naturelles et ne sont pas un cas particulier.

**Définition 4.3.** *Soient* $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ *et* $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ *deux chemins. On dit que* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$ *sont*

1. équivalents *s'il existe* $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ *bijective* $C^1$ *strictement croissante telle que* $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. *Les images de* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$ *sont les même, parcourues dans le même sens.*
2. opposés *s'il existe* $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ *bijective* $C^1$ *strictement décroissante telle que* $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. *Les images de* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$ *sont les même mais parcourues dans le sens inverse.*

**Définition 4.4.** *Si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *est un chemin on notera* $\gamma_{\mathrm{inv}} : [a, b] \to \mathbb{C}$ *le chemin défini par* $\gamma_{\mathrm{inv}}(t) = \gamma(a + b - t)$. *L'image de* $\gamma_{\mathrm{inv}}$ *est la même que celle de* $\gamma$ *mais parcourue dans le sens inverse.*

**Proposition 4.2.** *Soit* $\Omega$ *un ouvert,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *continue et* $\gamma_1, \gamma_2$ *deux chemins d'images incluses dans* $\Omega$.

1. *Si* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$ *sont équivalents alors* $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.
2. *Si* $\gamma_1$ *et* $\gamma_2$ *sont opposés alors* $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$. *En particulier pour tout chemin* $\gamma$ *on a* $\int_{\gamma_{\mathrm{inv}}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.

**Remarque 4.2.** *La seconde propriété est l'analogue de* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ *pour les intégrales dans* $\mathbb{R}$.

**Démonstration.** On fait la preuve dans le cas où $\gamma_1, \gamma_2$ sont de classe $C^1$. S'ils ne sont que $C^1$ par morceaux la preuve est similaire mais il faut découper l'intégrale par rapport à des subdivisions adaptées et utiliser la relation de Chasles. La preuve découle simplement de la formule de changement de variable pour les intégrales dans $\mathbb{R}$.

Soient donc $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ et $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ bijective de classe $C^1$ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &\overset{\text{def}}{=} \int_{a_1}^{b_1} f\big(\gamma_1(t)\big)\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\gamma_1=\gamma_2\circ\varphi}{=} \int_{a_1}^{b_1} f\big(\gamma_2(\varphi(t))\big) \times \varphi'(t)\gamma_2'(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \\
&\overset{s=\varphi(t)}{=} \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} f\big(\gamma_2(s)\big)\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Si $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont équivalents on choisit $\varphi$ comme ci-dessus strictement croissante. On a alors $\varphi(a_1) = a_2$ et $\varphi(b_1) = b_2$ et donc

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{a_2}^{b_2} f\big(\gamma_2(s)\big)\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Si par contre $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont opposés on choisit $\varphi$ comme ci-dessus strictement décroissante. On a alors $\varphi(a_1) = b_2$ et $\varphi(b_1) = a_2$ et donc

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{b_2}^{a_2} f\big(\gamma_2(s)\big)\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{a_2}^{b_2} f\big(\gamma_2(s)\big)\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

$\square$

On est parfois amené à décomposer un chemin en plusieurs morceaux. On a alors la propriété suivante qui est l'analogue de la relation de Chasles.

**Proposition 4.3.** *Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ et $\gamma : [a,c] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \leq b$ et $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ sinon. Si $\Omega$ est un ouvert tel que $\gamma([a,c]) \subset \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue alors*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

*Le chemin $\gamma$ s'appelle la concaténation des chemins $\gamma_1$ et $\gamma_2$.*

**Corollaire 4.1.** *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet et $\gamma_n$ le chemin fermé constitué de $n \in \mathbb{N}$ copies de $\gamma$, i.e. l'image de $\gamma_n$ est la même que celle de $\gamma$ mais parcouru $n$ fois dans le même sens. Alors pour tout ouvert $\Omega$ tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$ et toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on a $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = n\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.*

**Exercice 4.1.** *Démontrez la proposition et le corollaire ci-dessus.*

Une autre propriété courante de l'intégrale pour les fonctions de variable(s) réelle(s) est l'inégalité triangulaire. Ici il faut faire un peu plus attention. On ne peut pas simplement comparer $\left|\displaystyle\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ et $\displaystyle\int_{\gamma} |f(z)|\,\mathrm{d}z$ puisque cette dernière quantité est a priori un nombre complexe (le "d$z$" est complexe). Prenez par exemple la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ et $\gamma$ le quart de cercle comme dans l'Exemple 4.3. On a alors

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi/2} \frac{1}{re^{it}} \times ire^{it}\,\mathrm{d}t\right| = \left|i\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2},$$

tandis que

$$\int_{\gamma} |f(z)|\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} ire^{it}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{it}\right]_0^{\pi/2} = i - 1.$$

L'inégalité $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$ n'a pas de sens. Par ailleurs même l'inégalité $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \left|\int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z\right|$, qui elle a un sens, est fausse puisque $\frac{\pi}{2} > |i-1| = \sqrt{2}$. Si on veut une inégalité du type inégalité triangulaire il faut d'abord choisir un paramétrage et on peut alors écrire

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))| \times |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On utilisera régulièrement ce type de majoration par la suite, voir par exemple l'application à la fin de la Section 4.4.

La présence du terme $|\gamma'(t)|$, au lieu de $\gamma'(t)$, fait qu'on ne reconnait pas dans cette dernière intégrale une intégrale le long d'un chemin. En majorant, pour tout $t \in [a,b]$, la quantité $|f(\gamma(t))|$ par sa borne supérieure on en déduit

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sup_{t\in[a,b]} \big|f\big(\gamma(t)\big)\big| \times \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{4.2}$$

La dernière intégrale ne dépend que du chemin $\gamma$ et a une interprétation géométrique naturelle.

**Définition 4.5.** *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. On appelle longueur de $\gamma$ la quantité $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.*

**Remarque 4.3.** *Si $\gamma$ n'est pas $C^1$ mais seulement $C^1$ par morceaux il faut comprendre la définition ci-dessus comme pour (4.1), c'est-à-dire en découpant l'intégrale selon une subdivision adaptée à $\gamma$.*

Avec cette définition l'inégalité (4.2) se réécrit simplement.

**Proposition 4.4.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sup_{t\in[a,b]} \big|f\big(\gamma(t)\big)\big| \times L(\gamma).$$

Si $\Gamma = \gamma([a,b])$ on s'attend naturellement à ce que sa longueur ne dépendent pas du choix du paramétrage. On a en effet :

**Proposition 4.5.** *Si $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont équivalents ou opposés alors $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.*

**Exercice 4.1.** Démontrer la proposition ci-dessus.

**Exemple 4.4.** *Si $[z_1, z_2]$ est un segment on peut prendre $\gamma : [0,1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$. On a $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ et on trouve donc, évidemment, $L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1|\,\mathrm{d}t = |z_2 - z_1|$.*

**Remarque 4.4.** *En paramétrant le cercle $C(z_0, r)$ par $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ on retrouve que la longueur du cercle est*

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left|ire^{it}\right|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r.$$

*Remarquez que pour démontrer ça on a utilisé la construction de $\pi$ telle que donnée dans le Théorème 2.1 et les propriétés qui en ont suivi. La définition de $\pi$ donnée dans le Théorème 2.1 coincide donc bien avec la définition usuelle et reliant le rayon d'un cercle avec son périmètre. Plus généralement, si $\theta \in [0, 2\pi]$, l'arc de cercle de centre $0$ et allant du point d'affixe $1$ au point d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta}$ est paramétré par $\gamma : [0, \theta] \ni t \mapsto \mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ et sa longueur est*

$$\int_0^\theta \left| i\mathrm{e}^{it} \right| \mathrm{d}t = \theta.$$

## 4.2 Fonctions holomorphes, primitives et analyticité

On a vu dans l'Exemple 4.3 que l'intégrale d'une fonction pouvait a priori dépendre du chemin parcouru et pas seulement de ses extrêmités. Cependant si $f$ admet une primitive ce n'est plus le cas.

**Proposition 4.6.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une primitive $F$. Alors pour tout chemin $\gamma : [a, b] \to \Omega$ on a*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

*En particulier si $\gamma$ est un lacet alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

**Remarque 4.5.** *On retrouve ici l'idée que pour calculer l'intégrale d'une fonction $f$ il "suffit" de faire la différence des valeurs d'une primitive $F$ de $f$ au bord du chemin, à condition qu'une telle primitive existe...*

**Démonstration.** Soit $F$ une primitive de $f$ et $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un chemin. A nouveau on fait la preuve dans le cas où $\gamma$ est $C^1$ (sinon il faut découper selon une subdivision adaptée). La fonction $F \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est alors de classe $C^1$ (composée de fonctions $C^1$) et on a $(F \circ \gamma)'(t) = f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)$. On en déduit que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; [F \circ \gamma(t)]_a^b \;=\; F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

**Remarque 4.6.** *Même si on ne connait pas de primitive de $f$ le fait qu'elle en ait une garantit que l'intégrale le long d'un lacet est nulle. Cette propriété jouera un rôle important par la suite.*

**Exemple 4.5.** *Si on reprend l'Exemple 4.3 puisque $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \neq \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ alors que $\gamma_1$ et $\gamma_2$ ont les même extrêmités cela prouve qu'il n'y a pas d'ouvert contenant $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sur lequel $f(z) = \frac{1}{z}$ admette une primitive.*

**Exemple 4.6.** *Soit $f(z) = \bar{z}$ définie sur $\mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ un paramétrage du cercle $C(0, r)$ parcouru dans le sens trigonométrique. On a alors*

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{-it} \times ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = 2i\pi r^2 \neq 0.$$

*Comme $\gamma$ est un lacet on en déduit que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}$, ni même sur aucun ouvert contenant $\gamma$.*

Les deux exemples ci-dessus montrent que la question de l'existence d'une primitive n'est pas évidente. Pour la fonction $f(z) = \bar{z}$, comme on l'a vu en introduction de ce chapitre, c'est relié au fait qu'elle n'est pas dérivable alors qu'une fonction continue ne peut avoir de primitive que si elle est analytique (ou de façon équivalente $C^1$). Ce n'est cependant pas suffisant. La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$, alors que c'est une fonction analytique. Elle en a par contre sur des domaines plus petits comme on l'a vu dans la Remarque 2.15. On voit ainsi que la forme du domaine peut aussi avoir une influence. On rappelle la définition d'un ensemble étoilé, voir la Définition 1.15 à la fin de la Section 1.1.

**Définition 4.6.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. $\Omega$ est dit étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ on a $[z_0, z] \subset \Omega$. On précise parfois $z_0$ en disant que $\Omega$ est étoilé par rapport à $z_0$.*

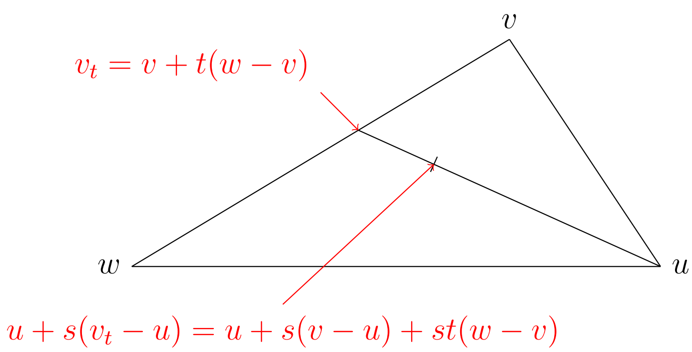
**Exemple 4.7.** *1. L'ensemble $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé. En effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$ on peut trouver $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $[z_0, z] \not\subset \mathbb{C}^*$. Il suffit de prendre $z = -z_0$.*
*2. Un disque est étoilé, il suffit de prendre comme $z_0$ le centre du disque. En fait un disque est convexe donc n'importe quel point du disque convient.*
*3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ est étoilé, et on peut prendre $z_0 = -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ (ou n'importe quel point d'argument $\theta + \pi$). En effet, si $z = re^{i\varphi} \in \Omega_\theta$ avec $r > 0$ et $\varphi \in ]\theta, \theta + 2\pi[$ il faut montrer que $[z_0, z] \subset \Omega_\theta$. Si $z_1 = (1-t)z_0 + tz \in [z_0, z]$, avec $t \in [0,1]$, n'était pas dans $\Omega_\theta$ on aurait $z_1 = Re^{i\theta}$ avec $R \geq 0$ et donc*

$$Re^{i\theta} = -(1-t)e^{i\theta} + tre^{i\varphi} \iff tre^{i\varphi} = (R+1-t)e^{i\theta}.$$

*Comme $\varphi \in ]\theta, \theta + 2\pi[$, et que $tr$ et $R+1-t$ sont positifs, on doit avoir $tr = R+1-t = 0$ ce qui n'est pas possible puisque $r > 0$, $R \geq 0$ et $t \in [0,1]$.*

**Définition 4.7.** *Soient $u, v, w \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. On note $\partial T(u,v,w) = [u,v] \cup [v,w] \cup [w,u]$ le (bord du) triangle dont les sommets sont les points $u$, $v$ et $w$. On notera aussi $T(u,v,w)$ le même triangle ainsi que son intérieur. Autrement dit*

$$T(u,v,w) = \{u + s(v-u) + st(w-v) \,|\, s,t \in [0,1]\},$$




*tandis qu'un paramétrage de $\partial T(u,v,w)$ est donné par $\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}$ avec*

$$\gamma(t) = \begin{cases} u + t(v-u) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ v + (t-1)(w-v) & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2, \\ w + (t-2)(u-w) & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Le théorème qui suit permet de caractériser les fonctions qui admettent des primitives sur des ouverts étoilés.

**Théorème 4.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert étoilé et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. $f$ admet une primitive sur $\Omega$ si et seulement si pour tout triangle $T(u, v, w) \subset \Omega$ on a $\int_{\partial T(u,v,w)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

**Remarque 4.7.** *Si $\Omega$ est étoilé il suffit de vérifier que $\partial T(u, v, w) \subset \Omega$ pour garantir que $T(u, v, w) \subset \Omega$. En effet soit $z_0$ tel que $\Omega$ soit étoilé par rapport à $z_0$. On suppose que $\partial T(u, v, w) \subset \Omega$ et on montre que $T(u, v, w) \subset \Omega$. Si $z \in T(u, v, w)$ alors la demi-droite d'origine $z_0$ et passant par $z$ coupe $\partial T(u, v, w)$ au dela de $z$ (éventuellement en $z$ si $z \in \partial T(u, v, w)$). On note $z_1$ ce point. On a donc $z \in [z_0, z_1]$. Comme $z_1 \in \partial T(u, v, w) \subset \Omega$ et que $\Omega$ est étoilé par rapport à $z_0$ on en déduit que $z \in \Omega$.*

**Démonstration.** Un triangle est un lacet donc si $f$ admet une primitive alors son intégrale le long de n'importe quel triangle est nulle d'après la Proposition 4.6.

Réciproquement on suppose que l'intégrale de $f$ est nulle le long de tout chemin triangulaire. Soit $z_0$ tel que $\Omega$ soit étoilé par rapport à $z_0$. Pour tout $z \in \Omega$ on définit $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$. Le fait que $\Omega$ soit étoilé par rapport à $z_0$ garantit que $[z_0, z] \subset \Omega$ et donc que $F(z)$ soit bien défini. On va montrer que $F$ est une primitive de $f$. On peut remarquer que cette approche est analogue à ce qu'on fait dans $\mathbb{R}$ où $\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ définit une primitive de $f$ lorsque $f$ est continue.

Il faut montrer que pour tout $z \in \Omega$ on a $\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$. Soit donc $z \in \Omega$. Pour tout $h$ tel que $[z, z + h] \subset \Omega$ (c'est le cas au moins si $h$ est dans un disque centré en 0 puisque $\Omega$ est ouvert et que $z \in \Omega$) on a

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w.$$

On considère le triangle de sommets $z$, $z_0$ et $z + h$. Par hypothèse on a

$$\int_{[z,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z_0,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z+h,z]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

et donc

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = -\frac{1}{h}\int_{[z+h,z]} f(w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_0^1 f(z + th)\,\mathrm{d}t.$$

La continuité des intégrales à paramètres (on a une intégrale de la variable réelle ici) garantit que $\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}t = f(z)$. On peut aussi se passer de ce résultat sur les intégrales à paramètres. Vous ne l'avez en fait vu que si $h$ est une variable réelle alors qu'ici $h$ est complexe. On remarque qu'une fonction constante égale à $\alpha$ a pour primitive $w \mapsto \alpha w$ et donc pour tout segment $[z_1, z_2]$ on a $\int_{[z_1,z_2]} \alpha\,\mathrm{d}w = \alpha(z_2 - z_1)$. Ainsi, en prenant $\alpha = f(z)$ et le segment $[z, z + h]$, on a

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(z)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\,\mathrm{d}w.$$

En utilisant la Proposition 4.4 on en déduit que

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| \leq \frac{1}{|h|}\sup_{w\in[z,z+h]}|f(w)-f(z)|\times L([z,z+h]) = \sup_{w\in[z,z+h]}|f(w)-f(z)|.$$

Comme $f$ est continue en $z$ cela garantit que le membre de droite tend vers 0 lorsque $h$ tend vers 0 et donc que $\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)$. □

**Remarque 4.8.** *Comme on l'a vu à travers la preuve, si on sait que $\Omega$ est étoilé par rapport à $z_0$ on peut se restreindre dans le théorème précédent aux triangles dont $z_0$ est l'un des sommets. Par ailleurs le théorème montre que, au moins dans un ouvert étoilé, si l'intégrale le long de n'importe quel triangle est nulle alors la fonction admet une primitive et donc l'intégrale le long de n'importe quel lacet est nulle : si on sait ce qu'il se passe pour les triangles on récupère ce qu'il se passe pour tous les lacets.*

Le théorème précédent a l'avantage de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur un ouvert étoilé $\Omega$ admette une primitive. Le point négatif est que cette condition semble difficile à vérifier dans la pratique : il faut calculer l'intégrale de $f$ le long de tous les triangles inclus dans $\Omega$. On va voir qu'en fait il suffit que $f$ soit dérivable pour que cette condition soit satisfaite.

**Théorème 4.2.** *[Goursat] Soit $\Omega$ un ouvert et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphe. Alors pour tous $u,v,w\in\mathbb{C}$ tels que $T(u,v,w)\subset\Omega$ on a $\int_{\partial T(u,v,w)} f(z)\,\mathrm{d}z=0$.*

**Démonstration.** Admis dans le cadre de ce cours. La démonstration se trouve en fin de chapitre dans les compléments (Section 4.5.1).

**Remarque 4.9.** *Attention, on demande que le triangle plein $T(u,v,w)$ soit inclus dans $\Omega$ et pas juste son bord, voir l'exemple ci-dessous.*

**Exemple 4.8.** *Soit $\Omega=\mathbb{C}^*$ et $f(z)=\frac{1}{z}$. La fonction $f$ est bien holomorphe sur $\Omega$. Prenons le triangle de sommets $a=1$, $b=\mathrm{e}^{i2\pi/3}$ et $c=\mathrm{e}^{i4\pi/3}$. Le bord du triangle est dans $\Omega$ mais pas son intérieur (0 est à l'intérieur du triangle). On va calculer l'intégrale de $f$ le long du triangle. On a*

$$\int_{\partial T(a,b,c)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_{[a,b]}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_{[b,c]}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_{[c,a]}\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

*Les segments $[a,b]$ et $[c,a]$ sont inclus dans $\Omega_{]-\pi,\pi[}$ sur lequel la fonction $f$ admet comme primitive, voir la Remarque 2.15, la détermination principale du logarithme. On a donc*

$$\int_{[a,b]}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_{[c,a]}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\mathrm{Log}(b)-\mathrm{Log}(a)+\mathrm{Log}(a)-\mathrm{Log}(c)=i\frac{2\pi}{3}-\left(-i\frac{2\pi}{3}\right)=i\frac{4\pi}{3}.$$

*Enfin $[b,c]$ est inclus dans $\Omega_{]0,2\pi[}$ sur lequel la fonction $f$ admet comme primitive la fonction $F(z)=\ln(|z|)+i\arg(z)$ où $\arg(z)$ est l'unique argument de $z$ dans $]0,2\pi[$. Ainsi $\int_{[b,c]}\frac{\mathrm{d}z}{z}=F(c)-F(b)=i\frac{4\pi}{3}-i\frac{2\pi}{3}=i\frac{2\pi}{3}$. Finalement on obtient $\int_{\partial T(a,b,c)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=2i\pi\neq 0$.*

*On pourra noter que la valeur de l'intégrale est $2i\pi$, la même que dans le 3. de l'Exemple 4.3. Ce n'est pas un hasard, voir la Section 4.3.*

La première conséquence du Théorème de Goursat est que dans un ouvert étoilé toutes les fonctions holomorphes ont des primitives.

**Théorème 4.3.** *Soit $\Omega$ un ouvert étoilé et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphe. Alors $f$ admet une primitive sur $\Omega$. En particulier pour tout lacet $\gamma$ dont l'image est incluse dans $\Omega$ on a* $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

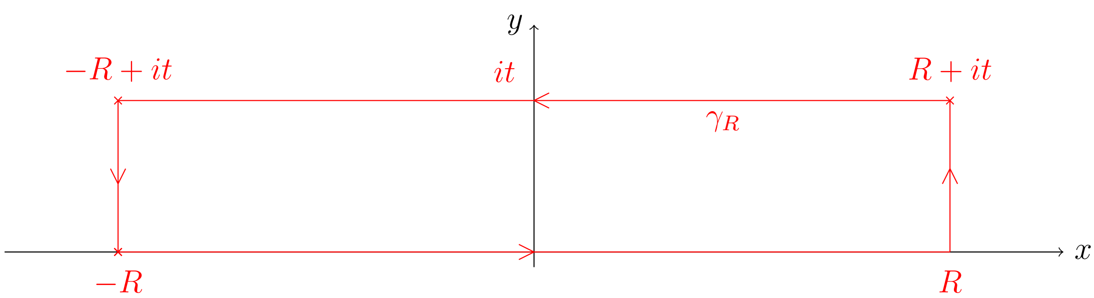
**Démonstration.** Comme $f$ est holomorphe son intégrale le long de n'importe quel triangle inclus dans $\Omega$ est nulle d'après le Théorème de Goursat. Puisque $\Omega$ est étoilé le Théorème 4.1 garantit que $f$ admet une primitive $F$ sur $\Omega$. □

**Remarque 4.10.** *L'hypothèse sur $\Omega$ est importante ! Dans l'Exemple 4.3 la fonction $f(z)=\frac{1}{z}$ est holomorphe mais son intégrale le long du cercle $C(0,1)$ n'est pas nulle. On ne dit cependant pas qu'elle est indispensable. La fonction $g(z)=\frac{1}{z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas étoilé mais son intégrale le long de n'importe quel lacet est nulle puisque $g$ admet une primitive (la fonction $-f$).*

**Corollaire 4.2.** *Soit $\Omega$ un ouvert étoilé et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphe. Pour tous $z_1,z_2\in\Omega$ et tous chemins $\gamma_1,\gamma_2$ allant de $z_1$ à $z_2$ on a* $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

**Application.** On va utiliser le Théorème 4.3 pour calculer la *transformée de Fourier* de la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Celle-ci joue un rôle important en mathématiques et en particulier en théorie des probabilités (voir le cours de Probabilités du S6). Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction intégrable, i.e. telle que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ soit convergente, on appelle transformée de Fourier de $f$ la fonction $\hat f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par $\displaystyle\hat f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-itx}f(x)\,\mathrm{d}x$. Comme $t,x\in\mathbb{R}$ on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $|\mathrm{e}^{-itx}|=1$ ce qui prouve que la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-itx}f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\hat f(t)$ est bien définie. Le préfacteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est une convention qui peut varier selon les livres.

On prend ici $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. La fonction $f$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ (vérifiez-le). On rappelle/admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}$. Afin de calculer $\hat f(t)$ on va considérer l'intégrale de la fonction $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $g(z)=\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$ le long du lacet $\gamma_R$ composé des segments de sommets $z_1=-R$, $z_2=R$, $z_3=R+it$, $z_4=-R+it$, i.e. l'image de $\gamma_R$ est un rectangle.



La fonction $g$ est holomorphe (composée de fonctions holomorphes) donc, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{[-R,R]} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[R,R+it]} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[R+it,-R+it]} g(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-R+it,-R]} g(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + \int_0^t \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s - \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^t \mathrm{e}^{-(-R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s. \quad (4.3) \end{aligned}$$

On va regarder chacun des quatre termes. Comme $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Le troisième terme s'écrit

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

et le même argument que ci-dessus montre qu'on a

$$\lim_{R\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\hat{f}(t).$$

Pour le deuxième terme on a

$$\left| \int_0^t \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s \right| \le \int_0^{|t|} \left| \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} \right| \mathrm{d}s = \int_0^{|t|} \mathrm{e}^{(-R^2+s^2)/2}\,\mathrm{d}s \le |t|\mathrm{e}^{(-R^2+t^2)/2},$$

et donc $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_0^t \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s = 0$. On montre de la même façon que le quatrième terme de (4.3) tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$. En passant à la limite $R \to +\infty$ dans (4.3) on en déduit donc que

$$0 = \sqrt{2\pi} + 0 - \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\hat{f}(t) + 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{f}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = f(t),$$

i.e. la transformée de Fourier de $f$ est elle-même.

Une seconde conséquence du Théorème de Goursat est une amélioration du Théorème 3.4 : il suffit de supposer que $f$ est holomorphe, pas besoin de demander que sa dérivée $f'$ soit continue.

**Théorème 4.4.** *Soit $\Omega$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors $f$ est analytique.*

**Démonstration.** On veut montrer que $f$ est DSE en tout $z_0 \in \Omega$. Soit donc $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ ($\Omega$ est ouvert). D'après le Théorème de Goursat pour tout triangle $T(a, b, c)$ inclus dans $D(z_0, r)$ on a $\int_{\partial T(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Comme $D(z_0, r)$ est étoilé le Théorème 4.1 garantit que $f$ admet une primitive $F$ sur $D(z_0, r)$. La fonction $F$ est $C^1$ sur $D(z_0, r)$, puisque sa dérivée est continue car dérivable, donc $F$ y est analytique. Sa dérivée $f$ est donc analytique sur $D(z_0, r)$ et en particulier elle est DSE en $z_0$. $\square$

**Remarque 4.11.** *Comme une fonction holomorphe est analytique elle vérifie toutes les propriétés vues au chapitre précédent : formule de Cauchy, zéros isolés, prolongement analytique, principe du maximum, théorème de Liouville.*

**Remarque 4.12.** *Comme on l'a vu dans le Théorème 4.3, sur un ouvert étoilé toute fonction holomorphe possède une primitive. Le théorème ci-dessus montre que cette condition est en fait nécessaire. En effet si une fonction $f$ admet une primitive $F$, alors $F$ est holomorphe donc analytique. Sa dérivée $F' = f$ est donc aussi analytique et en particulier holomorphe. Conclusion : dans un ouvert étoilé, les fonctions qui admettent des primitives sont exactement les fonctions holomorphes. Attention, on rappelle que si $\Omega$ n'est pas étoilé alors une fonction holomorphe peut ne pas avoir de primitive.*

On termine cette section avec la réciproque du Théorème de Goursat.

**Théorème 4.5.** *[Morera] Soit $\Omega$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Si pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $T(a, b, c) \subset \Omega$ on a $\displaystyle\int_{\partial T(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ alors $f$ est holomorphe.*

**Démonstration.** Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. L'ensemble $D(z_0, r)$ est étoilé donc d'après le Théorème 4.1 la fonction $f$ admet une primitive $F$ sur $D(z_0, r)$. La fonction $F$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$ donc y est analytique et donc $f$ également. En particulier $f$ est dérivable en $z_0$. C'est vrai pour tout $z_0 \in \Omega$ donc $f$ est holomorphe sur $\Omega$ tout entier. $\square$

**Remarque 4.13.** *Dans tout ce qu'on a fait dans cette section on peut généraliser un peu l'hypothèse sur $\Omega$ et remplacer la notion d'ouvert étoilé par celle d'ouvert dit* simplement connexe. *L'idée de $\Omega$ simplement connexe est qu'il n'y a pas de "trou à l'intérieur" de $\Omega$. Autrement dit, quel que soit le lacet qu'on prenne dans $\Omega$ tout ce qui est à l'intérieur du lacet est dans $\Omega$. La notion d'ouvert étoilé est amplement suffisante pour ce qu'on fera par la suite, on se restreindra donc à ce cadre plus simple à définir proprement.*

## 4.3 Indice d'un point par rapport à un chemin fermé

Le même calcul que dans l'Exemple 4.3 montre que si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{it}$ est un paramétrage du cercle $C(z_0, r)$ parcouru une fois dans le sens direct on a $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ir\mathrm{e}^{it}}{(z_0 + r\mathrm{e}^{it}) - z_0}\,\mathrm{d}t = 2i\pi$. Plus généralement on a vu, voir (3.7), que si $z \in D(z_0, r)$ on a

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = 2i\pi,$$

tandis que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ on a, voir (3.13),

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Etant donné $n \in \mathbb{Z}$ on considère cette fois $\gamma_n : [0, 2n\pi] \ni t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{it}$ si $n \geq 0$ et $\gamma_n : [2n\pi, 0] \ni t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{-it}$ si $n < 0$. On a ainsi un paramétrage du cercle $C(z_0, r)$ parcouru

$|n|$ fois, dans le sens direct si $n > 0$ et indirect si $n < 0$. En utilisant le Corollaire 4.1 et la Proposition 4.2 on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\int_{\gamma_n} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = n \times \int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = \begin{cases} 2in\pi & \text{si} \quad z \in D(z_0, r), \\ 0 & \text{si} \quad z \notin \overline{D}(z_0, r). \end{cases}$$

Autrement dit, au facteur $2i\pi$ près, l'intégrale de la fonction $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ le long de $\gamma_n$ compte le nombre de tours faits par le chemin fermé $\gamma_n$ autour de $z$ en comptant ces tours positivement s'ils sont dans le sens direct et négativement dans le sens indirect : $n$ tours si $z$ est à l'intérieur du cercle et que celui-ci est parcouru $n$ fois et 0 tours si $z$ est à l'extérieur du cercle. Cela se généralise à n'importe quel chemin fermé $\gamma$ et n'importe quel point $z$ qui n'est pas sur l'image de $\gamma$ (sinon l'intégrale considérée n'a pas de sens).

**Définition 4.8.** *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin fermé d'image $\Gamma$ et $z \notin \Gamma$. On appelle indice de $z$ par rapport à $\gamma$ la quantité*

$$\mathrm{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\mathrm{d}w}{w-z}.$$

**Remarque 4.14.** *L'indice ne dépend pas du paramétrage choisi mais uniquement de son image $\Gamma$, en prenant en compte le sens de parcours et le nombre de fois où le chemin est parcouru.*

L'interprétation de l'indice est qu'il compte le nombre de tours que $\gamma$ fait autour de $z$. Afin de comprendre l'intuition derrière on va se placer d'abord dans un cas particulier. Comme $z$ n'est pas sur l'image de $\gamma$, pour tout $t$ on peut écrire $\gamma(t) - z = r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}$ avec $r(t) = |\gamma(t) - z| > 0$ et $\theta(t)$ un argument de $\gamma(t) - z$. On va supposer que les deux fonctions $r(t)$ et $\theta(t)$ sont de classe $C^1$ (c'est facile à justifier pour $r(t)$ si $\gamma(t)$ est $C^1$, faites-le, mais ce n'est pas évident pour $\theta(t)$). Comme $\gamma$ est un chemin fermé on a $\gamma(a) = \gamma(b)$ et donc $r(a) = r(b)$ et $\theta(b) - \theta(a) = 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Comme la fonction $t \mapsto \theta(t)$ est continue l'entier $n$ compte bien le nombre total de tours fait par $\gamma$ autour de $z$, comptés positivement si on va dans le sens direct et négativement si on va dans le sens indirect. On calcule alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}(\gamma, z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{1}{r(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}} \left( r'(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)} + r(t)\theta'(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi} \left[ \ln(r(t)) + i\theta(t) \right]_a^b \\
&= \frac{1}{2i\pi} \left( \underbrace{\ln(r(b)) - \ln(r(a))}_{=0} + \underbrace{i\theta(b) - i\theta(a)}_{=2in\pi} \right) \\
&= n.
\end{aligned}$$

**Remarque 4.15.** *Si on reprend l'Exemple 4.8 ce qu'on a fait c'est de calculer l'indice de 0 par rapport au triangle $\partial T\left(0, \mathrm{e}^{i2\pi/3}, \mathrm{e}^{i4\pi/3}\right)$ parcouru une fois dans le sens direct. On a bien trouvé que cet indice était égal à 1.*

**Théorème 4.6.** *Pour tout chemin fermé $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ d'image $\Gamma$ et tout $z \notin \Gamma$ l'indice* $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$ *est un nombre entier.*

**Démonstration.** Pour simplifier on fait la preuve dans le cas où $\gamma$ est de classe $C^1$.

Pour tout $t \in [a,b]$ on considère $\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,\mathrm{d}s\right)$. La quantité dans l'exponentielle n'est rien d'autre que l'intégrale de la fonction $f(w) = \frac{1}{w-z}$ le long du chemin $\gamma_t$ obtenu comme la restriction de $\gamma$ à l'intervalle $[a,t]$. On a ainsi $\varphi(b) = \exp(2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma,z))$ et on veut donc montrer que $\varphi(b) = 1$. La fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ et vérifie

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\varphi(t).$$

On en déduit que la fonction $\psi$ définie par $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$ est $C^1$ et a pour dérivée

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t)-z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = 0.$$

La fonction $\psi$ est constante. En particulier $\psi(a) = \psi(b)$ mais comme $\gamma(a) = \gamma(b)$, puisque $\gamma$ est un chemin fermé, on en déduit qu'on a bien $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$. $\square$

On peut également facilement vérifier que étant donné un chemin fermé $\gamma$ l'indice est une fonction continue de $z$.

**Proposition 4.7.** *Soit $\gamma$ un chemin fermé d'image $\Gamma$ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Alors la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est continue sur $\Omega$. Elle est constante sur chaque sous-ensemble connexe par arcs $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Enfin si $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ est connexe par arcs et non borné alors $\mathrm{Ind}(\gamma,z) = 0$ pour tout $z \in \tilde{\Omega}$, en particulier il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{Ind}(\gamma,z) = 0$ pour tout $|z| > R$.*

**Démonstration.** A nouveau on fait la preuve dans le cas où $\gamma$ est $C^1$.

L'ensemble $\Gamma$ est l'image du compact $[a,b]$ par la fonction continue $\gamma$ donc $\Gamma$ est compact. En particulier il est fermé donc $\Omega$ est ouvert. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0,r) \subset \Omega$. La fonction $(t,z) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}$ est continue sur $[a,b] \times D(z_0,r)$, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre garantit que $\mathrm{Ind}(\gamma,z)$ est continue sur $D(z_0,r)$ et en particulier en $z_0$.

Le fait que $\mathrm{Ind}(\gamma,z)$ soit constant sur tout ensemble $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ connexe par arcs provient alors du fait que cette fonction est continue et à valeurs entières (c'est le même argument qu'on a utilisé dans la Section 2.4).

Si $\tilde{\Omega}$ n'est pas borné il existe $(z_n)_n \in \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}}$ telle que $|z_n| \to \infty$. Comme l'image $\Gamma$ de $\gamma$ est compacte elle est bornée, il existe $R \geq 0$ tel que $|\gamma(t)| \leq R$ pour tout $t \in [a,b]$. En utilisant la Proposition 4.4 on obtient, pour tout $n$ tel que $|z_n| > R$ (c'est vrai à partir d'un certain rang puisque $|z_n| \to \infty$),

$$|\mathrm{Ind}(\gamma,z_n)| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \sup_{t\in[a,b]} \frac{1}{|\gamma(t)-z_n|} \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \sup_{t\in[a,b]} \frac{1}{|z_n| - |\gamma(t)|} \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z_n|-R)}.$$

Ainsi, puisque $|z_n| \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ind}(\gamma,z_n) = 0$ mais comme la fonction $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma,z)$ est constante sur $\tilde{\Omega}$ elle est nulle.

Finalement si $R$ est comme ci-dessus alors $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ est un sous-ensemble connexe par arcs non-borné de $\Omega$ ce qui prouve le résultat. $\square$

**Remarque 4.16.** *Etant donné un ouvert $\Omega$ on peut montrer que $\Omega$ se décompose de façon unique comme une réunion disjointe de domaines, i.e. de sous-ensembles ouverts et connexes par arcs. Ces ensembles sont appelés les composantes connexes de $\Omega$. On peut alors reformuler la proposition ci-dessus en disant que l'indice est constant sur chaque composante connexe de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dans le cas présent comme $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > R\} \subset \Omega$ on en déduit qu'il existe une unique composante connexe non-bornée de $\Omega$.*

## 4.4 Formule de Cauchy - le cas général

On a vu dans le chapitre précédent la formule de Cauchy (3.12) qui relie la valeur d'une fonction $C^1$ dans un disque aux valeurs de cette fonction sur le bord du disque. Maintenant qu'on sait que toute fonction holomorphe est $C^1$ (et même analytique) cette formule reste vraie si $f$ est seulement supposée holomorphe. Plus précisément, si $f$ est holomorphe sur $D(z_0, R)$ alors pour tout $0 < r < R$ et tout $z \in D(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)}{z_0 + r\mathrm{e}^{it} - z} r\mathrm{e}^{it} \,\mathrm{d}t.$$

On a par ailleurs vu que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ alors la même intégrale est nulle. Ces intégrales sont en fait des intégrales le long du cercle $C(z_0, r)$. Si on paramètre celui-ci par $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ on constate que la formule de Cauchy peut se réécrire de la façon suivante :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w, \quad \forall z \in D(z_0, r),$$

tandis que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ on a $\displaystyle\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w = 0$. Puisque l'indice de $z$ par rapport à $C(z_0, r)$ vaut 0 ou 1 selon que $z$ est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle, on peut résumer cela sous la forme

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} \,\mathrm{d}w = f(z) \times \mathrm{Ind}\left(C(z_0, r), z_0\right), \quad \forall z \notin C(z_0, r).$$

On va voir que cette formule reste vraie dans le cas où on fait l'intégrale le long d'un lacet qui n'est pas forcément un cercle. La distinction $z$ est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle devient alors $z$ est à l'intérieur ou à l'extérieur du lacet. Si on autorise $\gamma$ à être un chemin fermé, et pas forcément un lacet, il faudra prendre en compte le nombre de tours faits par $\gamma$ autour de $z$, i.e. précisément l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma, z)$. La formule de Cauchy jouera un rôle important dans le chapitre suivant (Théorème 5.2).

**Théorème 4.7.** *[Formule de Cauchy] Soit $\Omega$ un ouvert étoilé et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si $\gamma$ est un chemin fermé dont l'image est incluse dans $\Omega$ et $z_0 \in \Omega$ n'est pas sur l'image de $\gamma$ alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = f(z_0) \times \mathrm{Ind}(\gamma, z_0). \tag{4.4}$$

**Démonstration.** On décompose $f(z) = f(z) - f(z_0) + f(z_0)$. On a alors

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z + \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z + 2i\pi f(z_0) \times \mathrm{Ind}(\gamma, z_0).$$

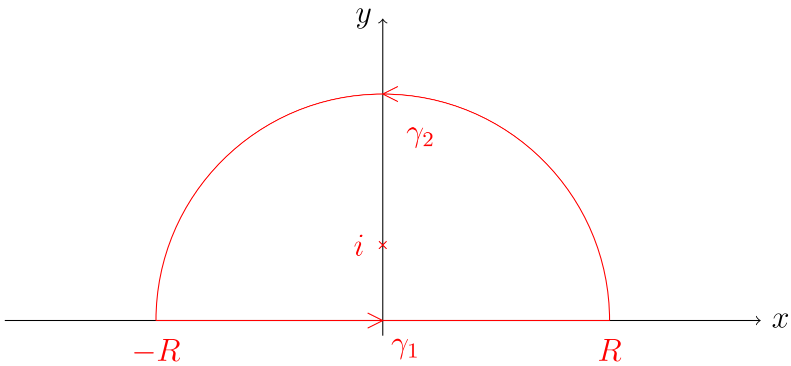
Il reste donc à montrer que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 0.$

Soit $g : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ si $z \neq z_0$ et $g(z_0) = f'(z_0)$. La fonction $g$ est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. On va montrer que $g$ est aussi dérivable en $z_0$. Ainsi $g$ sera holomorphe sur l'ouvert étoilé $\Omega$ et donc d'après leThéorème 4.3 on aura bien

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Puisque $f$ est holomorphe elle est analytique. Il existe donc $r > 0$ et $(a_n)_n$ tels que pour tout $z \in D(z_0,r)$ on ait $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ avec $a_0 = f(z_0)$ et $a_1 = f'(z_0)$. On a donc, pour tout $z \in D(z_0,r)$ avec $z \neq z_0$, $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-1}$. Par définition de $g(z_0)$ cela reste vrai en $z = z_0$. Conclusion : la fonction $g$ est DSE en $z_0$ et donc y est bien dérivable. $\square$

**Application.** On voudrait calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour ça on va calculer $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$ où $\gamma$ est le bord du demi-disque de centre 0 et rayon $R > 1$ dans le demi-plan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ et parcouru dans le sens direct.




La fonction $g(t) = \dfrac{\cos(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $|g(t)| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, donc $I$ est bien définie. De plus la fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{i,-i\}$ et le long de $\gamma_1$ on a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{parité}}{=} 2\int_0^R \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 2I.\end{aligned}$$

Par ailleurs, sur l'ouvert étoilé $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > -1\}$ la fonction $h(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z+i}$ est holomorphe et $f(z) = \dfrac{h(z)}{z-i}$ donc, d'après la formule de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{h(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \times h(i) \times \mathrm{Ind}(\gamma,i) = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

On a ainsi $\dfrac{\pi}{\mathrm{e}} = \displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ avec $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 2I$. Finalement,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi \frac{\exp\left(iR\mathrm{e}^{it}\right)}{R^2\mathrm{e}^{i2t}+1}\times iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right| &\le \int_0^\pi \frac{|\exp\left(-R\sin(t)+iR\cos(t)\right)|}{|R^2\mathrm{e}^{i2t}+1|}R\,\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^\pi \frac{\exp\left(-R\sin(t)\right)}{R^2-1}R\,\mathrm{d}t\\ &\le \frac{\pi R}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Conclusion : On a $\dfrac{\pi}{\mathrm{e}} = \displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 2I + 0$ donc $I = \dfrac{\pi}{2\mathrm{e}}$.

La formule de Cauchy se généralise pour obtenir les dérivées de la fonction $f$ à l'aide des valeurs de $f$ le long d'un lacet. On a en effet vu, voir (3.11), que si $f$ est analytique sur $D(z_0,R)$ alors pour tout $r<R$ et $n\in\mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(z_0+r\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t$. En termes d'intégrales de chemin cela s'écrit $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$. De façon plus générale on montre

**Proposition 4.8.** *[Formule de Cauchy] Soit $\Omega$ un ouvert étoilé et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphe. Si $\gamma$ est un chemin fermé dont l'image est incluse dans $\Omega$ et $z_0\in\Omega$ n'est pas sur l'image de $\gamma$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a*

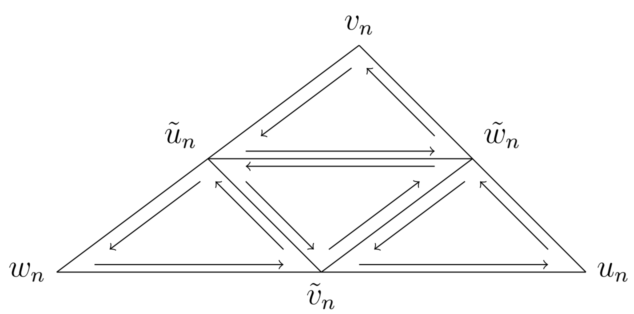
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\times \mathrm{Ind}(\gamma,z_0). \tag{4.5}$$

## 4.5 Compléments

### 4.5.1 Preuve du théorème de Goursat

On se donne $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphe et $u,v,w$ tel que $T(u,v,w)\subset\Omega$. On veut montrer que $\displaystyle\int_{\partial T(u,v,w)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

On note $u_0=u$, $v_0=v$, $w_0=w$ et on va construire une suite de chemins triangulaires $\tau_n = \partial T(u_n,v_n,w_n)$ de la façon suivante. Etant construit $\tau_n$ on note $\tilde{u}_n$, $\tilde{v}_n$ et $\tilde{w}_n$ les milieux des côtés de $\tau_n$ opposés à $u_n,v_n,w_n$, i.e. $\tilde{u}_n = \frac{v_n+w_n}{2}$, $\tilde{v}_n = \frac{u_n+w_n}{2}$ et $\tilde{w}_n = \frac{u_n+v_n}{2}$. On décompose alors $\tau_n$ à l'aide des 4 triangles comme sur le dessin ci-dessous

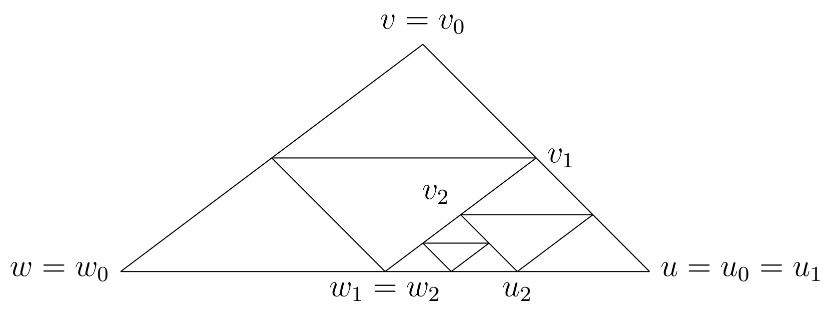


$$
\begin{aligned}
&\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{[u_n,v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[v_n,w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[w_n,u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{[u_n,\tilde w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde w_n,v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[v_n,\tilde u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde u_n,w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[w_n,\tilde v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde v_n,u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{[u_n,\tilde w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde w_n,\tilde v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde v_n,u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde w_n,v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[v_n,\tilde u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde u_n,\tilde w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{[\tilde u_n,w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[w_n,\tilde v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde v_n,\tilde u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde u_n,\tilde v_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde v_n,\tilde w_n]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[\tilde w_n,\tilde u_n]} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\partial T(u_n,\tilde w_n,\tilde v_n)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T(\tilde w_n,v_n,\tilde u_n)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T(\tilde u_n,w_n,\tilde v_n)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T(\tilde u_n,\tilde v_n,\tilde w_n)} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

On choisit $\tau_{n+1}$ parmi $\partial T(u_n,\tilde w_n,\tilde v_n)$, $\partial T(\tilde w_n,v_n,\tilde u_n)$, $\partial T(\tilde u_n,w_n,\tilde v_n)$ et $\partial T(\tilde u_n,\tilde v_n,\tilde w_n)$, tel que le module de l'intégrale de $f$ soit maximum. L'inégalité triangulaire garantit alors que

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4\left|\int_{\tau_{n+1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

D'autre part on vérifie facilement que le périmètre de $\tau_{n+1}$ est la moitié de celui de $\tau_n$, i.e. $L(\tau_{n+1}) = \frac{1}{2}L(\tau_n)$. On construit ainsi par récurrence la suite de triangles $(\tau_n)_n$.




On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\int_{\tau_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n\left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \quad \text{et} \quad L(\tau_n) = \frac{1}{2^n}L(\tau_0). \tag{4.6}$$

Quelle que soit la façon de nommer les sommets des triangles successifs on a toujours $|u_{n+1} - u_n| \leq L(\tau_n) = \frac{1}{2^n}L(\tau_0)$. La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est donc absolument convergente donc convergente, i.e. la suite $(u_n)_n$ converge. On note $z_0$ sa limite. Comme $L(\tau_n) \to 0$ on en déduit facilement que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent aussi vers $z_0$ qui est dans le triangle initial (ou sur le bord).

La fonction $f$ est dérivable en $z_0$ (il faut bien utiliser l'hypothèse de dérivabilité à un moment donné) donc il existe $\varepsilon(z) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$ telle que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0|\varepsilon(z).$$

La fonction $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ est polynomiale donc admet une primitive. Son intégrale le long de n'importe quel lacet est donc nulle, en particulier le long de n'importe quel triangle $\tau_n$. Ainsi on a, pour tout $n$,

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\tau_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\tau_n} |z - z_0|\varepsilon(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

et donc en utilisant la Proposition 4.4 on a

$$\left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L(\tau_n) \sup_{z\in\tau_n} |z - z_0| \times |\varepsilon(z)|.$$

Pour tout $z \in \tau_n$, comme $z_0$ est intérieur au triangle $\tau_n$ on a $|z - z_0| \leq \frac{1}{2}L(\tau_n)$ (la longueur maximale est celle du plus grand côté du triangle qui est inférieure au demi-périmètre). Finalement, en utilisant la majoration ci-dessus et (4.6), on a pour tout $n$

$$\left|\int_{\tau_0} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n \left|\int_{\tau_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n \frac{L(\tau_n)^2}{2} \sup_{z\in\tau_n} |\varepsilon(z)| = \frac{L(\tau_0)^2}{2} \sup_{z\in\tau_n} |\varepsilon(z)|.$$

Comme $\lim\limits_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z\in\tau_n} |\varepsilon(z)| = 0$ (les points sur $\tau_n$ sont à distance au plus $\frac{L(\tau_n)}{2} = \frac{L(\tau_0)}{2^{n+1}}$ de $z_0$) et donc que $\displaystyle\int_{\partial T(u,v,w)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\tau_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

### 4.5.2 Suites et séries de fonctions holomorphes, fonctions définies par une intégrale

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ et qu'elle converge uniformément vers $f$ alors $f$ est continue (voir la Section 2.1). Si on suppose de plus que les $f_n$ sont holomorphes (avec $\Omega$ ouvert) on voudrait savoir si $f$ est aussi holomorphe. Lorsque les fonctions sont à variables réelles vous avez vu en L2 qu'il fallait pour cela une condition de convergence uniforme sur la suite des fonctions dérivées, i.e. sur $(f_n')_n$, et qu'on avait alors $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. Pour les fonctions holomorphes ce n'est en fait pas nécessaire. On voit donc ici une autre manifestation de la "rigidité" des fonctions holomorphes.

**Théorème 4.8.** *Soit $\Omega$ un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur $\Omega$. On suppose que $(f_n)_n$ converge vers $f$ uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors $f$ est holomorphe sur $\Omega$.*

**Remarque 4.17.** *On peut également démontrer que la suite $(f_n')_n$ converge alors uniformément vers $f'$ sur tout compact $K \subset \Omega$, et donc par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact $K \subset \Omega$.*

**Remarque 4.18.** *L'hypothèse de convergence uniforme sur tout compact $K \subset \Omega$ est plus faible que celle de convergence uniforme sur $\Omega$. On a déjà rencontré ce type de situations pour les séries entières : si le rayon de convergence est $R > 0$ alors il y a convergence normale (et donc uniforme) sur tout disque $\overline{D}(0, r)$ avec $r < R$. Cela ne garantit pas la convergence uniforme sur $\Omega$ tout entier. Par contre c'est suffisant pour garantir que la fonction limite $f$ est continue. En effet la convergence uniforme garantit que $f$ est continue sur tout compact $K \subset \Omega$. Si $z_0 \in \Omega$, puisque $\Omega$ est ouvert il existe $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ et comme $\overline{D}(z_0, r)$ est compact la fonction $f$ est continue sur cet ensemble et en particulier en $z_0$. On a ainsi montré que $f$ est continue en tout $z_0 \in \Omega$, i.e. $f$ est continue sur $\Omega$.*

**Démonstration.** On peut déjà affirmer que $f$ est continue sur $\Omega$ (voir la remarque ci-dessus). On va maintenant montrer que $f$ est holomorphe. La preuve repose sur le théorème de Goursat et sa "réciproque" le théorème de Morera. Soit donc $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. On va montrer que $f$ est holomorphe sur $D(z_0, r)$ et donc en particulier en $z_0$. D'après le théorème de Morera, puisque $f$ est continue il suffit de montrer que pour tous $a, b, c \in D(z_0, r)$ on a $\displaystyle\int_{\partial T(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Soit donc $a, b, c \in D(z_0, r)$. Par hypothèse toutes les fonctions $f_n$ sont holomorphes sur $D(z_0, r)$ donc d'après le théorème de Goursat on a $\displaystyle\int_{\partial T(a,b,c)} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Or la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $\overline{D}(z_0, r)$ et donc en particulier sur $\partial T(a, b, c) \subset \overline{D}(z_0, r)$. On peut donc intervertir limite et intégrale et ainsi

$$\int_{\partial T(a,b,c)} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial T(a,b,c)} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

$\square$

En appliquant le théorème précédent à la suite des sommes partielles on obtient immédiatement la version suivante pour les séries de fonctions holomorphes.

**Théorème 4.9.** *Soit $\Omega$ un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur $\Omega$. On suppose que $\sum f_n$ converge vers $f$ uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors $f$ est holomorphe sur $\Omega$.*

**Remarque 4.19.** *Dans la pratique pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions on peut bien entendu montrer la convergence normale.*

**Exemple 4.9.** *Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Pour tout $n \geq 1$ on note $f_n(z) = \dfrac{1}{n^z} = \mathrm{e}^{-z\ln(n)}$. Les fonctions $f_n$ sont bien toutes holomorphes sur $\Omega$ (et même sur $\mathbb{C}$ tout entier). De plus, si $\alpha > 1$ alors pour tout $z$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \alpha$ on a $|f_n(z)| = \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)\ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge cela garantit que la série $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$. Sa somme $f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est donc holomorphe sur $\Omega_\alpha$, et comme c'est vrai pour tout $\alpha > 1$, elle est holomorphe sur tout $\Omega$.*

*Cette fonction est appelée fonction zeta de Riemann et joue un rôle très important en mathématiques, en particulier en théorie des nombres.*

Un autre type de fonctions que l'on rencontre fréquemment sont les fonctions définies par une intégrale, i.e. de la forme $F(z) = \displaystyle\int_I f(t, z)\,\mathrm{d}t$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Dans le cas des fonctions de variable réelle vous avez vu en L2 que si la fonction $f$ était continue par morceaux par rapport à $t$, i.e. pour tout $x$ la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux, qu'elle était continue par rapport à $x$, i.e. pour tout $t$ la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue, et qu'on pouvait "dominer" $f(t, x)$ par une fonction $g(t)$ intégrable, i.e. il existe $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $|f(t, x)| \leq g(t)$ pour tous $t, x$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_I f(t, x)$ était continue. Ici encore si on veut montrer que $F$ est dérivable, en plus de $f(t, x)$ dérivable par rapport à $x$, il faut donner une hypothèse sur la dérivée de

$f$, en l'occurence une hypothèse de domination sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et pas sur $f$. Lorsqu'on considère les fonctions holomorphes ce n'est pas nécessaire et la domination sur $f$ suffit. Plus précisément on a le théorème suivant.

**Théorème 4.10.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que*

1. *pour tout $t \in I$ la fonction $\Omega \ni z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe,*
2. *pour tout $z \in \Omega$ la fonction $I \ni t \mapsto f(t,z)$ est continue par morceaux,*
3. *pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $g : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $|f(t,z)| \leq g(t)$ pour tout $(t,z) \in I \times \Omega$ et $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

*Alors pour tout $z \in \Omega$ l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t,z)\,\mathrm{d}t$ converge et la fonction définie sur $\Omega$ par $F(z) = \displaystyle\int_I f(t,z)\,\mathrm{d}t$ est holomorphe et vérifie $F'(z) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,\mathrm{d}t$ où $\dfrac{\partial f}{\partial z}(t,z)$ désigne la dérivée de la fonction $z \mapsto f(t,z)$.*

**Remarque 4.20.** *Pour celles et ceux qui suivent le cours de théorie de la mesure, et donc l'intégrale de Lebesgue, vous pouvez bien entendu remplacer les hypothèses "$I \ni t \mapsto f(t,z)$ est continue par morceaux" et "$g : I \to \mathbb{R}$ coninue par morceaux" par "$I \ni t \mapsto f(t,z)$ est mesurable" et "$g$ mesurable".*

**Exemple 4.10.** *Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $I = ]0,+\infty[$. On considère la fonction définie sur $I \times \Omega$ par $f(t,z) = t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}$ où $t^{z-1} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln(t)}$. On vérifie facilement que pour tout $z$ la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est continue sur $I$ et que pour tout $t > 0$ la fonction $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur $\Omega$ (et même sur $\mathbb{C}$ tout entier). De plus, si $0 < \alpha < \beta$, pour tout $z$ tel que $\alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta$ on a*

$$|f(t,z)| \;=\; \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} \;\leq\; \begin{cases} \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} = t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}, & \text{si } t \leq 1, \\ \mathrm{e}^{(\beta-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} = t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

*La fonction $g$ définie par $g(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}, & \text{si } t \leq 1, \\ t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}, & \text{si } t > 1, \end{cases}$ est continue par morceaux et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En effet, en $0$ on a $g(t) \sim t^{\alpha-1}$ et comme $\alpha - 1 > -1$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$ converge. Et en $+\infty$ on a $g(t) = t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{-2} \times t^{\beta+1}\mathrm{e}^{-t} = o(t^{-2})$ puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{\beta+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ (croissances comparées), et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

*On en déduit que $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit une fonction holomorphe sur tout ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta\}$ et donc sur $\Omega$. Cette fonction est appelée fonction Gamma.*

# CHAPITRE 5

# FONCTIONS MÉROMORPHES

On va s'intéresser dans ce dernier chapitre aux fonctions qui sont holomorphes sauf peut-être en certains points. L'exemple le plus simple est celui de la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ qui est holomorphe sauf en $z = 0$. On a vu qu'une des conséquences était que l'intégrale de $f$ le long d'un lacet n'était pas forcément nulle. Par exemple si $r > 0$ on a $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi$. Le fait que la fonction $f$ ne soit pas holomorphe en 0 n'explique pas tout. En effet la fonction $g(z) = \frac{1}{z^2}$ est également holomorphe sauf en 0. Cependant l'intégrale de $g$ le long de n'importe quel lacet est nulle puisque $g$ admet une primitive sur $\mathbb{C}^*$, la fonction $-f$. Prenons un dernier exemple, la fonction $h(z) = \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$. Elle est holomorphe sauf en $z = 0$ et $z = 1$. Pour n'importe quel lacet $\gamma$ ne passant pas par 0 ou 1 on a donc

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z-1)} = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} - \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2}.$$

Puisque $\frac{1}{z^2}$ admet une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ la dernière intégrale est nulle. Les deux autres dépendent de la position de $z = 0$ et $z = 1$ par rapport au chemin $\gamma$ : à un facteur $2i\pi$ près ce sont les indices de 0 et 1 par rapport à $\gamma$. On a ainsi

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z-1)} = 2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma, 1) - 2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma, 0).$$

C'est en particulier ce genre de formules qu'on va chercher à généraliser, c'est ce qu'on appellera le théorème des résidus.

## 5.1 Singularités isolées

**Définition 5.1.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. On dit que $z_0$ est une singularité isolée de $f$ si $f$ est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$.*

On va voir qu'on pourra classer les singularités en trois catégories. Les exemples ci-dessous sont caractéristiques de chacune de ces catégories.

**Exemple 5.1.** *1)* $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ *est définie et holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$. *Elle se prolonge en fait en une fonction holomorphe à* $\mathbb{C}$ *tout entier en posant* $f(0) = 1$. *En effet, par définition de la fonction sinus pour tout* $z \neq 0$ *on a* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$ *et cela reste vrai pour* $z = 0$. *La fonction* $f$ *est donc DSE en* $z = 0$ *et donc aussi holomorphe en* $0$.

*2)* $g(z) = \dfrac{z^4 + 2z^3 - z + 3}{z^3 - 2z^2 + z} = \dfrac{z^4 + 2z^3 - z + 3}{z(z-1)^2}$. *La fonction* $g$ *est définie et holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. *On voit qu'on ne peut pas prolonger* $g$ *de façon holomorphe ni en* $0$ *ni en* $1$, *ni même en étant moins "exigeant" et en ne cherchant qu'un prolongement par continuité on ne pourrait pas. Par contre on observe qu'on peut prolonger en* $z = 0$ *la fonction* $zg(z)$ *par* $3$, *et en* $z = 1$ *la fonction* $(z-1)^2 g(z)$ *par* $5$. *Pour* $z_0 \in \{0, 1\}$ *on peut prolonger non pas* $g$ *en* $z_0$ *de façon holomorphe mais on peut prolonger une fonction de la forme* $(z - z_0)^n g(z)$ *(il suffit de prendre* $n = 1$ *en* $z_0 = 0$ *et* $n = 2$ *en* $z_0 = 1$*). On remarque également que* $\displaystyle\lim_{z \to z_0} |g(z)| = +\infty$ *que ce soit en* $z_0 = 0$ *ou en* $z_0 = 1$.

*3)* $h(z) = \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$. *La fonction* $h$ *est définie et holomorphe sur* $\mathbb{C}^*$. *Par contre, quel que soit l'entier* $n \in \mathbb{N}$ *on ne peut pas prolonger la fonction* $z^n h(z)$ *de façon holomorphe en* $0$. *En effet pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^n h(x) = +\infty$ *donc on ne peut même pas prolonger la fonction* $z^n h(z)$ *par continuité en* $0$.

*Si on regarde le comportement de la fonction* $h$ *lorsque* $z \to 0$ *on peut voir qu'il est très différent du cas précédent. En effet,* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0$ *et sur l'axe imaginaire la fonction* $h$ *est bornée. En effet, si* $z = iy$ *avec* $y \in \mathbb{R}^*$, *on a* $|h(iy)| = \left|\exp\left(\frac{1}{iy}\right)\right| = 1$.

**Exercice 5.1.** Justifiez les affirmations concernant la fonction $g$ dans l'exemple ci-dessus.

**Définition 5.2.** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un ouvert,* $z_0 \in \Omega$ *et* $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ *holomorphe, i.e.* $z_0$ *est une singularité isolée de* $f$. *On dit que* $z_0$ *est*

1. *une singularité* artificielle *de* $f$ *si* $f$ *peut être prolongée en une fonction holomorphe sur* $\Omega$.
2. *un* pôle *si* $z_0$ *n'est pas une singularité artificielle de* $f$ *et s'il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que la fonction* $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\Omega$, *autrement dit tel que* $z_0$ *soit une singularité artificielle de la fonction* $g$. *Le plus petit entier* $m$ *tel que* $(z - z_0)^m f(z)$ *ait une singularité artificielle en* $z_0$ *est appelé l'*ordre du pôle.
3. *une singularité* essentielle *sinon.*

**Remarque 5.1.** *Si* $z_0$ *est un pôle d'ordre* $m$ *on peut vérifier que le prolongement de* $g$ *ne s'annule pas en* $z_0$ *(sinon on pourrait prolonger* $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ *en fonction holomorphe ce qui contredirait la définition de* $m$*). La fonction* $f$ *peut donc s'écrire sous la forme* $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ *avec* $g$ *holomorphe sur* $\Omega$ *et ne s'annulant pas en* $z_0$. *La définition de l'ordre d'un pôle est ainsi à rapprocher de celle de l'ordre d'un zéro d'une fonction holomorphe non-nulle, voir la Définition 3.3.*

Si $z_0$ est une singularité artificielle alors la fonction $f$ admet une limite en $z_0$ et en particulier elle est bornée au voisinage de $z_0$. A contrario si $z_0$ est un pôle d'ordre $m$ on peut écrire $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ avec $g$ holomorphe tel que $g(z_0) \neq 0$ et donc en particulier $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$. Ces deux propriétés caractérisent en fait les singularités artificielles et les pôles (voir le Théorème 5.1 ci-dessous).

Par ailleurs, comme une fonction holomorphe est analytique, si $z_0$ est un pôle d'ordre $m$ de $f$ et $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ alors il existe $(b_k)_k$ et $R > 0$ tel que sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k \quad \Longleftrightarrow \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^{k-m}.$$

Si pour tout $n \geq -m$ on note $a_n = b_{n+m}$, i.e. $b_k = a_{k-m}$, on a alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z-z_0)^{k-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j} + h(z) \tag{5.1}$$

où $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ est holomorphe sur $D(z_0, R)$, et $a_{-m} = b_0 = g(z_0) \neq 0$.

**Théorème 5.1.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ telle que $z_0$ est une singularité isolée de $f$. Alors*

1. *$z_0$ est une singularité artificielle si et seulement si $f$ est bornée au voisinage de $z_0$.*
2. *$z_0$ est un pôle si et seulement si $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.*

**Démonstration.** Dans les deux cas la condition nécessaire correspond à ce qui a été dit avant l'énoncé du théorème. On montre que ce sont bien aussi des conditions suffisantes.

1. On suppose que $f$ est bornée au voisinage de $z_0$, i.e. il existe $M \geq 0$ et $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a $|f(z)| \leq M$. Soit $g$ la fonction définie sur $\Omega$ par $g(z) = (z-z_0)^2 f(z)$ si $z \neq z_0$ et $g(z_0) = 0$. La fonction $g$ est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. De plus comme $f$ est bornée au voisinage de $z_0$ on vérifie facilement que

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z-z_0) f(z) \xrightarrow{z\to z_0} 0.$$

Ainsi $g$ est dérivable en $z_0$ avec $g'(z_0) = 0$. La fonction $g$ est donc holomorphe, et donc analytique, sur $\Omega$. En particulier elle est DSE en $z_0$ avec $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. D'après la Proposition 3.1 il existe donc $r > 0$ tel que sur $D(z_0, r)$ on a

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

et donc sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z-z_0)^n.$$

Si on pose $f(z_0) = a_2$ l'identité ci-dessus est valable sur $D(z_0, r)$, la fonction $f$ est donc prolongeable en $z_0$ en une fonction DSE et en particulier y est dérivable.

2. On suppose cette fois que $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)| = +\infty$. Il existe donc $R>0$ tel que pour tout $z\in D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ on a $|f(z)|\geq 1$. La fonction $\frac{1}{f}$ est donc holomorphe bornée sur $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$. D'après 1. $z_0$ est donc une singularité artificielle de $\frac{1}{f}$ qui se prolonge ainsi en une fonction holomorphe, et donc analytique, sur $D(z_0,R)$. On note $g$ ce prolongement et puisque $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$ on en déduit que $g(z_0)=0$. $z_0$ est donc un zéro de la fonction $g\neq 0$ (c'est $\frac{1}{f}$). Soit $n_0$ son ordre, i.e. $n_0\in\mathbb{N}^*$ est le plus petit entier tel que $g^{(n_0)}(z_0)\neq 0$. Ainsi il existe $0<r<R$ tel que sur $D(z_0,r)$ on ait

$$g(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \;=\; (z-z_0)^{n_0}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}a_{n_0+k}(z-z_0)^k}_{=:h(z)}$$

La fonction $h$ est holomorphe sur $D(z_0,r)$ et ne s'y annule pas ($g$ ne s'annule qu'en $z_0$ et $h(z_0)=a_{n_0}\neq 0$). Donc $\frac{1}{h}$ y est aussi holomorphe et pour tout $z\in D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ on a

$$\frac{1}{f(z)}=g(z)=(z-z_0)^{n_0}h(z) \iff (z-z_0)^{n_0}f(z)=\frac{1}{h(z)},$$

ce qui prouve que $z_0$ est bien un pôle (d'ordre $n_0$). □

**Remarque 5.2.** *Si $z_0$ est une singularité essentielle le comportement de $f$ au voisinage de $z_0$ est plus compliqué : $f$ n'est pas bornée (sinon on aurait une singularité artificielle) mais ne tend pas non plus vers l'infini (sinon on aurait un pôle). Si on reprend la fonction $h(z)=\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ elle n'est ni bornée, puisqu'elle tend vers $+\infty$ si $z$ tend vers $0$ en étant réel positif, ni ne tend vers l'infini (en module) puisqu'elle est bornée sur l'axe imaginaire.*

Dans l'étude des singularités on rencontre souvent le cas suivant.

**Proposition 5.1.** *Soient $f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorphes avec $f,g$ non-nulles, et soit $z_0$ un zéro de $g$. Alors il existe $R>0$ tel que $\frac{f}{g}$ soit définie sur $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$. On note $n_g$ l'ordre de $z_0$ en tant que zéro de $g$ et $n_f$ son ordre en tant que zéro de $f$ (avec $n_f=0$ si $f(z_0)\neq 0$).*

- *Si $n_f\geq n_g$ alors $z_0$ est une singularité artificielle de $\frac{f}{g}$ et $z_0$ est un zéro d'ordre $n_f-n_g$ du prolongement de $\frac{f}{g}$ (ce n'est pas un zéro si $n_f=n_g$).*
- *Si $n_f<n_g$ alors $z_0$ est un pôle d'ordre $n_g-n_f$ de $\frac{f}{g}$.*

**Démonstration.** Par définition de l'ordre d'un zéro on peut écrire

$$f(z)=(z-z_0)^{n_f}\tilde{f}(z) \quad \text{et} \quad g(z)=(z-z_0)^{n_g}\tilde{g}(z)$$

avec $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ holomorphes telles que $\tilde{f}(z_0)\neq 0$ et $\tilde{g}(z_0)\neq 0$. Par continuité de $\tilde{g}$ il existe $R>0$ tel que $\tilde{g}(z)\neq 0$ pour tout $z\in D(z_0,R)$. Sur $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ on a donc

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{n_f-n_g}h(z)$$

avec $h=\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ holomorphe et $h(z_0)\neq 0$. Le résultat découle alors de la Définition 5.2 et de celle de l'ordre d'un zéro. □

## 5.2 Fonctions méromorphes et résidus

Dans la section précédente on s'est restreint, pour simplifier la présentation, au cas où une fonction $f$ n'avait qu'un seul point qui était une singularité isolée. On peut généraliser cela au cas de plusieurs (même une infinité) de points. L'important est que ces points soient tous isolés, i.e. forment une partie discrète. On les traite alors un par un.

**Exemple 5.2.** *La fonction $f$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z(z+1)}$ admet deux singularités isolées $0$ et $-1$. On peut vérifier que $0$ est une singularité artificielle tandis que $-1$ est un pôle d'ordre $1$.*

**Définition 5.3.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f$ est dite* méromorphe *sur $\Omega$ s'il existe une partie discrète $\mathcal{P} \subset \Omega$ telle que $f$ soit holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ et admette un pôle en tout $z \in \mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est appelé l'ensemble des pôles de $f$.*

**Exemple 5.3.** *Si $P, Q$ sont deux fonctions polynomiales avec $Q \neq 0$ alors $f = \dfrac{P}{Q}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ est inclus dans l'ensemble des zéros de $Q$ (qui est un ensemble fini donc discret). Si de plus $P$ et $Q$ sont premiers entre eux alors $\mathcal{P}$ est exactement l'ensemble des zéros de $Q$ et l'ordre de multiplicité d'un pôle $z_0 \in \mathcal{P}$ est égal à l'ordre de multiplicité de $z_0$ en tant que zéro de $Q$.*

Le résultat suivant généralise le cas des fractions rationnelles (quotient de polynômes) et découle directement de la Proposition 5.1.

**Proposition 5.2.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes avec $g \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est méromorphe sur $\Omega$ et l'ensemble des pôles de $\frac{f}{g}$ est inclus dans l'ensemble des zéros de $g$.*

**Démonstration.** La seule chose à prouver est que l'ensemble $\mathcal{P}$ des pôles est bien discret. C'est une conséquence immédiate du principe des zéros isolés. □

**Proposition 5.3.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f, g$ deux fonctions méromorphes sur $\Omega$. Alors les fonctions $f + g$, $fg$ et $f'$ sont méromorphes sur $\Omega$. Le quotient $\frac{f}{g}$ est méromorphe sur tout ouvert connexe par arcs $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ sur lequel $g$ n'est pas identiquement nulle.*

**Démonstration.** Soit $\mathcal{P}_f$, resp. $\mathcal{P}_g$, l'ensemble des pôles de $f$, resp. de $g$. L'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$ est un ensemble discret et sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ les fonctions $f+g$, $fg$ et $f'$ sont holomorphes comme somme, produit ou dérivée de fonctions holomorphes.

Si $z_0 \in \mathcal{P}$, il existe $n_f$ et $n_g$ (les ordres de $z_0$ en tant que pôle de $f$ et $g$ avec $n_f = 0$ si $z_0$ n'est pas un pôle de $f$ et $n_g = 0$ si ce n'est pas un pôle de $g$) tels que $\tilde{f}(z) = (z - z_0)^{n_f} f(z)$ et $\tilde{g}(z) = (z - z_0)^{n_g} g(z)$ se prolongent en fonctions holomorphes sur un disque $D(z_0, R)$. On peut alors écrire, sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, avec $n = \max(n_f, n_g)$

$$\begin{aligned}
(f+g)(z) &= \frac{(z - z_0)^{n-n_f}\tilde{f}(z) + (z - z_0)^{n-n_g}\tilde{g}(z)}{(z - z_0)^n}, \\
(fg)(z) &= \frac{\tilde{f}(z)\tilde{g}(z)}{(z - z_0)^{n_f+n_g}}, \\
f'(z) &= \frac{(z - z_0)\tilde{f}'(z) - n_f\tilde{f}(z)}{(z - z_0)^{n_f+1}}.
\end{aligned}$$

Pour chacune des ces fonctions le numérateur se prolonge en une fonction holomorphe en $z_0$ ce qui prouve que $z_0$ est soit une singularité artificielle soit un pôle.

Finalement, si $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ est connexe par arcs et $g$ est non-nulle sur $\tilde{\Omega}$ alors l'ensemble $Z$ des zéros de $g$ sur $\tilde{\Omega}$ est un ensemble discret d'après le principe des zéros isolés. L'ensemble $\tilde{P} = (\mathcal{P} \cap \tilde{\Omega}) \cup Z$ est donc une partie discrète de $\tilde{\Omega}$ et la fonction $\frac{1}{g}$ est holomorphe sur $\tilde{\Omega} \setminus \tilde{P}$. Si $z_0 \in \tilde{P}$ est un zéro d'ordre $m$ de $g$ alors, d'après la Proposition 5.1, c'est un pôle d'ordre $m$ de $\frac{1}{g}$ et si $z_0$ est un pôle d'ordre $m$ de $g$ alors $\frac{1}{g}$ admet une singularité artificielle en $z_0$, et $z_0$ est même un zéro d'ordre $m$ du prolongement. La fonction $\frac{1}{g}$ est donc méromorphe sur $\tilde{\Omega}$ et par produit la fonction $\frac{f}{g}$ aussi. $\square$

On a vu dans le chapitre précédent que si $f$ est une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé $\Omega$ alors l'intégrale de $f$ le long d'un lacet est nulle. On voudrait voir ce qu'il se passe si on remplace $f$ holomorphe par $f$ méromorphe. La formule de Cauchy assure par exemple que si $g$ est holomorphe sur $\Omega$ et si $z_0 \in \Omega$ alors pour tout lacet $\gamma$ ne passant pas par $z_0$ on a

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = 2i\pi g(z_0) \mathrm{Ind}(\gamma, z_0).$$

La fonction $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ est méromorphe sur $\Omega$ avec, sauf si $g(z_0) = 0$, un pôle simple en $z_0$. Que se passe-t-il si on divise maintenant par $(z - z_0)^n$, i.e. si on considère un pôle d'ordre plus élevé ? Et s'il y a plusieurs pôles ?

Supposons d'abord que $f$ soit méromorphe sur un ouvert étoilé $\Omega$ et qu'elle ait un unique pôle en $z_0$, d'ordre $m$. On a vu dans la section précédente, voir l'équation (5.1), que dans un disque $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on pouvait écrire $f$ sous la forme

$$f(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} + h(z)$$

avec $h$ holomorphe sur $D(z_0, R)$. Puisque la fonction $g(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ et qu'on a supposé que $z_0$ était le seul pôle de $f$ cela prouve que $h(z) = f(z) - g(z)$ est en fait holomorphe sur tout $\Omega$. Si on prend un lacet $\gamma$ dont l'image est dans $\Omega$ et qui ne passe pas par $z_0$ on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{j=1}^{m} \int_\gamma \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j}\,\mathrm{d}z + \int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_{-j} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_0)^j} \\
&= 2i\pi a_{-1} \mathrm{Ind}(\gamma, z_0).
\end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière ligne la définition de l'indice et le fait que si $j > 1$ la fonction $\dfrac{1}{(z - z_0)^j}$ a une primitive et donc que son intégrale le long d'un lacet est nulle. On voit que seul le terme $\dfrac{a_{-1}}{z - z_0}$ a une contribution non nulle à l'intégrale et que c'est le coefficient $a_{-1}$ qui joue un rôle clé dans la valeur de cette dernière.

**Remarque 5.3.** *Si $m = 1$ on a simplement $f(z) = \dfrac{a_{-1} + (z - z_0)h(z)}{z - z_0}$ et la fonction $g(z) = a_{-1} + (z - z_0)h(z)$ est holomorphe avec $g(z_0) = a_{-1}$. On retrouve bien ainsi la formule de Cauchy.*

**Définition 5.4.** *Soit $\Omega$ un ouvert et $f$ une fonction méromorphe sur $\Omega$. Si $z_0 \in \Omega$ est un pôle de $f$ et $R > 0$ tel que dans $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on décompose $f$ sous la forme $f(z) = \sum_{j=1}^{m} \dfrac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} + h(z)$ avec $h$ holomorphe sur $D(z_0, R)$, alors la fonction $g(z) = \sum_{j=1}^{m} \dfrac{a_{-j}}{(z - z_0)^j}$ s'appelle la* partie principale *de $f$ en $z_0$ et le coefficient $a_{-1}$ s'appelle le* résidu *de $f$ en $z_0$ et on le note* $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

**Remarque 5.4.** *Si $z_0$ est une singularité artificielle de $f$, i.e. si $f$ se prolonge en une fonction holomorphe en $z_0$, on notera parfois* $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$.

Si une fonction méromorphe $f$ a plusieurs pôles on peut bien sûr s'attendre à ce que les différents pôles apportent chacun une contribution. C'est ce qu'on a pu observer dans l'exemple introductif en début de chapitre. Le théorème qui suit généralise le calcul précédent au cas d'une fonction méromorphe quelconque, i.e. avec un nombre arbitraire de pôles.

**Théorème 5.2.** *[Théorème des résidus] Soit $\Omega$ un ouvert étoilé et $f$ une fonction méromorphe sur $\Omega$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de $f$. Pour tout lacet $\gamma$ inclus dans $\Omega$ et ne passant pas par $\mathcal{P}$ on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{z \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}(f, z)\mathrm{Ind}(\gamma, z). \tag{5.2}$$

*La somme dans le membre de droite converge dans le sens où il n'y a qu'un nombre fini de termes non-nuls.*

**Remarque 5.5.** *Comme dans la Section 4.2 on peut généraliser l'hypothèse sur $\Omega$ et remplacer* ouvert étoilé *par* ouvert simplement connexe, *voir la Remarque 4.13. On ne peut cependant pas se passer d'une hypothèse sur $\Omega$.*

**Démonstration.** On fait la preuve dans le cas où $\mathcal{P}$ est un ensemble fini (non-vide sinon $f$ est holomorphe et le résultat est celui du Théorème 4.3).

Soient $z_1, \ldots, z_p$ les pôles de $f$. On notera $m_j$ l'ordre du pôle $z_j$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ il existe $R_j > 0$ et $a_{-1,j}, \ldots, a_{-m_j,j} \in \mathbb{C}$ tels que sur $D(z_j, R_j) \setminus \{z_j\}$ la fonction

$$h_j(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z - z_j)^k}$$

se prolonge de façon holomorphe en $z_j$. On considère la fonction $g : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_p\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z - z_j)^k}.$$

La fonction $g$ est holomorphe (somme de fonctions holomorphes). De plus, étant donné $\ell \in \{1, \ldots, p\}$, si $z \in D(z_\ell, R_\ell) \setminus \{z_\ell\}$ on a alors

$$g(z) = h_\ell(z) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z - z_j)^k}.$$

Comme $h_\ell$ se prolonge de façon holomorphe en $z_\ell$, et que les fonctions $z \mapsto \dfrac{1}{(z-z_j)^k}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{z_\ell\}$ si $k \neq \ell$, on en déduit que $g$ se prolonge aussi. $z_\ell$ est donc une singularité artificielle de $g$. C'est vrai pour tout $\ell$ et donc la fonction $g$ se prolonge de façon holomorphe sur $\Omega$ tout entier. On notera toujours $g$ ce prolongement. Ainsi on a montré qu'il existe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z-z_j)^k}, \qquad \forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_p\}.$$

On a alors

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m_j} \int_\gamma \frac{a_{k,j}}{(z-z_j)^k}\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{j=1}^{p} \int_\gamma \frac{a_{-1,j}}{z-z_j}\,\mathrm{d}z,$$

où on a utilisé le fait que $g$ est holomorphe, donc son intégrale le long d'un lacet est nulle, et que toutes les fonctions $\frac{1}{(z-z_j)^k}$ pour $k \geq 2$ ont des primitives et donc leur intégrale le long d'un lacet est nulle également. Finalement par définition de l'indice on a $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-z_j}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Ind}(\gamma, z_j)$ et par définition du résidu on a $a_{-1,j} = \mathrm{Res}(f, z_j)$, donc on a bien

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{j=1}^{p} \mathrm{Res}(f, z_j)\mathrm{Ind}(\gamma, z_j) \;=\; \sum_{z \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}(f, z)\mathrm{Ind}(\gamma, z).$$

$\square$

Avant de donner des exemples d'application de ce théorème on va s'intéresser à la question du calcul des résidus. L'indice d'un point par rapport à un lacet correspond au nombre de tours, comptés algébriquement, que fait le lacet autour du point et est donc relativement facile à trouver dans la pratique. Mais pour calculer le résidu il faut a priori pouvoir trouver le coefficient en $\dfrac{1}{z-z_j}$ de chaque pôle de $f$. La proposition suivante permet de trouver facilement ces résidus dans un grand nombre de cas.

**Proposition 5.4.** *Soit $\Omega$ un ouvert, $f$ méromorphe sur $\Omega$ et $z_0$ un pôle de $f$.*

1. *Si $z_0$ est un pôle simple de $f$ alors* $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$.
2. *Si $z_0$ est un pôle d'ordre $m \geq 1$ de $f$ alors* $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z)$ *où* $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$.
3. *Si $f = \dfrac{g}{h}$ sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ avec $g, h$ holomorphes sur $D(z_0, R)$ et telles que $z_0$ est un zéro d'ordre 1 de $h$ alors* $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

**Démonstration.** 1. Si $z_0$ est un pôle simple de $f$ on peut écrire, voir (5.1), $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z-z_0} + h(z)$ avec $h$ holomorphe. Ainsi on a facilement

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) \;=\; \lim_{z \to z_0} \big(a_{-1} + (z-z_0)h(z)\big) \;=\; a_{-1} \;=\; \mathrm{Res}(f, z_0).$$

2. Le raisonnement est le même que ci-dessus. D'après (5.1) on peut écrire

$$f(z)=\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{-j}}{(z-z_0)^j}+h(z) \iff g(z)=(z-z_0)^m f(z)=\sum_{j=1}^{m}a_{-j}(z-z_0)^{m-j}+(z-z_0)^m h(z).$$

La fonction $h$ est holomorphe donc on écrivant, dans un disque centré en $z_0$, $h(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$ on a

$$g(z) \;=\; \sum_{j=1}^{m}a_{-j}(z-z_0)^{m-j}+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^{k+m} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

avec $c_n=a_{n-m}$ si $n<m$ et $c_n=b_{n-m}$ si $n\geq m$. La fonction $g$ se prolonge bien en une fonction holomorphe en $z_0$. Si on note toujours $g$ ce prolongement en utilisant le Corolllaire 2.1 on a donc

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(z) \;=\; \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \;=\; c_{m-1} \;=\; a_{-1} \;=\; \mathrm{Res}(f,z_0).$$

3. Puisque $z_0$ est un zéro d'ordre 1 de $h$ on a $h'(z_0)\neq 0$. Soit $z_0$ est aussi un zéro de $g$, i.e. $g(z_0)=0$, et alors d'après la Proposition 5.1 $z_0$ est une singularité artificielle de $f$. Ainsi son résidu en $z_0$ est nul et on a bien $\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$. Soit $z_0$ n'est pas un zéro de $g$, i.e. $g(z_0)\neq 0$, et alors $z_0$ est un pôle simple de $f$ donc d'après 1. on a $\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$. Mais pour tout $z\neq z_0$ on peut écrire

$$(z-z_0)f(z) \;=\; g(z)\times\frac{z-z_0}{h(z)} \;=\; g(z)\times\frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)}.$$

Comme $g$ est holomorphe elle est continue en $z_0$ donc $\lim_{z\to z_0}g(z)=g(z_0)$. Enfin $h$ est holomorphe en $z_0$ et $h'(z_0)\neq 0$ donc on a $\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)}=\frac{1}{h'(z_0)}$ et finalement

$$\mathrm{Res}(f,z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0}g(z)\times\frac{z-z_0}{h(z)-h(z_0)} \;=\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

□

**Exemple 5.4.** *On voudrait calculer* $I=\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{2z}}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z$ *où* $\gamma$ *est le cercle* $C(0,4)$*. La fonction* $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{2z}}{z\sin(z)}$ *s'écrit sous la forme* $f=\frac{g}{h}$ *avec* $g(z)=\mathrm{e}^{2z}$ *et* $h(z)=z\sin(z)$ *holomorphes sur* $\mathbb{C}$*. Donc* $f$ *est bien méromorphe, sur* $\mathbb{C}$ *qui est étoilé. A l'intérieur de* $\gamma$ *le dénominateur* $h(z)=z\sin(z)$ *s'annule en* $z=0$ *mais aussi en* $z=-\pi$ *et en* $z=\pi$*. Il y a donc 3 pôles à prendre en compte et on aura*

$$\int_\gamma\frac{\mathrm{e}^{2z}}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z=2i\pi\sum_{z_0\in\{-\pi,0,\pi\}}\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{2z}}{z\sin(z)},z_0\right)\times\underbrace{\mathrm{Ind}(\gamma,z_0)}_{=1}.$$

*Il reste à calculer les résidus de* $f$ *en chcaun des pôles* $-\pi$*,* $0$ *et* $\pi$*.*

- *$-\pi$ et $\pi$ sont des pôles simples car $h'(\pm\pi) = \mp\pi \neq 0$. Comme $f = \frac{g}{h}$ et que $\pm\pi$ sont des zéros d'ordre 1 de $h$ on a* $\mathrm{Res}(f, \pm\pi) = \dfrac{g(\pm\pi)}{h'(\pm\pi)} = \mp\dfrac{\mathrm{e}^{\pm 2\pi}}{\pi}$.
- *0 est un pôle double. En effet $h'(z) = \sin(z) + z\cos(z)$ et $h''(z) = 2\cos(z) - z\sin(z)$ donc $h'(0) = 0$ et $h''(0) = 2 \neq 0$. On trouve donc* $\mathrm{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} \varphi'(z)$ *où* $\varphi(z) = z^2 f(z) = \dfrac{z\mathrm{e}^{2z}}{\sin(z)}$*. On a alors* $\varphi'(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{2z}\left[(1+2z)\sin(z) - z\cos(z)\right]}{\sin^2(z)}$ *et à l'aide d'un DL2 en 0 on trouve* $\mathrm{Res}(f, 0) = 2$.

*Conclusion :* $I = 2i\pi \times \left(\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi} + 2 - \frac{\mathrm{e}^{2\pi}}{\pi}\right) = 4i\pi - 4i\sinh(2\pi)$.

**Application au calcul d'intégrales.** On termine cette section avec une application du théorème des résidus au calcul de certaines intégrales dans $\mathbb{R}$ : comme souvent le passage par les nombres complexes permet de simplifier certains calculs.

**Exemple 5.5.** *On veut calculer* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)}$*. On peut d'abord noter que la fonction* $t \mapsto \dfrac{1}{2+\sin(t)}$ *est continue sur* $[0, 2\pi]$ *(et même sur* $\mathbb{R}$*) donc $I$ est bien définie. Si on écrit* $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}$ *on a alors*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2i}{4i + \mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{2i\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{i2t} + 4i\mathrm{e}^{it} - 1}\,\mathrm{d}t.$$

*La forme de l'intégrale invite à considérer comme lacet le cercle $C(0,1)$ parcouru dans le sens trigonométrique. Celui-ci est paramétré par* $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \mathrm{e}^{it}$ *et on a donc*

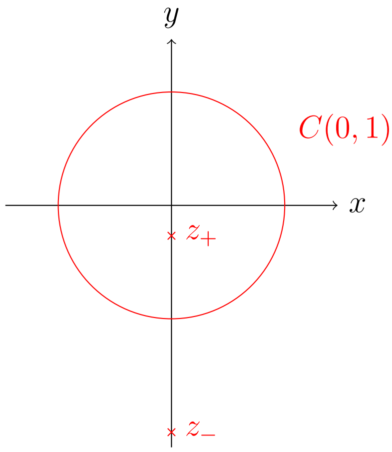
$$I = \int_{C(0,1)} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}\,\mathrm{d}z.$$

*Soit $f$ la fonction définie par* $f(z) = \dfrac{2}{z^2+4iz-1}$*. La fonction $f$ est méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *(c'est un quotient de deux polynômes). Son dénominateur se factorise facilement :*

$$z^2 + 4iz - 1 = (z+2i)^2 + 3 = (z + 2i + i\sqrt{3})(z + 2i - i\sqrt{3}).$$

*La fonction $f$ a donc deux pôles simples :* $z_- = -i(2+\sqrt{3})$ *et* $z_+ = -i(2-\sqrt{3})$*. On vérifie que $z_-$ est à l'extérieur du cercle $C(0,1)$ tandis que $z_+$ est à l'intérieur (voir le dessin ci-dessous).*

*Ainsi* $\mathrm{Ind}\,(C(0,1),z_-)=0$ *et* $\mathrm{Ind}\,(C(0,1),z_+)=1$.




*Il reste à calculer le résidu de* $f$ *en* $z_+$ *(inutile de calculer celui en* $z_-$ *puisque* $\mathrm{Ind}\,(C(0,1),z_-)=0$*). En utilisant au choix le 1. ou le 3. de la Proposition 5.4 on trouve*

$$\mathrm{Res}(f,z_+) \;=\; \lim_{z\to z_+}(z-z_+)f(z) \;=\; \lim_{z\to z_+}\frac{2}{z-z_-} \;=\; \frac{2}{z_+-z_-} \;=\; \frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

*Finalement, puisque* $f$ *est méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *qui est étoilé, le théorème des résidus assure que* $I=2i\pi\times\dfrac{1}{i\sqrt{3}}\times 1=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$*. Bien entendu le résultat est un nombre réel, et il est positif puisque la fonction de départ était positive.*

**Remarque 5.6.** *Avec le même type de raisonnement on peut calculer des intégrales du type* $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{P(\cos(t),\sin(t))}{Q(\cos(t),\sin(t))}\,\mathrm{d}t$ *où* $P,Q$ *sont des polynômes de deux variables. Vous avez vu en L1 qu'on pouvait calculer ce type d'intégrale avec un changements de variables de la forme* $u=\tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $u=\cos(t)$, $u=\sin(t)$ *ou* $u=\tan(t)$ *(règles de Bioche). Essayez d'appliquer cette méthode ici et comparez avec le calcul effectué ci-dessus.*

**Exemple 5.6.** *On considère l'intégrale* $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$ *où* $n\geq 2$ *est un entier pair. Le fait que* $n$ *soit pair garantit que la fonction* $f(x)=\frac{1}{1+x^n}$ *est bien continue sur* $\mathbb{R}$ *(que se passe-t-il si* $n$ *est impair ?). La condition* $n\geq 2$ *garantit elle que l'intégrale converge (prouvez-le !). On va chercher à calculer cette intégrale. Là encore vous avez vu une méthode en L1 qui permet de calculer ce type d'intégrales. La fonction* $f(x)=\frac{1}{1+x^n}$ *est une fraction rationnelle. Il "suffit" donc de factoriser* $1+x^n$ *en produit de facteurs irréductibles et de décomposer* $f$ *en éléments simples. Pour* $n$ *assez petit, disons* $2$ *ou* $4$*, ça se fait assez bien mais si* $n=14$ *par exemple ce n'est plus aussi simple. C'est surtout très fastidieux. On va ici encore essayer d'appliquer le théorème des résidus. Il va falloir cependant procéder en deux temps, comme dans l'application à la formule de Cauchy (voir la Section 4.4), car l'intégrale va de* $-\infty$ *à* $+\infty$ *et un lacet ne peut pas "aller vers l'infini".*

*Puisque l'intégrale converge on a* $I=\lim\limits_{R\to+\infty}I_R$ *avec* $I_R=\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$*. On va considérer l'intégrale de la fonction méromorphe* $f(z)=\frac{1}{1+z^n}$ *le long du lacet* $\gamma_R$ *constitué du segment* *allant de $z=-R$ à $z=R$ et du demi-cercle de centre $0$ et de rayon $R$ parcouru dans le sens trigonométrique. On pourra alors écrire*

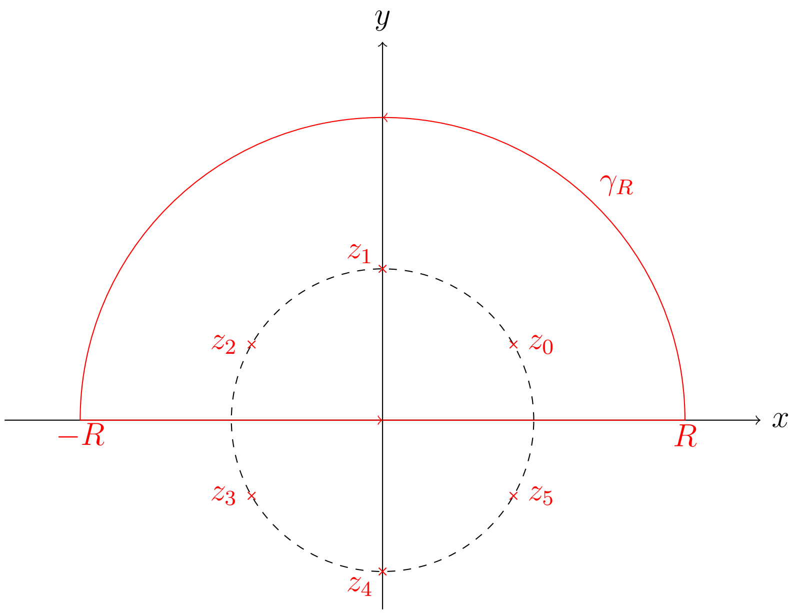
$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{[-R,R]} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C^+(0,R)} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

*où $C^+(0,R)$ désigne le demi-cercle supérieur de centre $0$ et de rayon $R$. Celui-ci peut être paramétré par $\gamma(t) = R\mathrm{e}^{it}$ avec $t \in [0,\pi]$. On aura donc*

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_0^{\pi} \frac{1}{1+R^n\mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.$$

*On va calculer l'intégrale dans le membre de gauche à l'aide du théorème des résidus et on passera ensuite à la limite $R \to \infty$.*

*La fonction $f$ a exactement $n$ pôles simples. En effet c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré $n$ et dont les racines sont les $n$ racines $n$-ème de $-1$ : ce sont les nombres $z_k = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}+i\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$, $k \in \{0,\dots,n-1\}$. Tous les pôles sont de module $1$ donc si $R > 1$ aucun pôle n'est sur $\gamma_R$. On fait ici le dessin dans le cas $n = 6$.*




*Le théorème des résidus ($f$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est étoilé) assure alors que*

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Res}(f,z_k)\mathrm{Ind}(\gamma_R, z_k).$$

*Comme tous les pôles de $f$ sont simples, pour calculer le résidu de $f$ en $z_k$ on peut appliquer le 3. de la Proposition 5.4 avec $g(z) = 1$ et $h(z) = 1 + z^n$. On a donc*

$$\mathrm{Res}(f,z_k) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-i\frac{n-1}{n}(2k+1)\pi} = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{n}\pi}.$$

*Pour calculer l'indice de chacun des $z_k$ il faut voir quels sont ceux qui sont à l'intérieur de $\gamma_R$. Puisque $R > 1$ et $|z_k| = 1$ il suffit de voir quels sont ceux qui ont une partie imaginaire* *positive. Or* $\mathrm{Im}(z_k) = \sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)$ *avec* $\frac{\pi}{n} \leq \frac{2k+1}{n}\pi \leq \frac{(2n-1)\pi}{n} < 2\pi$*. Ceux qui ont une partie imaginaire positive sont ceux pour lesquels* $\frac{2k+1}{n}\pi \leq \pi$*, i.e.* $k = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ *(on rappelle que* $n$ *est pair). Ainsi on a*

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z &= -\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n/2-1} \mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{n}\pi} \\
&= -\frac{2i\pi}{n} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n/2}}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}} \\
&= -\frac{2i\pi}{n} \times \frac{2}{\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{n}} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}} \\
&= \frac{2\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)},
\end{aligned}$$

*et donc pour tout* $R > 1$ *on a*

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} &= \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_0^\pi \frac{1}{1+R^n \mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \int_0^\pi \frac{1}{1+R^n \mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

*Il reste à passer à la limite* $R \to +\infty$*. Pour tout* $R > 1$ *et tout* $t \in [0, \pi]$ *on a*

$$\left| \frac{1}{1+R^n \mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it} \right| = \frac{R}{|1+R^n \mathrm{e}^{int}|} \leq \frac{R}{|R^n \mathrm{e}^{int}| - 1} = \frac{R}{R^n - 1}.$$

*Donc*

$$0 \leq \left| \int_0^\pi \frac{1}{1+R^n \mathrm{e}^{int}} iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{\pi R}{R^n - 1} \overset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Finalement on obtient*

$$I = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{2\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

*A nouveau bien entendu le résultat est un nombre réel, et il est positif puisque la fonction de départ était positive.*

## 5.3 Séries de Laurent et singularités essentielles

On termine le chapitre, et ce cours, avec la notion de série de Laurent qui permet entre autres de traiter de façon "unifiée" les différents types de singularités : artificielles, pôles mais aussi essentielles. Le point de départ des séries de Laurent est l'étude des fonctions holomorphes dans une couronne.

**Définition 5.5.** *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$ *et* $0 \leq r < R \leq +\infty$*. On appelle couronne, ou anneau, de centre* $z_0$ *et de rayons* $r$ *et* $R$ *l'ensemble*

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z - z_0| < R\}.$$

**Remarque 5.7.** *1) Si $R$ est fini l'ensemble $A(z_0, r, R)$ est la partie du plan comprise strictement entre les cercles de centre $z_0$ et de rayons $r$ et $R$.*

*2) Un cas important qu'on a déjà rencontré est celui où $r = 0$. On a alors simplement $A(z_0, 0, R) = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. On parle alors aussi de disque épointé.*

**Définition 5.6.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle série de Laurent sur $A(z_0, r, R)$ toute série de la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ où*

1. *la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $R$,*
2. *la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{r}$ avec par convention $\dfrac{1}{r} = +\infty$ si $r = 0$.*

**Proposition 5.5.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ une série de Laurent sur $A(z_0, r, R)$. Pour tous $r < r_1 \leq r_2 < R$ la série converge normalement sur $A(z_0, r_1, r_2)$ dans le sens où les deux séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ et $\displaystyle\sum_{n\leq -1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n\geq 1} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ convergent normalement sur cet ensemble. En particulier toute série de Laurent définit une fonction $f$ holomorphe sur $A(z_0, r, R)$ où*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

*On notera plus simplement $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ cette fonction.*

**Démonstration.** Par définition la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $R$. Elle converge donc normalement sur $D(z_0, r_2)$ et donc aussi sur $A(z_0, r_1, r_2) \subset D(z_0, r_2)$.

De même la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{r}$. Puisque $r_1 > r$ on a $\dfrac{1}{r_1} < \dfrac{1}{r}$ et donc la série $\sum_{n\geq 1} |a_{-n}| \frac{1}{r_1^n}$ converge. Or, si $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ on a $|z - z_0| > r_1$ et donc, pour tout $n \geq 1$, $\left|a_{-n}(z - z_0)^{-n}\right| = \dfrac{|a_{-n}|}{|z - z_0|^n} < \dfrac{|a_{-n}|}{r_1^n}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ converge donc normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| > r_1\}$ et donc sur $A(z_0, r_1, r_2)$.

Finalement une série entière définit une fonction holomorphe. Ainsi les fonctions $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $h(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ sont holomorphes sur $D(0, R)$ et $D\left(0, \dfrac{1}{r}\right)$ respectivement. La fonction $f(z) = g(z-z_0) + h\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ est donc holomorphe sur

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-z_0| < R\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, \left|\frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{1}{r}\right\} = A(z_0, r, R).$$

□

La proposition précédente dit que toute série de Laurent définit une fonction holomorphe dans un anneau. On va établir la réciproque, c'est à dire que toute fonction holomorphe $f$ dans un anneau $A(z_0, r, R)$ peut s'écrire sous la forme d'une série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ dans cet anneau. Plus précisément on va montrer le théorème suivant.

**Théorème 5.3.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$ et $f$ une fonction holomorphe sur $A(z_0, r, R)$. Alors*

1. *pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le nombre $a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{it}\right) e^{-int}\, dt$ ne dépend pas de $\rho \in ]r, R[$,*
2. *la série entière $\sum_{n\ge 0} a_n(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $R$ et la série entière $\sum_{n\ge 1} a_{-n}(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{r}$,*
3. *pour tout $z \in A(z_0, r, R)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Un tel développement est unique.*

**Remarque 5.8.** *La formule $a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho\, e^{it}\right) e^{-int}\, dt$ peut également s'écrire*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,\rho)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad \forall \rho \in ]r, R[.$$

Ce théorème est l'analogue, pour les fonctions holomorphes sur un anneau, du Théorème 3.4. La preuve reprend d'ailleurs plusieurs éléments qu'on a déjà rencontrés. On commence par le lemme suivant qui sera utilisé plusieurs fois par la suite.

**Lemme 5.1.** *Soit $f$ une fonction holomorphe sur $A(z_0, r, R)$. Alors l'intégrale $\int_{C(z_0,\rho)} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho e^{it}\right) \times i\rho e^{it}\, dt$ de $f$ le long d'un cercle centré en $z_0$ ne dépend pas de $\rho \in ]r, R[$.*

On a déjà rencontré le fait qu'une certaine intégrale le long d'un cercle ne dépende pas du rayon de celui-ci. C'est le cas de la formule de Cauchy par exemple. La preuve reprend la même idée que celle du Lemme 3.2.

**Démonstration.** Soit $g$ la fonction définie sur $]r, R[$ par $g(\rho) = \int_0^{2\pi} \underbrace{f\left(z_0 + \rho e^{it}\right) \times i\rho e^{it}}_{=:\phi(\rho,t)}\, dt$.

On veut montrer que $g$ est constante. Comme $f$ est holomorphe, et donc $C^1$, la fonction $\phi$

est une fonction $C^1$ de deux variables et les résultats sur les intégrales à paramètres assurent que $g$ est $C^1$ avec

$$g'(\rho) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial\rho}(\rho,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi} \left(f'\left(z_0+\rho\mathrm{e}^{it}\right)\times\mathrm{e}^{it}\times i\rho\mathrm{e}^{it} + f\left(z_0+\rho\mathrm{e}^{it}\right)\times i\mathrm{e}^{it}\right)\,\mathrm{d}t.$$

On reconnait sous le signe intégrale la dérivée (par rapport à $t$) de la fonction $t\mapsto f\left(z_0+\rho\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{it}$. On en déduit, puisque cette fonction est $2\pi$-périodique, que

$$g'(\rho) \;=\; \left[f\left(z_0+\rho\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{it}\right]_{t=0}^{2\pi} \;=\; 0.$$

La fonction $g'$ est nulle et donc $g$ est constante. □

**Démonstration du Théorème.**
1) Le fait que pour tout $n\in\mathbb{Z}$ le nombre $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{C(z_0,\rho)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$ ne dépende pas de $\rho$ découle directement du Lemme 5.1 puisque la fonction $z\mapsto \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ est holomorphe dans $A(z_0,r,R)$ (quotient de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas).
2) Soit $\rho\in]r,R[$. La fonction $f$ est holomorphe, donc continue, sur le compact $C(z_0,\rho)$. Elle y est donc bornée. On note $M_\rho = \displaystyle\sup_{z\in C(z_0,\rho)} |f(z)|$. On en déduit que pour tout entier $n$ on a

$$|a_n| \;\le\; \frac{1}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0+\rho\mathrm{e}^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\right|\,\mathrm{d}t \;\le\; \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

La série entière $\displaystyle\sum_{n\ge 0} a_n(z-z_0)^n$ a donc un rayon de convergence au moins égal à $\rho$ (c'est le même argument que dans la preuve du Lemme 3.1). Comme c'est vrai pour tout $\rho<R$ le rayon de convergence est au moins égal à $R$.

De même, on en déduit que la série entière $\displaystyle\sum_{n\ge 1} a_{-n}(z-z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{\rho}$ et comme c'est vrai pour tout $\rho>r$ on obtient que le rayon de convergence est au moins égal à $\dfrac{1}{r}$.
3) Soit $z\in A(z_0,r,R)$. Si $\rho\in]r,R[$ on a alors

$$a_n(z-z_0)^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+\rho\mathrm{e}^{it}\right)\times\left(\frac{z-z_0}{\rho\,\mathrm{e}^{it}}\right)^n\,\mathrm{d}t,$$

et on veut calculer les sommes des séries

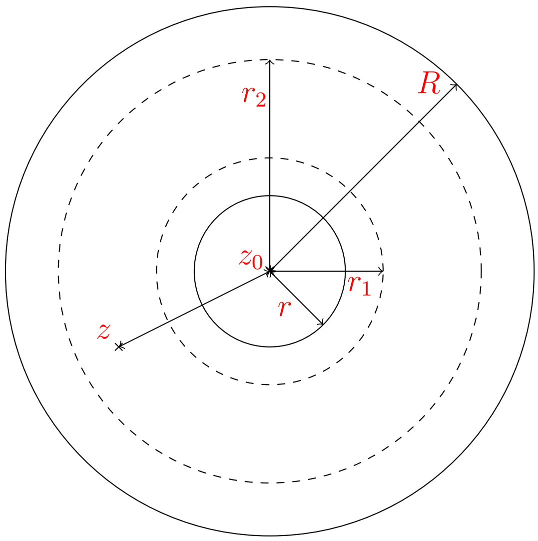
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+\rho\mathrm{e}^{it}\right)\times\left(\frac{z-z_0}{\rho\,\mathrm{e}^{it}}\right)^n\,\mathrm{d}t$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+\rho\mathrm{e}^{it}\right)\times\left(\frac{\rho\,\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}\right)^n\,\mathrm{d}t.$$

Tout comme dans la preuve du Théorème 3.4 on va chercher à intervertir série/intégrale pour faire apparaitre la somme d'une série géométrique. Pour cela on va distinguer les deux séries. Dans la première on va choisir $\rho > |z-z_0|$ et dans la seconde on va choisir $\rho < |z-z_0|$, dans les deux cas pour avoir une série géométrique de raison strictement inférieure à 1.

On choisit donc $r_1, r_2$ tels que $r < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R$ (voir dessin ci-dessous).




On a d'une part, en prenant $\rho = r_2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+r_2\mathrm{e}^{it}\right)\times\left(\frac{z-z_0}{r_2\mathrm{e}^{it}}\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} f\left(z_0+r_2\mathrm{e}^{it}\right)\times\left(\frac{z-z_0}{r_2\mathrm{e}^{it}}\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+r_2\mathrm{e}^{it}\right)\times\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{r_2\mathrm{e}^{it}}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(z_0+r_2\mathrm{e}^{it}\right)}{z_0+r_2\mathrm{e}^{it}-z}r_2\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w,
\end{aligned}$$

et d'autre part, en prenant $\rho = r_1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+r_1\mathrm{e}^{it}\right)\times\left(\frac{r_1\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(z_0+r_1\mathrm{e}^{it}\right)\times\left(\frac{r_1\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+r_1\mathrm{e}^{it}\right)\times\frac{\frac{r_1\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}}{1-\frac{r_1\mathrm{e}^{it}}{z-z_0}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0+r_1\mathrm{e}^{it}\right)}{z-z_0-r_1\mathrm{e}^{it}} r_1\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Dans les deux cas la justification de l'interversion série/intégrale se fait comme dans la preuve du Lemme 3.1 (vérifiez-le !).

Il reste à justifier que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = f(z). \tag{5.3}$$

Dans le membre de gauche on intègre la même fonction le long de deux cercles de rayons différents. Si la fonction intégrée, ici $w \mapsto \dfrac{f(w)}{w-z}$, était holomorphe dans un anneau contenant ces deux cercles alors le membre de gauche serait nul d'après le Lemme 5.1. Ici ce n'est pas le cas car le dénominateur s'annule précisément en un point entre les deux cercles. C'est justement ça qui fait que la différence n'est pas nulle. Cela ressemble à ce qui se passe dans la formule de Cauchy (Théorème 4.7) et on va procéder exactement comme dans la preuve de celle-ci.

On décompose $f(w)$ sous la forme $f(w) = (f(w)-f(z)) + f(z)$ et on a alors, pour $j=1$ ou 2,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_j)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_j)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_j)} \frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_j)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w + f(z)\times \mathrm{Ind}\left(C(z_0,r_j),z\right). \end{aligned}$$

La position de $z$ par rapport aux cercles $C(z_0,r_1)$ et $C(z_0,r_2)$ donne $\mathrm{Ind}\left(C(z_0,r_1),z\right)=0$ et $\mathrm{Ind}\left(C(z_0,r_2),z\right)=1$, et donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \\ = &\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w + f(z). \end{aligned}$$

On introduit alors la fonction $g$ définie sur $A(z_0,r,R)$ par $g(w) = \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z}$ si $w \neq z$ et $g(z) = f'(z)$. Le même argument que dans la preuve du Théorème 4.7 montre que $g$ est holomorphe sur $A(z_0,r,R)$. On peut cette fois appliquer le Lemme 5.1 ce qui prouve que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_2)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r_1)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

et donc qu'on a bien (5.3).

On montre enfin l'unicité du développement en série de Laurent. On suppose que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$. On veut montrer que pour tout $n$ on a $b_n = a_n$. Soit $\rho \in ]r,R[$ et $r_1, r_2$ tels que $r < r_1 < \rho < r_2 < R$. Comme il y a convergence normale sur $A(z_0, r_1, r_2)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \rho^n \mathrm{e}^{int}\mathrm{e}^{-imt}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ vers $f(z_0 + \rho\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-imt}$. Si $m \in \mathbb{Z}$ on a donc

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-imt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\rho^n\mathrm{e}^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi\rho^m}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} b_n\rho^n\mathrm{e}^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Toutes les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi} b_n\rho^n\mathrm{e}^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t$ sont nulles sauf lorsque $n = m$ et elle vaut alors $2\pi b_m\rho^m$. Au final on a bien $a_m = b_m$. □

On revient aux singularités de fonctions holomorphes. Si $z_0 \in \Omega$ est une singularité isolée d'une fonction holomorphe $f$, comme $\Omega$ est ouvert il existe $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ et tel que $f$ est holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\} = A(z_0, 0, R)$. Le théorème précédent assure ainsi qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n. \tag{5.4}$$

Cette décomposition ressemble à celle obtenue en (5.1) dans le cas où $z_0$ est un pôle. On va en fait voir que c'est la décomposition (5.1) qui est un particulier de (5.4) et que la décomposition en série de Laurent permet également de classifier les singularités.

**Proposition 5.6.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et $f$ une fonction holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ dont le développement en série de Laurent est donné par (5.4).*

1. *Si $a_{-n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors $z_0$ est une singularité artificielle de $f$.*
2. *Si $a_{-n} \neq 0$ pour un nombre fini non nul d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ alors $z_0$ est un pôle de $f$. De plus l'ordre du pôle est $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}^* \,|\, a_{-n} \neq 0\}$.*
3. *Si $a_{-n} \neq 0$ pour une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ alors $z_0$ est une singularité essentielle de $f$.*

**Démonstration.** Les 1. et le 2. découlent directement de la définition de singularité artificielle et de celle de pôle.

En effet, si $a_{-n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors d'après (5.4) pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

et $f$ se prolonge en une fonction holomorphe en $z_0$ en posant $f(z_0) = a_0$.

Si maintenant $a_{-n} \neq 0$ pour un nombre fini non nul d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}^* \,|\, a_{-n} \neq 0\}$ alors, toujours d'après (5.4), pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^{n_0}}\sum_{n=-n_0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n+n_0} = \frac{1}{(z-z_0)^{n_0}}\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-n_0}(z-z_0)^k.$$

La fonction $g(z) = (z - z_0)^{n_0} f(z)$ se prolonge donc en fonction holomorphe en $z_0$ en posant $g(z_0) = a_{-n_0} \neq 0$. $z_0$ est donc bien un pôle et comme $a_{n_0} \neq 0$ l'ordre du pôle est bien $n_0$.

Finalement pour le 3. il suffit d'utiliser l'unicité du développement en séries de Laurent. En effet, si $z_0$ n'était pas une singularité essentielle ce serait une singularité artificielle ou un pôle. On pourrait donc écrire, dans $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, la fonction $f$ sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

où $n_0 = 0$ si $z_0$ est une singularité artificielle et $n_0$ est l'ordre du pôle $z_0$ sinon. Par unicité du développement en série de Laurent on aurait alors $a_n = 0$ pour tout $n \leq -n_0$ $(n \in \mathbb{Z})$. $\square$

On peut enfin démontrer que le théorème des résidus se généralise au cas de fonctions ayant des singularités essentielles. Pour cela, et par analogie avec ce qu'on a fait pour les fonctions méromorphes, on définit la notion de résidu.

**Définition 5.7.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ tel que $f$ soit holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ et $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ son développement en séries de Laurent. Le nombre $a_{-1}$ s'appelle le résidu de $f$ en $z_0$ et est noté* $\mathrm{Res}(f, z_0)$, *i.e.* $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{C(z_0,r)} f(z)\, \mathrm{d}z$ *où $0 < r < R$.*

On a alors

**Théorème 5.4** (Théorème des résidus - 2)**.** *Soit $\Omega$ un ouvert étoilé, $\mathcal{P}$ une partie discrète de $\Omega$ et $f : \Omega \setminus \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Pour tout lacet $\gamma$ inclus dans $\Omega$ et ne passant pas par $\mathcal{P}$ on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{z \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}(f, z) \mathrm{Ind}(\gamma, z).$$

*La somme dans le membre de droite converge dans le sens où il n'y a qu'un nombre fini de termes non-nuls.*

**Remarque 5.9.** *La preuve est essentiellement la même que pour les fonctions méromorphes. La seule difficulté est de justifier l'intégration terme à terme de la partie d'indices négatifs dans la série de Laurent alors qu'on avait juste une somme finie dans le cas des fonctions méromorphes. Cela se justifie en utilisant la convergence uniforme de la série des termes d'indices négatifs.*