
TD 6 : Singularités, fonctions méromorphes et résidus

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses singularités isolées et préciser leur nature. Dans le cas des pôles préciser également leur ordre.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{\cos(z)}{z} & \text{c)} \frac{z^3}{\sin(\pi z)} & \text{e)} \exp\left(\frac{z}{z-2}\right) & \text{g)} \frac{1}{z(z+1)} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right) \\ \text{b)} \frac{\text{Log}(1+z)}{z^3} & \text{d)} \frac{1}{(e^z-1)^2} & \text{f)} \frac{1}{1+\cos(z)} \end{array}$$

Exercice 2 (Examen 2020). Soit $\Omega = D(0, 1)$ et $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose de plus que pour tout $z \in \overline{\Omega}$ on a $|f(z)| \leq 1$ et que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

a) Soit $g(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \bar{z}}$.

i) Vérifiez que g est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.

ii) Montrer que pour tout $z \in \overline{\Omega}$ on a $|g(z)| \leq 1$ et que de plus $|g(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

b) Soit $h = \frac{f}{g}$.

i) Vérifiez que h est méromorphe sur Ω et qu'elle a une unique singularité que l'on précisera.

ii) Montrez que h se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.

c) Montrer que pour tout $z \in \Omega$ on a $|f(z)| \leq |g(z)|$.

d) On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes sur Ω , continues sur $\overline{\Omega}$ et telles que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$. Déterminer $\sup_{f \in \mathcal{A}} \left|f\left(\frac{i}{2}\right)\right|$.

Question subsidiaire : déterminer toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{A}$ telles que $\left|\varphi\left(\frac{i}{2}\right)\right| = \sup_{f \in \mathcal{A}} \left|f\left(\frac{i}{2}\right)\right|$.

Exercice 3. Calculer le résidu de la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)}$ en chacun de ses pôles. Même question

avec la fonction $g(z) = \frac{e^{iz}}{z(1+z^2)^2}$.

Exercice 4. Pour chacune des fonctions de l'Exercice 1, déterminer leur résidu en chacun de leur pôle (pas pour les singularités essentielles).

Exercice 5. Soit Ω un domaine et $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes telles que $h \neq 0$ et $f = \frac{g}{h}$.

a) Montrer que si $z_0 \in \Omega$ est un zéro d'ordre 2 de h alors $\text{Res}(f, z_0) = \frac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3h''(z_0)^2}$.

b) Soit $f(z) = \frac{e^z}{(\sinh(z))^2}$. Calculer $\text{Res}(f, 0)$.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la méthode des résidus. Dans chaque cas on précisera l'ouvert étoilé Ω sur lequel on applique le Théorème des résidus.

$$\text{a) } \int_{|z|=2} \tan(z) dz, \quad \text{b) } \int_{|z|=2} \frac{z+i}{\text{Log}(2+i+z)} dz.$$

Exercice 7. On veut calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$.

a) Justifier que cette intégrale converge.

b) Soit $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ et $R > 1$. Calculer l'intégrale de f le long du chemin γ constitué du segment $[-R, R]$ suivi du demi-cercle inclus dans le demi-plan supérieur, de centre 0 et allant de R à $-R$.

c) En déduire la valeur de I .

Exercice 8. Démontrer que $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx = \frac{\pi}{2 \cosh(\pi/2)}$ en utilisant l'intégrale de $f(z) = \frac{\cos(z)}{\cosh(z)}$ le long du contour donné par le rectangle de sommets $\pm R$ et $\pm R + i\pi$ ($R > 0$).

Exercice 9 (Examen Session 1 - Décembre 2020). Soit $a \in]0, 1[\cup]1, 2[$. On considère la fonction définie par $f_a(z) = \frac{z}{a - e^{-iz}}$.

Partie I.

a) i) Justifier que f_a est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

ii) Déterminer les pôles de f_a en précisant leur ordre.

iii) Calculer le résidu de f en chacun de ses pôles.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$ on considère le lacet γ_n donné par le rectangle de sommets $-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in$ et parcouru une fois dans le sens direct.

i) Représenter le lacet γ_n . On placera aussi sur le dessin le(s) pôle(s) éventuel(s) de f_a qui sont à l'intérieur de γ_n . On fera 2 dessins, un dans le cas $a \in]0, 1[$ et un dans le cas $a \in]1, 2[$.

ii) Justifier que $\int_{\gamma_n} f_a(z) dz$ est bien définie et calculer sa valeur. Le résultat peut a priori dépendre de a et/ou de n .

Partie II. Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'intégrale $I(a) = \int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1+a^2-2a \cos(t)} dt$.

a) Montrer que $I(a)$ est bien définie. On pourra commencer par vérifier que $1+a^2-2a \cos(t) = (a - e^{-it})(a - e^{it})$.

b) Donner un paramétrage de chacun des 4 segments $[-\pi, \pi]$, $[\pi, \pi + in]$, $[-\pi + in, \pi + in]$ et $[-\pi, -\pi + in]$.

c) Montrer que $\int_{[-\pi, \pi]} f_a(z) dz = -2iI(a)$. Indication : parité.

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[\pi+in, -\pi+in]} f_a(z) dz = 0$.

e) i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_{[\pi, \pi+in]} f_a(z) dz + \int_{[-\pi+in, -\pi]} f_a(z) dz = 2i\pi \int_0^n \frac{dt}{a+e^t} = 2i\pi \int_0^n \frac{e^{-t}}{1+ae^{-t}} dt.$$

ii) Calculer $2i\pi \int_0^n \frac{e^{-t}}{1+ae^{-t}} dt$ et en déduire la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{[\pi, \pi+in]} f_a(z) dz + \int_{[-\pi+in, -\pi]} f_a(z) dz \right).$$

f) Calculer $I(a)$ en fonction des valeurs de a .

Exercice 10 (Examen Session 2 - Juin 2023). Dans tout l'exercice on fixe $a, b > 0$ avec $a \neq b$. Le but est de montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

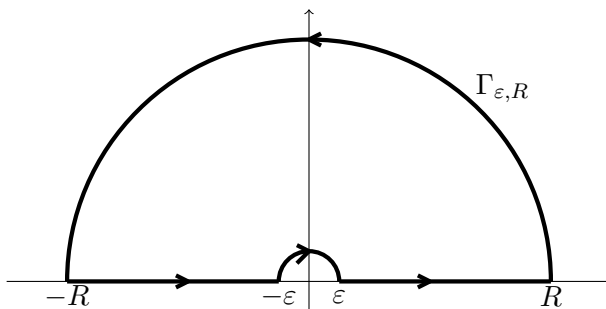
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx.$$

On considère pour cela la fonction f définie par $f(z) = \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$.

a) Justifier rapidement que f définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et qu'elle admet une unique singularité z_0 que l'on précisera.

b) Justifier que z_0 est un pôle simple de f et que $\text{Res}(f, z_0) = i(a - b)$.

Etant donnés $\varepsilon, R > 0$ tels que $0 < \varepsilon < R$ on considère le contour $\Gamma_{\varepsilon, R}$ représenté ci-dessous et parcouru une fois dans le sens direct.



On notera par la suite γ_1 le demi-cercle de rayon R , γ_2 le segment d'extrémités $-R$ et $-\varepsilon$, γ_3 le demi-cercle de rayon ε , et γ_4 le segment d'extrémités ε et R , tous parcourus dans le même sens que sur le dessin.

c) Justifier que $\int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz$ est bien définie et calculer sa valeur. Vous justifierez soigneusement l'utilisation de tout théorème.

d) Donner un paramétrage de chacun des 4 chemins $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 .

e) Montrer que $\int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz = 2 \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} dx$.

f) Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$. Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout point z sur γ_1 on a $|f(z)| \leq \frac{2}{R^2}$.

g) i) En utilisant le résultat de la question b) montrer qu'il existe g holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que pour tout $z \neq 0$ on a $f(z) = \frac{i(a - b)}{z} + g(z)$.

ii) Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} g(z) dz = 0$. Indication : on pourra d'abord justifier que g admet une primitive

G (que l'on ne cherchera pas à expliciter) sur $\mathbb{C}$ et exprimer $\int_{\gamma_3} g(z) dz$ à l'aide de G .

iii) En déduire la valeur de $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} f(z) dz$.

h) A l'aide de tout ce qui précède montrer que I converge et déterminer sa valeur.

Exercice 11 (Examen session 2 - Juin 2021). Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale

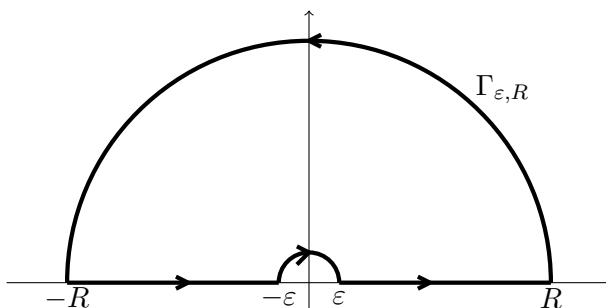
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx.$$

Dans tout l'exercice $\log$ désignera la détermination du logarithme définie sur le domaine $\Omega = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$, où $i\mathbb{R}_- = \{iy \in \mathbb{C} \mid y \in]-\infty, 0]\}$, par $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[}(z)$. On rappelle que cette fonction est holomorphe sur son ensemble de définition. Enfin on considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right)}{1+z^2}.$$

- a) Justifier que l'intégrale I converge.
- b) Calculer $\log(1)$, $\log(i)$ et $\log(-1)$.
- c) Justifier que f définit une fonction méromorphe sur Ω .
- d) Montrer que f admet un unique pôle z_0 que l'on précisera. Donner son ordre et calculer le résidu de f en z_0 .

Etant donnés $\varepsilon, R > 0$ tels que $0 < \varepsilon < 1 < R$ on considère le contour $\Gamma_{\varepsilon, R}$ représenté ci-dessous et parcouru une fois dans le sens direct. On notera par la suite γ_1 le demi-cercle de rayon R , γ_2 le segment d'extrémités $-R$ et $-\varepsilon$, γ_3 le demi-cercle de rayon ε , et γ_4 le segment d'extrémités ε et R , tous parcourus dans le même sens que sur le dessin.



- e) Justifier que $\int_{\Gamma_{\varepsilon, R}} f(z) dz$ est bien définie et calculer sa valeur. Vous commencerez par reproduire rapidement le contour et placerez z_0 sur la figure, et vous justifierez soigneusement l'utilisation de tout théorème.
- f) Donner un paramétrage de chacun des 4 chemins γ_1 , γ_2 , γ_3 et γ_4 .
- g) Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz = 0$. De même montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} f(z) dz = 0$.
- h) Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} f(z) dz = I$.
- i) Calculer de même $\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} f(z) dz$ en fonction de I .
- j) En déduire la valeur de I .

Exercice 12 (Examen Session 1 - Décembre 2021). Le but de l'exercice est de calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on note $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$. On

considère la fonction g définie par $g(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)\sin(\pi z)}$.

- a) i) Justifier que g définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
- ii) Déterminer les pôles de g en précisant leur ordre.
- iii) Calculer le résidu de g en chacun de ses pôles.

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note Γ_N le chemin fermé donné par le carré, parcouru une fois dans le sens direct, dont les sommets sont les points d'affixes $a_N = (N + \frac{1}{2}) - i(N + \frac{1}{2})$, $b_N = (N + \frac{1}{2}) + i(N + \frac{1}{2})$, $c_N = -(N + \frac{1}{2}) + i(N + \frac{1}{2})$ et $d_N = -(N + \frac{1}{2}) - i(N + \frac{1}{2})$.

i) Représenter le lacet Γ_3 et placer sur le graphe les pôles de g qui sont à l'intérieur de Γ_3 .

ii) Etant donné $N \in \mathbb{N}^*$ préciser quels sont les pôles de g qui sont à l'intérieur de Γ_N .

iii) Justifier que $\int_{\Gamma_N} g(z) dz$ est bien définie et montrer que $\int_{\Gamma_N} g(z) dz = 2i \left(1 + 2S_N - \frac{\pi}{\sinh(\pi)} \right)$,

où S_N désigne la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note γ_1 le segment $[a_N, b_N]$, γ_2 le segment $[b_N, c_N]$, γ_3 le segment $[c_N, d_N]$ et γ_4 le segment $[d_N, a_N]$.

i) Donner un paramétrage de chacun des segments γ_1 , γ_2 , γ_3 et γ_4 .

ii) Montrer que pour tout point de γ_1 on a

$$\sin(\pi\gamma_1(t)) = (-1)^N \frac{e^{\pi \operatorname{Im}(\gamma_1(t))} + e^{-\pi \operatorname{Im}(\gamma_1(t))}}{2},$$

et que de même pour tout point de γ_3 on a

$$\sin(\pi\gamma_3(t)) = (-1)^{N+1} \frac{e^{\pi \operatorname{Im}(\gamma_3(t))} + e^{-\pi \operatorname{Im}(\gamma_3(t))}}{2}.$$

iii) Montrer que pour tout point de γ_2 on a $|\sin(\pi\gamma_2(t))| \geq \frac{e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{2}$ et qu'il en est de même pour tout point de γ_4 .

iv) En déduire que pour tout $z \in \Gamma_N$ on a $|\sin(\pi z)| \geq \frac{1}{2}$.

d) En utilisant la question précédente montrer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_N} g(z) dz = 0$.

e) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ converge et donner la valeur de sa somme.

Exercice 13 (Examen Session 1 - Décembre 2022). Une autre preuve du théorème de Liouville.

Le but de l'exercice est de proposer une autre démonstration du théorème de Liouville que celle vue en cours. Dans tout l'exercice on n'utilisera donc pas ce théorème.

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si $R > 0$ on note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R , parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| \neq R$ on note $I_a(R)$ l'intégrale

$$I_a(R) = \int_{\gamma_R} \frac{af(z)}{z(z-a)} dz.$$

a) Justifier rapidement que $g(z) = \frac{af(z)}{z(z-a)}$ définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminer ses pôles et calculer le résidu de g en chacun d'entre eux. On exprimera leur valeur en fonction de $f(0)$ et $f(a)$.

b) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $R \neq |a|$ l'intégrale $I_a(R)$ est bien définie et calculer sa valeur. Indication : on distinguera selon que $R < |a|$ ou $R > |a|$.

On suppose par la suite qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

c) Paramétrer le chemin γ_R . En déduire que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $R > |a|$ on a $|I_a(R)| \leq \frac{2\pi|a|M}{R - |a|}$.

d) En utilisant les questions c) et d) montrer que $f(a) = f(0)$ pour tout $a \in \mathbb{C}^*$.

e) Enoncer le théorème de Liouville et utiliser ce qui précède pour le démontrer.

Les deux derniers exercices ci-dessous sont dans le même esprit que les exercices 7 à 11 et ont pour but de calculer certaines intégrales réelles à l'aide du théorème des résidus. Ils sont un peu plus difficiles car nécessitent l'utilisation du théorème de convergence dominée pour justifier le passage à la limite dans certaines intégrales.

Exercice 14. Soit γ le chemin constitué du segment $[\varepsilon; R]$ puis du demi cercle inclus dans le demi plan $\text{Im}(z) \geq 0$ d'extrémités R et $-\varepsilon$ et de centre 0, puis du segment $[-R; -\varepsilon]$, et enfin d'un demi cercle d'extrémités $-\varepsilon$ et ε et de centre 0.

a) Représenter γ .

b) Déterminer $\int_{\gamma} f(z) dz$ où f est la fonction définie par $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 15. Soit $\log$ la détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ telle que $\log(z) = \ln(|z|) + i \arg_{]0; 2\pi[}(z)$. Etant donnés $0 < r < R$ on considère le lacet γ constitué du segment $[ir, R + ir]$, puis de l'arc de cercle de centre 0 allant de $R + ir$ à $R - ir$ parcouru dans le sens trigonométrique, puis du segment $[R - ir, -ir]$ et enfin du demi-cercle de centre 0, d'extrémités $-ir$ et ir et parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique.

a) Représenter γ .

b) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)(x^2+1)} dx$ converge.

c) En utilisant l'intégrale de $f(z) = \frac{(\log(z))^2}{(z+1)(z^2+1)}$ le long de γ trouver la valeur de I .