
TD 5 : Intégrales le long d'un chemin et formules de Cauchy

Exercice 1. Calculer les intégrales $\int_{\gamma} f(z) dz$ dans chacun des cas suivants. On commencera à chaque fois par représenter graphiquement le chemin γ .

a) $f(z) = e^z$ et γ le demi-cercle de centre 0, de rayon 3 allant de -3 à 3 dans le sens trigonométrique. Comparer avec $\int_{-3}^3 e^x dx$.

b) $f(z) = z + \bar{z}$ et $\gamma = [i, 2i + 1]$,

c) $f(z) = z + \bar{z}$ et $\gamma = [1, -1 + i]$,

d) $f(z) = e^z$ et $\gamma = [2, 2 + 5i]$.

e) $f(z) = \bar{z}$ et γ l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ allant de $1 + i$ à $2 + 4i$.

f) $f(x + iy) = x + iy^2$ et γ est le demi-cercle joignant le point $-i$ au point i dans le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$ suivi du segment $[i, -i]$.

Exercice 2. Calculer $\int_{\gamma} z^n dz$ où γ est le cercle $C(0, 1)$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Calculer $\int_{\gamma_{\alpha}} \frac{dz}{z}$ où γ_{α} est l'arc de cercle de centre 0, de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique, et partant du point d'affixe $z = R$ et d'angle $\alpha > 0$.

Exercice 4. Calculer les intégrales $I = \int_{\gamma} (z - i)^2 dz$ et $J = \int_{\gamma} (\sin z)(\cos z) dz$ où γ est le chemin défini sur $[0, 1]$ par $\gamma(t) = t + it^2$.

Exercice 5 (CC4 - 2021).

a) Soit γ le chemin fermé constitué du segment $[-1 + i, 1 - i]$ suivi du demi-cercle de centre 0 allant de $1 - i$ à $-1 + i$ et parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

i) Représenter graphiquement γ puis donner un paramétrage de chacun de ses morceaux.

ii) Justifier que $I_1 = \int_{\gamma} \bar{z} dz$ est bien définie et la calculer.

iii) Justifier que $I_2 = \int_{\gamma} \cos(z^2) dz$ est bien définie et la calculer.

b) Soit $\tilde{\gamma}$ le segment $[2i, 1 + i]$. Montrer que $I_3 = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{dz}{z}$ est bien définie et la calculer.

Exercice 6. Montrer que la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$ est bien définie sur $D(1, 1) \setminus \{1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - 1| < 1\}$ mais qu'elle n'a pas de primitive sur cet ensemble.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions C^1 sur un ouvert Ω et $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin.

a) Montrer la formule de l'intégration par parties

$$\int_{\gamma} f(z)g'(z) dz = [f(z)g(z)]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} - \int_{\gamma} f'(z)g(z) dz.$$

b) Que devient cette formule si γ est un lacet ?

c) Calculer $\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{z^2} dz$ où γ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Exercice 8. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et γ le bord du triangle de sommets les points d'affixe 0, a et ib parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_{\gamma} e^z dz$ et $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(e^z) dz$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On considère $I = \int_{C(0,1)} f(z) dz$ où $C(0, 1)$ est le cercle unité orienté dans le sens direct et on suppose que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in C(0, 1)$.

a) Montrer que $|I| \leq 2\pi$.

b) Calculer I si $f(z) = \bar{z}$.

c) On suppose maintenant que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ et que $I \in \mathbb{R}$. Montrer que $|I| \leq 4$.

d) En supposant juste que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, montrer que $|I| \leq 4$.

Exercice 10. Pour chacun des ouverts suivants dire s'il est étoilé ou non. Faites un dessin !

a) Un disque.

b) L'intérieur d'un carré.

c) Le complémentaire d'un point.

d) Le complémentaire d'une droite.

e) Le complémentaire d'une demi-droite.

f) Le complémentaire d'un segment.

g) Le complémentaire de deux demi-droites disjointes et incluses dans la même droite.

h) Le complémentaire d'un disque fermé.

Exercice 11. A l'aide des formules de Cauchy calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$ où γ est le cercle $|z - i| = 1$ parcouru une fois dans le sens direct.

b) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}$ où γ est le cercle $|z| = 2$ parcouru une fois dans le sens direct.

c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z - 1)}$ où γ est le cercle $|z| = 2$ parcouru une fois dans le sens direct.

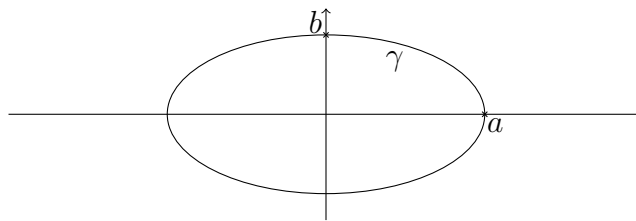
d) $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - 4)(z^2 + 1)}$ où γ est le cercle $|z| = 2$ parcouru une fois dans le sens direct.

- e) $\int_{\gamma} \frac{e^{2z}(z^2 + 3z - 2)}{(z - 1)^3} dz$ où γ est le cercle $|z| = 2$ parcouru une fois dans le sens direct.
- f) $\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{\pi z}{2}}}{z^2 + 1} dz$ où γ est le cercle $|z| = 2$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 12. Dans tout l'exercice on note $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$ dont l'image est le cercle $|z| = 1$ parcouru une fois dans le sens direct.

- a) Calculer $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} dz$. En déduire la valeur de $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos(t)}$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \cos^n(t) dt$.

Exercice 13 (Examen session 2 - Juin 2023). Soit $a, b > 0$. On considère le lacet γ défini par sur $[0, 2\pi]$ par $\gamma(t) = a \cos(t) + ib \sin(t)$. L'image de γ est l'ellipse représentée sur le dessin ci-dessous et parcourue une fois dans le sens trigonométrique.



En calculant de deux façons différentes l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ déterminer la valeur de l'intégrale

$$I(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}.$$

Exercice 14. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ (en particulier P n'est pas le polynôme nul). On note P' son polynôme dérivé. On rappelle (conséquence du Théorème de D'Alembert-Gauss) que P s'écrit sous la forme

$$P(z) = a \prod_{k=1}^{\ell} (z - z_k)^{\alpha_k}$$

où $a \in \mathbb{C}^*$ est le coefficient dominant de P , et $z_1, \dots, z_{\ell}$ les racines de P de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}$ (avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_{\ell} = n$).

a) Montrer que pour tout $z \notin \{z_1, \dots, z_{\ell}\}$ on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\alpha_j}{z - z_j}.$$

b) Soit γ un lacet ne passant par aucun des z_k , $k = 1, \dots, \ell$. Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ est égal au nombre de racines de P , comptées avec multiplicité, à l'intérieur de γ .

Exercice 15 (Examen session 2 - Juin 2022). Le but de l'exercice est de montrer que les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt, \quad J = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$$

convergent et de calculer leur valeur. On considère pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = e^{iz^2}$. Etant donné $R > 0$ on note Γ_R le lacet constitué de la concaténation des chemins :

- $\gamma_{1,R}$ le segment allant de $z = 0$ à $z = R$,
- $\gamma_{2,R}$ l'arc de cercle de centre 0 d'angle $+\frac{\pi}{4}$ et partant de $z = R$,
- $\gamma_{3,R}$ le segment allant de $z = Re^{i\pi/4}$ à $z = 0$,

On notera également I_R l'intégrale $I_R = \int_0^R e^{it^2} dt$.

a) Représenter graphiquement le lacet Γ_R .

b) Montrer que pour tout $R > 0$ on a $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$.

c) Donner un paramétrage de chacun des 3 chemins $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$ et $\gamma_{3,R}$.

d) Exprimer $\int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz$ à l'aide de I_R .

e) Montrer que $\int_{\gamma_{3,R}} f(z) dz = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-t^2} dt$.

f) Montrer que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz = 0$. Indication : on pourra utiliser que $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

g) Dédire des questions précédentes que I converge et donner sa valeur. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

h) Donner les valeurs de J et K .

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et r un réel tel que $0 < r < |a|$. On note γ le cercle de centre a et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct. Le but est de calculer l'intégrale $I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z\bar{z}}$.

a) Représenter graphiquement γ . Peut-on affirmer que $I = 0$? Pourquoi?

b) Montrer que pour tout $z \in \gamma$ on a $\bar{z} = \frac{r^2}{z-a} + \bar{a}$.

c) En déduire que $I = \int_{\gamma} \frac{z-a}{z(z\bar{a} - (|a|^2 - r^2))} dz$.

d) Calculer I à l'aide de la formule de Cauchy.