L3 Mathématiques
2022/2023
Analyse complexe

TD 5 : Singularités, fonctions méromorphes et résidus

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses singularités isolées et préciser leur nature. Dans le cas des pôles préciser également leur ordre.

a) $\dfrac{\cos(z)}{z}$.

b) $\dfrac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^3}$.

c) $\dfrac{1}{(1-\mathrm{e}^z)^2}$.

d) $\dfrac{z^3}{\sin(\pi z)}$.

e) $\exp\left(\dfrac{z}{z-2}\right)$.

f) $\dfrac{1}{1+\cos(z)}$.

g) $\dfrac{1}{z(z+1)}\sin\left(\dfrac{\pi}{z}\right)$.

Exercice 2 (Examen 2020)**.** Soit $\Omega = D(0,1)$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. On suppose de plus que pour tout $z \in \overline{\Omega}$ on a $|f(z)| \leq 1$ et que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

a) Soit $g(z) = \dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}$.

i) Vérifiez que g est holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.

ii) Montrer que pour tout $z \in \overline{\Omega}$ on a $|g(z)| \leq 1$ et que de plus $|g(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

b) Soit $h = \frac{f}{g}$.

i) Vérifiez que h est méromorphe sur Ω et qu'elle a une unique singularité que l'on précisera.

ii) Montrez que h se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$.

c) Montrer que pour tout $z \in \Omega$ on a $|f(z)| \leq |g(z)|$.

d) On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ holomorphes sur Ω, continues sur $\overline{\Omega}$ et telles que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$. Déterminer $\sup\limits_{f\in\mathcal{A}}\left|f\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\right|$.

Question subsidiaire : déterminer toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{A}$ telles que $\left|\varphi\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\right| = \sup\limits_{f\in\mathcal{A}}\left|f\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)\right|$.

Exercice 3. Calculer le résidu de la fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)}$ en chacun de ses pôles. Même question avec la fonction $g(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z(1+z^2)^2}$.

Exercice 4. Soit $p > 1$ et $z_0 = -p + \sqrt{p^2-1}$. Déterminer le résidu en z_0 de la fonction définie par $f(z) = \dfrac{4z}{(z^2+2pz+1)^2}$.

Exercice 5. Soit Ω un domaine et $g, h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes telles que $h \neq 0$ et $f = \dfrac{g}{h}$.

a) Montrer que si $z_0 \in \Omega$ est un zéro d'ordre 2 de h alors $\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{2g'(z_0)}{h''(z_0)} - \dfrac{2g(z_0)h'''(z_0)}{3h''(z_0)^2}$.

b) Soit $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(\sinh(z))^2}$. Calculer $\mathrm{Res}(f, 0)$.

c) A l'aide de cette méthode retrouver le résultat de l'Exercice 4.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la méthode des résidus. Dans chaque cas on précisera l'ouvert étoilé Ω sur lequel on applique le Théorème des résidus.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \tan(z)\,\mathrm{d}z,$ **b)** $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z+i}{\mathrm{Log}(2+i+z)}\,\mathrm{d}z.$

Exercice 7. Soit γ le chemin constitué du segment $[\varepsilon; R]$ puis du demi cercle inclus dans le demi plan $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ d'extrémités R et $-R$ et de centre 0, puis du segment $[-R; -\varepsilon]$, et enfin d'un demi cercle d'extrémités $-\varepsilon$ et ε et de centre 0.

a) Représenter γ.

b) Déterminer $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ où f est la fonction définie par $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 8. On veut calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$

a) Justifier que cette intégrale converge.

b) Soit $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ et $R > 1$. Calculer l'intégrale de f le long du chemin γ constitué du segment $[-R, R]$ suivi du demi-cercle inclus dans le demi-plan supérieur, de centre 0 et allant de R à $-R$.

c) En déduire la valeur de I.

Exercice 9. Soit log la détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ telle que $\log(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg_{]0;2\pi[}(z)$. Etant donnés $0 < r < R$ on considère le lacet γ constitué du segment $[\mathrm{i}r, R+\mathrm{i}r]$, puis de l'arc de cercle de centre 0 allant de $R+\mathrm{i}r$ à $R-\mathrm{i}r$, puis du segment $[R-\mathrm{i}r, -\mathrm{i}r]$ et enfin du demi-cercle de centre 0 et d'extrémités $-\mathrm{i}r$ et $\mathrm{i}r$.

a) Représenter γ.

b) Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ converge.

c) En utilisant l'intégrale de $f(z) = \dfrac{(\log(z))^2}{(z+1)(z^2+1)}$ le long de γ trouver la valeur de I.

Exercice 10. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\cosh(\pi/2)}$ en utilisant comme contour le rectangle de sommets $\pm R$ et $\pm R + i\pi$.

Exercice 11 (Examen 2020)**.** Etant donné $a \in]0, 1[\cup]1, 2[$ on considère la fonction définie par

$$f_a(z) = \frac{z}{a - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}.$$

Partie I.

a) i) Justifier que f_a est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

ii) Déterminer les pôles de f_a en précisant leur ordre.

iii) Calculer le résidu de f en chacun de ses pôles.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$ on considère le lacet γ_n donné par le rectangle de sommets $-\pi$, π, $\pi + \mathrm{i}n$, $-\pi + \mathrm{i}n$ et parcouru une fois dans le sens direct.

i) Représenter le lacet γ_n. On placera aussi sur le dessin le(s) pôle(s) éventuel(s) de f_a qui sont à l'intérieur de γ_n. On fera 2 dessins, un dans le cas $a \in]0, 1[$ et un dans le cas $a \in]1, 2[$.

ii) Justifier que $\displaystyle\int_{\gamma_n} f_a(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et calculer sa valeur. Le résultat peut a priori dépendre de a et/ou de n.

Partie II. Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+a^2-2a\cos(t)}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $I(a)$ est bien définie. On pourra commencer par vérifier que $1+a^2-2a\cos(t) = \left(a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\left(a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$.

b) Donner un paramétrage de chacun des 4 segments $[-\pi,\pi]$, $[\pi,\pi+\mathrm{i}n]$, $[-\pi+\mathrm{i}n,\pi+\mathrm{i}n]$ et $[-\pi,-\pi+\mathrm{i}n]$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_{[-\pi,\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z = -2\mathrm{i}I(a)$. Indication : parité.

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{[\pi+\mathrm{i}n,-\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

e) i) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a

$$\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{a+\mathrm{e}^t} \;=\; 2\mathrm{i}\pi\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

ii) Calculer $2\mathrm{i}\pi\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+a\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ et en déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[\pi,\pi+\mathrm{i}n]} f_a(z)\,\mathrm{d}z + \int_{[-\pi+\mathrm{i}n,-\pi]} f_a(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

f) Calculer $I(a)$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 12 (Examen session 2 - 2021)**.** Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout l'exercice $\log$ désignera la détermination du logarithme définie sur $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathrm{i}\mathbb{R}_-$, où $\mathrm{i}\mathbb{R}_- = \{\mathrm{i}y\in\mathbb{C}\mid y\in]-\infty,0]\}$, par $\log(z) = \ln(|z|)+\mathrm{i}\arg_{]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}(z)$. On rappelle que cette fonction est holomorphe sur son ensemble de définition. Enfin on considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\log(z)\right)}{1+z^2}.$$

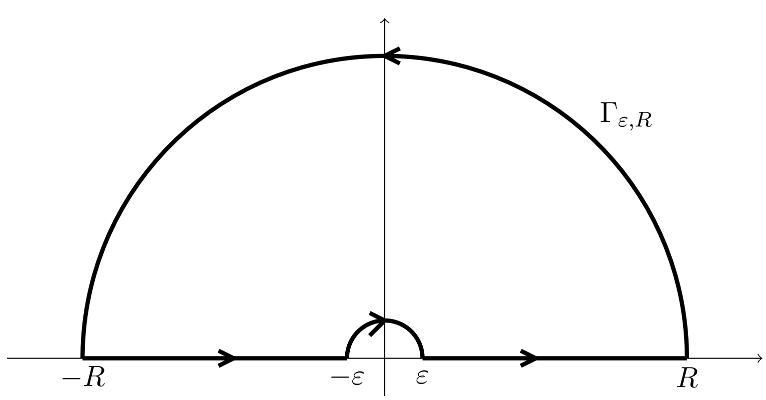
a) Justifier que l'intégrale I converge.

b) Calculer $\log(1)$, $\log(\mathrm{i})$ et $\log(-1)$.

c) Justifier que f définit une fonction méromorphe sur Ω.

d) Montrer que f admet un unique pôle z_0 que l'on précisera. Donner son ordre et calculer le résidu de f en z_0.

Etant donnés $\varepsilon, R>0$ tels que $0<\varepsilon<1<R$ on considère le contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$ représenté ci-dessous et parcouru une fois dans le sens direct. On notera par la suite γ_1 le demi-cercle de rayon R, γ_2 le segment d'extrêmités $-R$ et $-\varepsilon$, γ_3 le demi-cercle de rayon ε, et γ_4 le segment d'extrêmités ε et R, tous parcourus dans le même sens que sur le dessin.



e) Justifier que $\displaystyle\int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et calculer sa valeur. Vous commencerez par reproduire rapidement le contour et placerez z_0 sur la figure, et vous justifierez soigneusement l'utilisation de tout théorème.
f) Donner un paramétrage de chacun des 4 chemins γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4.
g) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. De même montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
h) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = I$.
i) Calculer de même $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ en fonction de I.
j) En déduire la valeur de I.

Exercice 13 (Examen 2021)**.** Le but de ce problème est de calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$. On rappelle que pour tout $z\in\mathbb{C}$ on note $\sin(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{2i}$ et $\sinh(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{z}-e^{-z}}{2}$. On considère la fonction g définie par $g(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)\sin(\pi z)}$.
a) i) Justifier que g définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
ii) Déterminer les pôles de g en précisant leur ordre.
iii) Calculer le résidu de g en chacun de ses pôles.
b) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On note Γ_N le chemin fermé donné par le carré, parcouru une fois dans le sens direct, dont les sommets sont les points d'affixes $a_N=\left(N+\frac{1}{2}\right)-i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $b_N=\left(N+\frac{1}{2}\right)+i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $c_N=-\left(N+\frac{1}{2}\right)+i\left(N+\frac{1}{2}\right)$ et $d_N=-\left(N+\frac{1}{2}\right)-i\left(N+\frac{1}{2}\right)$.
i) Représenter le lacet Γ_3 et placer sur le graphe les pôles de g qui sont à l'intérieur de Γ_3.
ii) Etant donné $N\in\mathbb{N}^*$ préciser quels sont les pôles de g qui sont à l'intérieur de Γ_N.
iii) Justifier que $\displaystyle\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et montrer que $\displaystyle\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z = 2i\left(1+2S_N-\frac{\pi}{\sinh(\pi)}\right)$,
où S_N désigne la somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$.
c) Soit $N\in\mathbb{N}^*$. On note γ_1 le segment $[a_N,b_N]$, γ_2 le segment $[b_N,c_N]$, γ_3 le segment $[c_N,d_N]$ et γ_4 le segment $[d_N,a_N]$.
i) Donner un paramétrage de chacun des segments γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4.
ii) Montrer que pour tout point de γ_1 on a

$$\sin(\pi\gamma_1(t)) = (-1)^N\,\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{Im}(\gamma_1(t))}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{Im}(\gamma_1(t))}}{2},$$

et que de même pour tout point de γ_3 on a

$$\sin(\pi\gamma_3(t)) = (-1)^{N+1}\,\frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{Im}(\gamma_3(t))}+\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{Im}(\gamma_3(t))}}{2}.$$

iii) Montrer que pour tout point de γ_2 on a $|\sin(\pi\gamma_2(t))|\geq\dfrac{\mathrm{e}^{\pi(N+\frac{1}{2})}-\mathrm{e}^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{2}$ et qu'il en est de même pour tout point de γ_4.
iv) En déduire que pour tout $z\in\Gamma_N$ on a $|\sin(\pi z)|\geq\dfrac{1}{2}$.
d) En utilisant la question précédente montrer que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_N} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
e) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge et donner la valeur de sa somme.