
TD 4 : Fonctions analytiques

Exercice 1. Soit f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1; 3\}$ par $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z-3)}$.

- a) Décomposer f en éléments simples.
- b) Donner le DSE de f en 0. On précisera bien sur quel disque ce DSE a lieu.
- c) Donner le DSE de f en i . On précisera bien sur quel disque ce DSE a lieu.

Exercice 2. On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2^n}$. Lorsqu'elle converge on note $f(z)$ sa somme.

- a) Déterminer son rayon de convergence. La fonction f est-elle définie en $2 - 3i$?
- b) Donner un prolongement analytique de f sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Justifier qu'il est unique.
- c) Quelle est la valeur du prolongement analytique de f au point $2 - 3i$?
- d) Donner le DSE du prolongement de f en $2 - 3i$ en précisant sur quel ensemble ce DSE a lieu.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ si $z \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est DSE en 0 et en déduire que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.

a) Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions C^1 . Montrer que si $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$. Indication : si f n'est pas nulle on pourra commencer par montrer qu'il existe $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $D(z_0, R)$.

Remarque : l'ensemble $\mathcal{A} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ de classe } C^1\}$ est un anneau pour la somme et le produit usuel des fonctions. Quelle propriété sur cet anneau vient-on de montrer ?

- b) Montrer que ce résultat n'est pas vrai si on remplace f et g sont C^1 par f et g sont continues.
- c) Montrer que, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on peut trouver $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et non nulles telles que $fg = 0$. Remarque : on peut ici remplacer C^1 par C^∞ , essayez de le faire.

Exercice 5. Soit $\Omega = D(0, 1)$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1 - \exp\left(\frac{z}{z-1}\right)$.

- a) Déterminer tous les zéros de f .
- b) Ce résultat contredit-il le principe des zéros isolés ?

Exercice 6. Soit $\Omega = D(0, 1)$.

a) Existe-t-il des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telles que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ pour tout entier $n \geq 2$? Si oui, les déterminer.

b) Même question avec f telle que $f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n}$ et $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $(a_n)_n$ une suite d'éléments de Ω qui converge vers $a \in \Omega$ et telle que $a \neq a_n$ pour tout n .

a) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique telle que $f(a_n) = 0$ pour tout n . Montrer que $f = 0$.

b) À l'aide de la fonction f de l'Exercice 5, montrer que le résultat du a) n'est plus forcément vrai si $a \notin \Omega$.

c) On suppose maintenant que $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sont analytiques, ne s'annulent pas et vérifient $\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}$ pour tout n . Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = cg$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = ze^{-z}$. Déterminer le maximum de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$ où $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(z) < 1 \text{ et } 0 < \operatorname{Im}(z) < 1\}$.

Exercice 9. Soit Ω un domaine borné et $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et C^1 sur Ω . On rappelle que $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Montrer que si f ne s'annule pas alors il existe $z_0 \in \partial\Omega$ tel que $|f(z_0)| = \min_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|$.

Exercice 10.

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 + 3z - 4$. Déterminer le maximum et le minimum de $|f|$ sur $\overline{D}(0, 2)$.

b) Même question pour la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 + z + 2$ sur $\overline{D}(0, 1)$.

Exercice 11 (CC4 - 2021). Si $r > 0$ on note $D(0, r)$, $\overline{D}(0, r)$ et $C(0, r)$ les disque ouvert, disque fermé et cercle de centre 0 et rayon r . Soit $R > 0$ et $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 .

a) Montrer que pour tout $r \in]0, R[$ le nombre $M(r) = \sup_{z \in C(0, r)} |f(z)|$ est bien défini.

b) Soient $0 < r \leq r' < R$. Montrer que $M(r) \leq M(r')$. Indication : principe du maximum.

c) En déduire que la fonction $M :]0, R[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante.

d) On suppose que M n'est pas strictement croissante.

i) Montrer qu'il existe $r_2 > 0$ tel que f est constante sur $\overline{D}(0, r_2)$. Indication : choisir $r_1 < r_2$ tels que $M(r_1) = M(r_2)$.

ii) En déduire que f est constante sur $D(0, R)$.

Exercice 12. Soit Ω un domaine tel que $\overline{D}(0, 1) \subset \Omega$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 .

a) On suppose que pour tout $z \in \Omega$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. Indication : Cauchy-Riemann.

- b) On suppose maintenant que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| = 1$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$.
- i) Montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in D(0, 1)$. Indication : on pourra appliquer le principe du maximum aux fonctions $g(z) = e^{if(z)}$ et $h(z) = e^{-if(z)}$.
 - ii) En déduire que f est constante sur $D(0, 1)$ puis qu'elle est constante sur Ω .

Exercice 13 (Examen session 2 - Juin 2022). Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on note $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros.

- a) Donner un exemple de fonction C^1 non constante tel que $Z(f)$ soit vide. Vous justifierez votre réponse.
- b) Donner un exemple de fonction C^1 non constante tel que $Z(f)$ soit infini. Vous justifierez votre réponse.
- c) Soit $A = \{z_1, \dots, z_n\}$ un ensemble fini. Donner un exemple de fonction C^1 tel que $Z(f) = A$.
- d) Montrer que si f n'est pas la fonction nulle alors pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ l'ensemble $Z(f) \cap K$ est un ensemble fini, éventuellement vide. Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 14 (Examen session 1 - Décembre 2023). Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. On note P et Q les parties réelles et imaginaires de f , i.e. $P(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ et $Q(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$. On a vu (cf TD 2) que si $Q = 0$ alors f est constante. Ici on suppose uniquement que $Q \geq 0$.

- a) Montrer que la fonction $g = \frac{f}{i + f}$, i.e. telle que $g(z) = \frac{f(z)}{i + f(z)}$ pour tout z , est bien définie sur $\mathbb{C}$ et est holomorphe.
- b) Montrer que $|g(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- c) Montrer que g est constante. En déduire que f est constante.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 . On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que $|f(z)| \leq C(1 + |z|)^m$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le but de cet exercice est de généraliser le Théorème de Liouville qui correspond au cas $m = 0$.

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$ on a $|f^{(n)}(0)| \leq Cn!(1 + r)^m r^{-n}$.
- b) En déduire que f est un polynôme de degré au plus m .
- c) Réciproquement, montrer que si f est un polynôme de degré au plus m alors il existe $C \geq 0$ tels que $|f(z)| \leq C(1 + |z|)^m$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 . On suppose que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer que f est une fonction polynôme.

- a) On veut montrer que la fonction f s'annule au moins une fois.
 - i) Montrer que si f ne s'annule pas alors la fonction $\frac{1}{f}$ est C^1 et bornée.
 - ii) En déduire que f s'annule au moins une fois.
- b) Montrer qu'il existe un compact K tel que f ne s'annule pas en dehors de K . En déduire que f admet un nombre fini de zéros $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.
- c) Pour tout j on note n_j l'ordre de α_j comme zéro de f .

i) Montrer qu'il existe $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 qui ne s'annule pas et telle

$$f(z) = g(z) \times \prod_{j=1}^m (z - \alpha_j)^{n_j}.$$

ii) On note $N = n_1 + \cdots + n_m$. Montrer qu'il existe $C, R > 0$ tel que $\left| \frac{1}{g(z)} \right| \leq C|z|^N$ pour tout $z \notin D(0, R)$.

iii) En déduire que la fonction $\frac{1}{g}$ est constante. Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

d) Conclure.