L3 Mathématiques
2022/2023
Analyse complexe

TD 4 : Intégrales le long d'un chemin et formules de Cauchy

Exercice 1. Calculer les intégrales $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ dans chacun des cas suivants. On commencera à chaque fois par représenter graphiquement le chemin γ.
a) $f(z) = \mathrm{e}^z$ et γ le demi-cercle de centre 0, de rayon 3 allant de -3 à 3 dans le sens trigonométrique. Comparer avec $\int_{-3}^{3} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
b) $f(z) = z + \bar{z}$ et $\gamma = [\mathrm{i}, 2\mathrm{i}+1]$,
c) $f(z) = z + \bar{z}$ et $\gamma = [1, -1+\mathrm{i}]$,
d) $f(z) = \mathrm{e}^z$ et $\gamma = [2, 2+5\mathrm{i}]$.
e) $f(z) = \bar{z}$ et γ est l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ reliant les points d'affixes $1+\mathrm{i}$ et $2+4\mathrm{i}$.
f) $f(x+\mathrm{i}y) = x + \mathrm{i}y^2$ et γ est le demi-cercle joignant le point $-\mathrm{i}$ au point i dans le demi plan $\mathrm{Re}(z) > 0$ suivi du segment $[\mathrm{i}, -\mathrm{i}]$.

Exercice 2. Calculer $\int_\gamma z^n\,\mathrm{d}z$ où γ est le cercle $C(0,1)$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Calculer $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ où γ est l'arc de cercle d'origine de centre 0 et rayon R parcrouru dans le sens trigonométrique, partant du point d'affixe $z = R$ et dont l'angle est 2π, π, $\frac{\pi}{2}$ et enfin $\alpha > 0$ quelconque.

Exercice 4. Calculer les intégrales $I = \int_\gamma (z-\mathrm{i})^2\,\mathrm{d}z$ et $J = \int_\gamma (\sin z)(\cos z)\,\mathrm{d}z$ où γ est le chemin défini sur $[0,1]$ par $\gamma(t) = t + \mathrm{i}t^2$.

Exercice 5 (CC4 - 2021)**.**
a) Soit γ le chemin fermé constitué du segment $[-1+i, 1-i]$ suivi du demi-cercle de centre 0 allant de $1-i$ à $-1+i$ et parcouru une fois dans le sens trigonométrique.
- **i)** Représenter graphiquement γ puis en donner un paramétrage. On pourra donner un paramétrage du segment puis un paramétrage du demi-cercle.
- **ii)** Justifier que $I_1 = \int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$ est bien définie et la calculer.
- **iii)** Justifier que $I_2 = \int_\gamma \cos\left(z^2\right)\,\mathrm{d}z$ est bien définie et la calculer.

b) Soit maintenant γ le segment $[2i, 1+i]$. Montrer que $I_3 = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ est bien définie et la calculer.

Exercice 6. Montrer que la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$ est bien définie sur $D(1,1)\setminus\{1\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z-1| < 1\}$ mais qu'elle n'a pas de primitive sur cet ensemble.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions C^1 sur un ouvert Ω et $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin.
a) Montrer la formule de l'intégration par parties

$$\int_\gamma f(z)g'(z)\,\mathrm{d}z = \big[f(z)g(z)\big]_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} - \int_\gamma f'(z)g(z)\,\mathrm{d}z.$$

b) Que devient cette formule si γ est un lacet ?
c) Calculer $\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^2}\,\mathrm{d}z$ où γ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

Exercice 8. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue et un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$. On définit $\xi : [a,b] \to \mathbb{C}$ par $\xi(t) = \overline{\gamma(t)}$.
a) Vérifier que pour tout $t \in [a,b]$ la fonction $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est bien définie en $z = \xi(t)$.
b) Montrer que $\overline{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z} = \int_\xi \overline{f(\overline{z})}\,\mathrm{d}z$.
c) On suppose que $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2i\pi t}$. Montrer que $\overline{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z^2}\,\mathrm{d}z$.

Exercice 9. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et γ le bord du triangle de sommets les points d'affixe 0, a et ib parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_\gamma \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z$ et $\int_\gamma \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}z$.

Exercice 10. Soit γ le bord d'un carré centré en l'origine, dont les côtés sont parallèles aux axes et orienté dans le sens direct. Montrer que $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z\overline{z}} = 0$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue. On considère $I = \int_{C(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z$ où $C(0,1)$ est le cercle unité orienté dans le sens direct et on suppose que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in C(0,1)$.
a) Montrer que $|I| \leq 2\pi$.
b) Calculer I si $f(z) = \overline{z}$.
c) On suppose maintenant que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et que $I \in \mathbb{R}$. Montrer que $|I| \leq 4$.
d) En supposant juste que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, montrer que $|I| \leq 4$.

Exercice 12. Pour chacun des ouverts suivants dire s'il est étoilé ou non. Faites un dessin !
a) Un disque.
b) L'intérieur d'un carré.

c) Le complémentaire d'un point.
d) Le complémentaire d'une droite.
e) Le complémentaire d'une demi-droite.
f) Le complémentaire d'un segment.
g) Le complémentaire de deux demi-droites disjointes et incluses dans la même droite.
h) Le complémentaire d'un disque fermé.

Exercice 13. A l'aide des formules de Cauchy calculer les intégrales suivantes.
a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$ où γ est le cercle $|z-i|=1$ parcouru une fois dans le sens direct.
b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1}$ où γ est le cercle $|z|=2$ parcouru une fois dans le sens direct.
c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2(z-1)}$ où γ est le cercle $|z|=2$ parcouru une fois dans le sens direct.
d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-4)(z^2+1)}$ où γ est le cercle $|z|=2$ parcouru une fois dans le sens direct.
e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{2z}(z^2+3z-2)}{(z-1)^3}$ où γ est le cercle $|z|=2$ parcouru une fois dans le sens direct.
f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi z}{2}}}{z^2+1}$ où γ est le cercle $|z|=2$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 14. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\overline{D}(0,1)$ et $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On note γ le cercle $|z|=1$ parcouru une fois dans le sens direct.
a) Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_\gamma \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z$ et $J = \displaystyle\int_\gamma \left(2-z-\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z$. On exprimera le résultat en fonction de valeurs particulières de la fonction f et/ou de ses dérivées.
b) En déduire les valeur de $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{it})\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{it})\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15. On cherche à calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\cos(t)}$.
a) Si $z=\mathrm{e}^{i\theta}$, déterminer $z+\dfrac{1}{z}$.
b) Déterminer une fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ telle que $I=\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ où γ est le cercle $|z|=1$ parcouru une fois dans le sens direct.
c) Calculer I.
d) En utilisant le même raisonnement calculer les intégrales

$$J=\int_0^{2\pi}(\cos(t))^n\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K=\int_0^{2\pi}\frac{1}{(5-3\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 16 (Examen session 2 - Juin 2022)**.** Le but de l'exercice est de montrer que les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\,\mathrm{d}t$$

convergent et de calculer leur valeur. On considère pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \mathrm{e}^{iz^2}$. Etant donné $R > 0$ on note Γ_R le lacet constitué de la concaténation des chemins :

- $\gamma_{1,R}$ le segment allant de $z = 0$ à $z = R$,
- $\gamma_{2,R}$ l'arc de cercle de centre 0 d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et partant de $z = R$,
- $\gamma_{3,R}$ le segment allant de $z = R\mathrm{e}^{i\pi/4}$ à $z = 0$,

On notera également I_R l'intégrale $I_R = \displaystyle\int_0^R \mathrm{e}^{it^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Représenter graphiquement le lacet Γ_R.

b) Montrer que pour tout $R > 0$ on a $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

c) Donner un paramétrage de chacun des 3 chemins $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$ et $\gamma_{3,R}$.

d) Exprimer $\displaystyle\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z$ à l'aide de I_R.

e) Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_{3,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{i\pi/4} \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

f) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Indication : on pourra utiliser que $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

g) Déduire des questions précédentes que I converge et donner sa valeur. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

h) Donner les valeurs de J et K.

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et r un réel tel que $0 < r < |a|$. On note γ le cercle de centre a et de rayon r parcouru une fois dans le sens direct. Le but est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z\bar{z}}$.

a) Représenter graphiquement γ. Peut-on affirmer que $I = 0$? Pourquoi ?

b) Montrer que pour tout $z \in \gamma$ on a $\bar{z} = \dfrac{r^2}{z - a} + \bar{a}$.

c) En déduire que $I = \displaystyle\int_\gamma \frac{z - a}{z\left(z\bar{a} - \left(|a|^2 - r^2\right)\right)}\,\mathrm{d}z$.

d) Calculer I à l'aide de la formule de Cauchy.