
TD 3 : Séries entières et fonctions holomorphes remarquables

Exercice 1. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On note R_a et R_b leur rayon de convergence respectif.

a) Montrer que si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.

b) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n},$

e) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n} z^{2n},$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(n)},$

f) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2 - \sin(n)} z^n,$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(np)!}{(n!)^q} z^n$ où $p, q \in \mathbb{N}^*,$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!},$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2n^2 - n},$

h) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}.$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n.$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) z^{2n}.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \begin{cases} 3^n, & n \text{ pair}, \\ 2^{-n}, & \text{sinon.} \end{cases}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} z^n, \quad \theta \in \mathbb{R}.$

Exercice 4 (CC3 - 2021). Pour chacune des trois séries entières ci-dessous : déterminer son rayon de convergence, représenter graphiquement son disque ouvert de convergence puis calculer la somme de la série dans ce disque.

a) $\sum_{n \geq 0} 2^{n+1} (z-1)^n.$

b) $\sum_{n \geq 0} 3^n (n+2)(n+1) z^n.$

c) $\sum_{n \geq 0} (-1 + (-1)^n) z^n.$

Exercice 5. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière, centrée en z_0 , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n.$

Exercice 6. Pour chacun des ensembles suivants, donner son image par la fonction exponentielle. On représentera graphiquement dans chacun des cas l'ensemble de départ et l'ensemble image.

- a) La droite d'équation $\operatorname{Re}(z) = a$ où $a \in \mathbb{R}$.
- b) La droite d'équation $\operatorname{Im}(z) = b$ où $b \in \mathbb{R}$.
- c) L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \operatorname{Re}(z) \leq a'\}$ où $a < a'$.
- d) L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid b \leq \operatorname{Im}(z) \leq b'\}$ où $b < b'$.

Exercice 7. Montrer les formules trigonométriques suivantes, valables pour tout $z, w \in \mathbb{C}$.

- a) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.
- b) $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)}$ et $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$.
- c) Montrer que $\sin^{-1}(\{0\}) := \{z \in \mathbb{C} \mid \sin(z) = 0\} = \pi\mathbb{Z}$ et que $\cos^{-1}(\{0\}) = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.
- d) Montrer que les fonctions $\sin$ et $\cos$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.
- e) $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$.
- f) $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$.

Exercice 8 (Logarithmes). On note $\ln$ le logarithme népérien défini sur $\mathbb{R}_+^*$ et Log la détermination principale du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i \arg_{]-\pi, \pi[}(z)$.

- a) Calculer $\operatorname{Log}(i)$, $\operatorname{Log}(-i)$, $\operatorname{Log}(-1 + i)$ et $\operatorname{Log}(-1 - i)$.
- b) On considère maintenant la détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ par $\log(z) = \ln(|z|) + i \arg_{]0, 2\pi[}(z)$. Calculer $\log(i)$, $\log(-i)$, $\log(-1 + i)$ et $\log(-1 - i)$.

Exercice 9 (Logarithme principal). On note Log la détermination principale du logarithme.

- a) On pose $z_0 = 1 - i\frac{\pi}{3}$ et $z_1 = 1 + i\frac{5\pi}{3}$. Comparer $\operatorname{Log}(e^{z_k})$ avec z_k .
- b) Sur quelle partie de $\mathbb{C}$ a-t-on $\operatorname{Log} \circ \exp = \operatorname{Id}$?
- c) Pour quels $z \in \mathbb{C}$ les quantités $\operatorname{Log}\left(\frac{z}{i}\right)$ et $\operatorname{Log}(z)$ sont-elles toutes les deux bien définies ? Exprimer alors $\operatorname{Log}\left(\frac{z}{i}\right)$ en fonction de $\operatorname{Log}(z)$.
- d) Pour quels $z \in \mathbb{C}$ les quantités $\operatorname{Log}(z^2)$ et $\operatorname{Log}(z)$ sont-elles toutes les deux bien définies ? Pour quels z a-t-on $\operatorname{Log}(z^2) = 2\operatorname{Log}(z)$?
- e) Reprendre l'exercice avec les déterminations suivantes du logarithme :

$$\log_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[}(z) = \ln(|z|) + i \arg_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[}(z), \quad \log_{]0, 2\pi[}(z) = \ln(|z|) + i \arg_{]0, 2\pi[}(z).$$

Exercice 10 (Racine carrée). On considère la fonction définie par $r(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)\right)$.

- a) Sur quel ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ cette formule est-elle définie ?
- b) Montrer que r est holomorphe sur Ω et que $r^2 = \operatorname{Id}$.
- c) Montrer que r est un prolongement de la fonction racine carrée $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+^*$.
- d) Déterminer $r(\Omega) = \{r(z), z \in \Omega\}$. Comment peut-on définir la fonction r en terme de racine carrée complexe ?
- e) Calculer $r(i)$ et $r(-1 + i)$. Déterminer z_1 et z_2 tels que $z_1, z_2, z_1 z_2 \in \Omega$ mais $r(z_1)r(z_2) \neq r(z_1 z_2)$.
- f) Déterminer une fonction racine carrée R définie et holomorphe sur un domaine (ouvert connexe par arcs) de $\mathbb{C}$, qui prolonge la fonction racine carrée de $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $R(-1)$ soit définie.

Exercice 11 (Puissances non entières). Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle si $a \in \mathbb{R}$ la fonction "puissance a -ème" est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_a(x) = e^{a \ln(x)}$. On a alors les propriétés

- i) si $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ on a $f_n(x) = x^n$ (on retrouve les puissances usuelles),
- ii) $f_a(x)f_b(x) = f_{a+b}(x)$ pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ et tout $x > 0$,
- iii) $f_b \circ f_a(x) = f_a \circ f_b(x) = f_{ab}(x)$ pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ et tout $x > 0$.
- iv) $f_a(x)f_a(y) = f_a(xy)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ tous $x, y > 0$.

La première propriété invite à noter $f_a(x) = x^a$. Les propriétés ii), iii) et iv) s'écrivent alors respectivement $x^a x^b = x^{a+b}$, $(x^a)^b = (x^b)^a = x^{ab}$ et $x^a y^a = (xy)^a$.

On a envie de définir de façon analogue les puissances non entières dans $\mathbb{C}$. On va pour cela remplacer le "ln" par une détermination du logarithme. Dans cet exercice on considère sa détermination principale Log. Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ on note $z^{(a)} = e^{a \text{Log}(z)}$.

- a) Montrer que si $a \in \mathbb{R}$ cette fonction coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction puissance f_a ci-dessus.
- b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto z^{(a)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
- c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z^{(n)} = z^n$ et que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ on a $z^{(a)} z^{(b)} = z^{(a+b)}$.
- d) On prend $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $a = 2 + i$ et $b = -3 + i$. Vérifier que les nombres $(z^{(a)})^{(b)}$, $(z^{(b)})^{(a)}$ et $z^{(ab)}$ sont bien définis et les comparer.
- e) On prend $z_1 = i$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $a = i$. Vérifier que les nombres $z_1^{(a)}$, $z_2^{(a)}$ et $(z_1 z_2)^{(a)}$ sont bien définis et comparer $z_1^{(a)} z_2^{(a)}$ et $(z_1 z_2)^{(a)}$.
- f) Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.
 - i) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ on a $\left(z^{(\frac{1}{p})}\right)^p = z$.
 - ii) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ le nombre $(z^p)^{(\frac{1}{p})}$ est-il bien défini ?
 - iii) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ a-t-on $(z^p)^{(\frac{1}{p})} = z$? Indication : écrire $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Exercice 12 (Arctangente). La fonction tangente est définie par $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$.

- a) Sur quel ensemble de $\mathbb{C}$ la fonction tan est-elle bien définie ?
- b) Etant donné $w \in \mathbb{C}$ résoudre l'équation $\tan(z) = w$. Pour quelle(s) valeur(s) de w l'équation n'a-t-elle pas de solution ? Indication : on pourra commencer par montrer que $\tan(z) = w$ ssi $\frac{Z-1}{Z+1} = iw$ où $Z = e^{i2z}$.
- c) Soit $h(w) = \frac{1+iw}{1-iw} = -\frac{w-i}{w+i}$. Déterminer l'ensemble $\Omega = h^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-) = \{w \in \mathbb{C} \mid h(w) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-\}$.
- d) Pour tout $w \in \Omega$ on pose $f(w) = \frac{1}{2i} \text{Log}(h(w))$ où Log désigne la détermination principale du logarithme. Montrer que f est holomorphe et déterminer sa dérivée.
- e) Quelle est la restriction de f à $\mathbb{R}$?