

## TD 2 : Fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe. On définit  $h(z) = \bar{z}$  et  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ .

- a) Montrer que  $g$  et  $h$  sont continues sur  $\mathbb{C}$ .
- b) Montrer que  $h$  n'est pas holomorphe.
- c) Montrer que  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  et calculer  $g'$ .

**Exercice 2.** Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ ,  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes et  $z_0 \in \Omega$ . On suppose que  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  et  $g'(z_0) \neq 0$ . Montrer que  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$ .

Application : déterminer  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{12} + 2z^2 + 1}{z^8 - 1}$ .

**Exercice 3** (Fonction racine carrée complexe). Si  $z \in \mathbb{C}$  on appelle racine carrée de  $z$  tout nombre complexe  $w$  tel que  $w^2 = z$ .

- a) Montrer que si  $z \neq 0$  alors  $z$  a exactement deux racines carrées. Qu'en est-il de  $z = 0$ ?
- b) Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un ouvert et  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $g(z)^2 = z$  pour tout  $z \in \Omega$ . Montrer que si  $g$  est holomorphe alors  $0 \notin \Omega$ .
- c) On suppose maintenant que  $\Omega \subset \mathbb{C}^*$  est un ouvert et que  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est continue et vérifie  $g(z)^2 = z$  pour tout  $z \in \Omega$ .
  - i) Montrer que  $g$  ne s'annule pas et donner la forme de  $g(re^{i\theta})$  lorsque  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .
  - ii) Montrer que  $g$  est holomorphe et déterminer  $g'$ .
  - iii) Si  $\mathbb{R}_+^* \subset \Omega$  que peut-on dire de  $g|_{\mathbb{R}_+^*}$ ?
  - iv) Donner un exemple de telle fonction  $g$  tel que  $g|_{\mathbb{R}_+^*} = \sqrt{\cdot}$  et  $g(-1) = i$ .
  - v) Donner un exemple de telle fonction  $g$  tel que  $g|_{\mathbb{R}_+^*} = \sqrt{\cdot}$  et  $g(-1) = -i$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)^2$ , i.e. si  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$  alors  $f(z) = x + iy^2$ . On considère également  $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\tilde{f}(x, y) = (\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy)))$ .

- a) Prouver que  $\tilde{f}$  est différentiable. Quelle est sa différentielle?
- b) Existe-t-il un ouvert non vide  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  tel que  $f$  soit holomorphe sur  $\Omega$ ?

**Exercice 5.** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$  on pose  $P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ .

- a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres  $a, b, c$  pour qu'il existe  $f$  holomorphe sur  $\mathbb{C}$  vérifiant  $P = \operatorname{Re}(f)$ .
- b) La condition précédente étant supposée remplie, déterminer toutes les applications  $f$  holomorphes sur  $\mathbb{C}$  telles que  $\operatorname{Re}(f) = P$ .

**Exercice 6** (CC2 - 2020). Déterminer toutes les fonctions holomorphes  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telles que leur partie réelle  $P(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$  vérifie  $P(x, y) = x^2 - y^2 - e^{-y} \cos(x)$ . Bonus : donner l'expression de  $f$  uniquement en fonction de  $z$  (et pas de  $x$  et  $y$ ).

**Exercice 7.** Soit  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ .

a) Montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , que l'on déterminera, telle que sa partie imaginaire  $Q(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$  vérifie  $Q(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$  et telle que  $f(1) = 0$ .

b) Calculer  $f'$ .

c) Soit  $z = re^{i\theta}$  avec  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Vérifiez que  $z \in \Omega$  et exprimer  $f(z)$  en fonction de  $r$  et  $\theta$ .

d) Soit  $z = x + iy$  avec  $y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Vérifiez que  $e^z \in \Omega$  et calculer  $f(e^z)$ . Même question si  $y \in ]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$ .

**Exercice 8** (Examen session 2 - 2021). Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe on note  $P$  et  $Q$  ses parties réelles et imaginaires, i.e.  $P(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$  et  $Q(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$ . Déterminer toutes les fonctions holomorphes  $f$  telles que  $Q(x, y) = \exp(P(x, y))$  pour tous  $x, y$ .

**Exercice 9.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domaine non vide et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. On pose  $P = \operatorname{Re}(f)$  et  $Q = \operatorname{Im}(f)$ . On suppose qu'il existe  $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^3)^*$  tel que, pour tout  $z \in \Omega$ , on a  $aP(z) + bQ(z) + c = 0$ . Que peut-on dire de  $f$ ?

**Exercice 10.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domaine non vide et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe.

a) Montrer que si  $f$  est à valeurs réelles alors  $f$  est constante.

b) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i)  $f$  est constante.

iii)  $Q = \operatorname{Im}(f)$  est constante.

v)  $|f|$  est constante.

ii)  $P = \operatorname{Re}(f)$  est constante.

iv)  $\bar{f}$  est holomorphe.

c) Soient  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes telles que  $|f(z)| = |g(z)|$  pour tout  $z \in \Omega$ . Montrer que si  $f$  ne s'annule pas alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $f(z) = e^{i\alpha}g(z)$  pour tout  $z \in \Omega$ .

d) Soient  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes telles que  $g$  ne s'annule pas et  $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$  pour tout  $z \in \Omega$ . Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(z) = cg(z)$  pour tout  $z \in \Omega$ .

**Exercice 11.** Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  on définit  $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $P(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$  et  $Q(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$  de façon à ce que  $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ . Lorsqu'elles existent on pose alors  $\frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x + iy) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$ . Enfin on définit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

a) Calculer  $\frac{\partial f}{\partial z}$  et  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  pour chacune des fonctions :  $f_1(z) = z$ ,  $f_2(z) = \bar{z}$ ,  $f_3(z) = z^2$ ,  $f_4(z) = \bar{z}^2$ .

b) Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telle que les fonctions  $P$  et  $Q$  sont différentiables. Montrer que  $f$  est holomorphe si et seulement si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ . Calculer alors  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

c) Soient  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^1$ . Déterminer  $\frac{\partial fg}{\partial \bar{z}}$ .

d) Soient  $m, n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\frac{\partial(z^m \bar{z}^n)}{\partial \bar{z}}$ . On pourra commencer par traiter les cas  $m = 0$  ou  $n = 0$ .

e) Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe. Montrer que les parties réelles et imaginaires  $P$  et  $Q$  sont des polynômes en  $x, y$  si et seulement si  $f$  est une fonction polynôme en  $z$ .