L3 Mathématiques
2022/2023
Analyse complexe

TD 2 : Séries entières et fonctions holomorphes remarquables

Exercice 1. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On note R_a et R_b leur rayon de convergence respectif.
a) Montrer que si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.
b) Montrer que si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$, **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(n)}$, **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(np)!}{(n!)^q} z^n$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$, **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2n^2 - n}$, **e)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4^n} z^{2n}$, **f)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2-\sin(n)} z^n$, **g)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, **h)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$.

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme des séries entières suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \begin{cases} 3^n, & n \text{ pair}, \\ 2^{-n}, & \text{sinon}. \end{cases}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) z^{2n}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} z^n, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (CC3 - 2021)**.** Pour chacune des trois séries entières ci-dessous : déterminer son rayon de convergence, représenter graphiquement son disque ouvert de convergence puis calculer la somme de la série dans ce disque.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 2^{n+1}(z-1)^n$. **b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 3^n (n+2)(n+1) z^n$. **c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(-1 + (-1)^n\right) z^n$.

Exercice 5. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière, centrée en z_0, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n$.

Exercice 6. Montrer les formules trigonométriques suivantes, valables pour tour tous $z, w \in \mathbb{C}$.
a) $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.
b) $\sin(z+w) = \sin(z)\ \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$.
c) $\cos(z+w) = \cos(z)\ \cos(w) - \sin(z)\ \sin(w)$.

d) $\sin(\overline{z}) = \overline{\sin(z)}$ et $\cos(\overline{z}) = \overline{\cos(z)}$.
e) Montrer que les fonctions $\sin$ et $\cos$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

Exercice 7 (Logarithmes)**.** On note $\ln$ le logarithme népérien défini sur $\mathbb{R}_+^*$ et Log la détermination principale du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg_{]-\pi,\pi[}(z)$.
a) Calculer $\mathrm{Log}(\mathrm{i})$, $\mathrm{Log}(-\mathrm{i})$, $\mathrm{Log}(-1+\mathrm{i})$ et $\mathrm{Log}(-1-\mathrm{i})$.
b) On considère maintenant la détermination du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ par $\log(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg_{]0,2\pi[}(z)$. Calculer $\log(\mathrm{i})$, $\log(-\mathrm{i})$, $\log(-1+\mathrm{i})$ et $\log(-1-\mathrm{i})$.

Exercice 8 (Logarithme principal)**.** On note Log la détermination principale du logarithme.
a) On pose $z_0 = 1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{3}$ et $z_1 = 1 + \mathrm{i}\frac{5\pi}{3}$. Comparer $\mathrm{Log}(\mathrm{e}^{z_k})$ avec z_k.
b) Sur quelle partie de $\mathbb{C}$ a-t-on $\mathrm{Log} \circ \exp = \mathrm{Id}$?
c) Pour quels $z \in \mathbb{C}$ les quantités $\mathrm{Log}\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)$ et $\mathrm{Log}(z)$ sont-elles toutes les deux bien définies ? Exprimer alors $\mathrm{Log}\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)$ en fonction de $\mathrm{Log}(z)$.
d) Pour quels $z \in \mathbb{C}$ les quantités $\mathrm{Log}(z^2)$ et $\mathrm{Log}(z)$ sont-elles toutes les deux bien définies ? Pour quels z a-t-on $\mathrm{Log}(z^2) = 2\mathrm{Log}(z)$?
e) Reprendre l'exercice avec les déterminations suivantes du logarithme :

$$\log_{]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg_{]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[}(z), \quad \log_{]0,2\pi[}(z) = \ln(|z|) + \mathrm{i}\arg_{]0,2\pi[}(z).$$

Exercice 9 (Racine carrée)**.** On considère la fonction définie par $r(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)\right)$.
a) Sur quel ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ cette formule est-elle définie ?
b) Montrer que r est holomoprhe sur Ω et que $r^2 = \mathrm{Id}$.
c) Montrer que r est un prolongement de la fonction racine carrée $\mathbb{R}_+^* \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+^*$.
d) Déterminer $r(\Omega) = \{r(z),\ z \in \Omega\}$. Comment peut-on définir la fonction r en terme de racine carrée complexe ?
e) Calculer $r(\mathrm{i})$ et $r(-1+\mathrm{i})$. Déterminer z_1 et z_2 tels que $z_1, z_2, z_1 z_2 \in \Omega$ mais $r(z_1)r(z_2) \neq r(z_1 z_2)$.
f) Déterminer une fonction racine carrée R définie et holomorphe sur un domaine (ouvert connexe par arcs) de $\mathbb{C}$, qui prolonge la fonction racine carrée de $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $R(-1)$ soit définie.

Exercice 10 (Arctangente)**.** La fonction tangente est définie par $\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{i\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)}$.
a) Sur quel ensemble de $\mathbb{C}$ la fonction $\tan$ est-elle bien définie ?
b) Etant donné $w \in \mathbb{C}$ résoudre l'équation $\tan(z) = w$. Pour quelle(s) valeur(s) de w l'équation n'a-t-elle pas de solution ? Indication : on pourra commencer par montrer que $\tan(z) = w$ ssi $\dfrac{Z-1}{Z+1} = iw$ où $Z = \mathrm{e}^{i2z}$.
c) Soit $h(w) = \dfrac{1+\mathrm{i}w}{1-\mathrm{i}w} = -\dfrac{w-\mathrm{i}}{w+\mathrm{i}}$. Déterminer l' ensemble $\Omega = h^{-1}\left(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-\right) = \{w \in \mathbb{C} \,|\, h(w) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-\}$.
d) Pour tout $w \in \Omega$ on pose $f(w) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Log}(h(w))$ où Log désigne la détermination principale du logarithme. Montrer que f est holomorphe et déterminer sa dérivée.
e) Quelle est la restriction de f à $\mathbb{R}$?