
TD 1 : Nombres complexes : manipulation, aspects géométriques et topologiques

Manipulation des nombres complexes.

Exercice 1 (Inégalité triangulaire, cas d'égalité).

a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$.

b) Montrer que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Indication : comparer les carrés des deux membres de l'inégalité.

c) Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ montrer qu'on a

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \exists \alpha > 0, z_2 = \alpha z_1 \iff \arg(z_1) = \arg(z_2).$$

Exercice 2 (Inégalité triangulaire inversée). Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Application : une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue en z_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Montrer que la fonction définie par $f(z) = |z|$ est continue en tout $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. On rappelle que si $z = x + iy$ est sous forme algébrique alors e^z désigne le nombre complexe $e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$.

a) Exprimer le module et un argument de e^z à l'aide de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$.

b) Soit $R > 1$. Montrer que pour tout complexe z de la forme $z = Re^{it}$ avec $t \in [0, \pi]$ on a $\left| \frac{e^{iz}}{1 + z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout complexe z de la forme $z = t + in$ avec $t \in [-1, 1]$ on a $|e^{-iz}| > 1$ puis que $\left| \frac{z}{1 - e^{-iz}} \right| \leq \frac{n+1}{e^n - 2}$.

Exercice 4. Montrer que les racines complexes non-réelles d'un polynôme à coefficients réels apparaissent par paires de nombres complexes conjugués, i.e. si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors z est racine de P si et seulement si $\bar{z}$ est racine de P et qu'alors z et $\bar{z}$ ont la même multiplicité.

Exercice 5. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Donner le module et un argument du nombre complexe $z = e^{i\theta} - 1$. Indication : factoriser par $e^{i\theta/2}$ (technique dite de l'angle moitié).

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Calculer pour tout entier naturel n la somme $S_n = \sum_{k=0}^n z^k$. Indication : calculer $(1 - z)S_n$.

b) Pour quelles valeurs de z la série $\sum z^k$ converge-t-elle ? Dans ce cas, que vaut $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Exercice 7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la somme $E_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$. En déduire pour

tout entier $n \in \mathbb{N}$ les sommes $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.

Exercice 8. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ et $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Montrer que $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. Interprétez géométriquement ce résultat.

Exercice 9. Soit $f(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$. Montrer que $|f(z)| = 1$ ssi $|z| = 1$ et de même montrer que $|f(z)| \leq 1$ ssi $|z| \leq 1$.

Nombres complexes et ensembles géométriques.

Exercice 10. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 2\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 2\} \quad \text{et} \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Exercice 11. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$.

a) Montrer que le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est situé sur le cercle de centre d'affixe z_0 et de rayon r si et seulement si il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que $z = z_0 + re^{it}$.

b) Même question avec la condition nécessaire et suffisante " $|z|^2 - \bar{z}_0 z - z_0 \bar{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0$."

Exercice 12. On rappelle que si $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $D(z, r)$ le disque ouvert de centre z et de rayon r .

a) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $r, r' > 0$. Montrer que si $r' + |z' - z| \leq r$ alors $D(z', r') \subset D(z, r)$. En déduire que tout disque ouvert est un ensemble ouvert.

b) i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ le nombre complexe $z_n = z' + (1 - e^{-n})r'e^{it}$ appartient au disque $D(z', r')$.

ii) En déduire que si $D(z', r') \subset D(z, r)$ alors $r' + |z - z'| \leq r$. Indication : si $z \neq z'$ on pourra considérer la suite $(|z_n - z|)_n$ avec z_n construit défini au i) et t un argument de $z' - z$.

c) Faites un dessin pour illustrer les questions ci-dessus.

d) On rappelle que $\overline{D}(z, r)$ désigne le disque fermé de centre z et de rayon r . En vous inspirant des questions précédentes, montrer que $\overline{D}(z, r) \cap D(z', r') = \emptyset$ si et seulement si $|z - z'| \geq r + r'$. En déduire que tout disque fermé est un ensemble fermé.

Exercice 13. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 \neq z_2$.

a) Montrer que le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est situé sur la droite déterminée par les points d'affixes z_1 et z_2 si et seulement si $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est situé sur le segment dont les extrémités sont les points d'affixes z_1 et z_2 si et seulement si $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in [0, 1]$, i.e. il existe $t \in [0, 1]$ tel que $z = (1-t)z_1 + tz_2$.

Exercice 14. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ et différent de 1 et -1 . Déterminer un argument de $\frac{z-1}{z+1}$ et interpréter géométriquement le résultat. Indication : angle moitié.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-4i\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z - 2i}{iz - 4}$.

a) Déterminer l'ensemble S_1 des z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ puis représenter graphiquement l'ensemble E_1 des points M d'affixe $z \in S_1$. Indication : que peut-on dire de $f(z)$?

b) Déterminer l'ensemble S_2 des z tels que $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{2}$ puis représenter graphiquement l'ensemble E_2 des points M d'affixe $z \in S_2$.

c) Déterminer l'ensemble S_3 des z tels que $|f(z)| = 2$ puis représenter graphiquement l'ensemble E_3 des points M d'affixe $z \in S_3$.

Exercice 16 (CC1 - 2020). Déterminer l'ensemble S des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-3}{z-5}$ soit imaginaire pur. Représenter graphiquement l'ensemble E des points M d'affixe $z \in S$. On rappelle que si $a, z \in \mathbb{C}$ alors $|z - a|^2 = |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2$.

Exercice 17 (CC1 - 2021). Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Déterminer l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}\}$. Représenter graphiquement cet ensemble.

$\mathbb{C}$ versus $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (de dimension 2).

a) Vérifier que l'application $J : \mathbb{C} \ni z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -ev et préciser son inverse J^{-1} .

b) Soit $w = a + ib \in \mathbb{C}$. On note $\varphi_w(z) = wz$ et $\Phi_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi_w : J \circ \varphi_w \circ J^{-1}$. Vérifier que Φ_w est une application linéaire et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

c) On considère maintenant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (de dimension 1).

i) Montrer que $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est linéaire si et seulement si il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \varphi_w$.

ii) Soit $\Phi \in L(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que l'application $\varphi = J^{-1} \circ \Phi \circ J$ soit une application $\mathbb{C}$ -linéaire.