L3 Mathématiques
2022/2023
Analyse complexe

TD 0 : Révisions et compléments sur les nombres complexes

Manipulation des nombres complexes.

Exercice 1 (Inégalité triangulaire, cas d'égalité)**.** Montrer que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ on a

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \exists \alpha > 0,\ z_2 = \alpha z_1 \iff \arg(z_1) = \arg(z_2).$$

Exercice 2 (Inégalité triangulaire inversée)**.** Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.
Application : une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continue en z_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Montrer que la fonction définie par $f(z) = |z|$ est continue en tout $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 3. Montrer que les racines complexes non-réelles d'un polynôme à coefficients réels apparaissent en paires de nombres complexes conjugués, i.e. si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors z est racine de P si et seulement si $\bar{z}$ est racine de P et qu'alors z et $\bar{z}$ ont la même multiplicité.

Exercice 4. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Donner le module et un argument du nombre complexe $z = \mathrm{e}^{i\theta} - 1$.

Exercice 5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la somme $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les sommes $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Exercice 6. Soient $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $\overline{z}w \neq 1$ et tels que soit $|z| = 1$ soit $|w| = 1$. Montrer que $\left|\dfrac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right| = 1$.

Exercice 7. Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ et $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Montrer que $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. Interprétez géométriquement ce résultat.

Exercice 8. Soit $f(z) = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$. Montrer que $|f(z)| = 1$ ssi $|z| = 1$ et de même montrer que $|f(z)| \leq 1$ ssi $|z| \leq 1$.

Nombres complexes et ensembles géométriques.

Exercice 9. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid z + \bar{z} = 2\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 2\} \quad \text{et} \quad C = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Exercice 10. Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Montrer que le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est situé sur le cercle de centre d'affixe a et de rayon r si et seulement si $|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2 - r^2 = 0$.

Exercice 11. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 \neq z_2$.
a) Montrer que le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est situé sur la droite déterminée par les points d'affixes z_1 et z_2 si et seulement si $\dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$ est situé sur le segment dont les extrêmités sont les points d'affixes z_1 et z_2 si et seulement si $\dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in [0, 1]$, i.e. il existe $t \in [0, 1]$ tel que $z = (1-t)z_1 + tz_2$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-4i\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z - 2i}{iz - 4}$.
a) Déterminer l'ensemble S_1 des z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ puis représenter graphiquement l'ensemble E_1 des points M d'affixe $z \in S_1$. Indication : que peut-on dire de $\overline{f(z)}$?
b) Déterminer l'ensemble S_2 des z tels que $\arg(f(z)) = \dfrac{\pi}{2}$ puis représenter graphiquement l'ensemble E_2 des points M d'affixe $z \in S_2$.
c) Déterminer l'ensemble S_3 des z tels que $|f(z)| = 2$ puis représenter graphiquement l'ensemble E_3 des points M d'affixe $z \in S_3$.

Exercice 13 (CC1 - 2020)**.** Déterminer l'ensemble S des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z-3}{z-5}$ soit imaginaire pur. Représenter graphiquement l'ensemble E des points M d'affixe $z \in S$. On rappelle que si $a, z \in \mathbb{C}$ alors $|z - a|^2 = |z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2$.

Exercice 14 (CC1 - 2021)**.** Soit $f : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$. Déterminer l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid \mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}\}$. Représenter graphiquement cet ensemble.

$\mathbb{C}$ versus $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension 2).
a) Vérifier que l'application $J : \mathbb{C} \ni z \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme et préciser son inverse J^{-1}.
b) Soit $w = a + ib \in \mathbb{C}$. On note $\varphi_w(z) = wz$ et $\Phi_w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\Phi_w : J \circ \varphi_w \circ J^{-1}$. Vérifier que Φ_w est une application linéaire et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
c) On considère maintenant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension 1).
 i) Montrer que $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est linéaire si et seulement si il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi = \varphi_w$.
 ii) Soit $\Phi \in L(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire est suffisante sur a, b, c, d pour que l'application $\varphi = J^{-1} \circ \Phi \circ J$ soit une application $\mathbb{C}$-linéaire.