L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: intégration

TD n°3 : Fonctions définies par une intégrale

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_1^{1+x^2} \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' sans expliciter f.
b) Calculer la dérivée de l'application $F : \mathbb{R}_+^* \ni t \mapsto t\ln(t) - t$. En déduire une primitive de la fonction logarithme puis l'expression explicite de f.
c) Retrouver l'expression de f' obtenue à la question précédente.

Exercice 2. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

est dérivable, et calculer sa dérivée.

Exercice 3. On considère, pour tout x réel, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{x(1+t)}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
a) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Monter que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

Exercice 4. **(Intégrale de Gauss)** Le but de l'exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$.
On ne cherchera pas à calculer explicitement $G(x)$.
a) Montrer que G est de classe C^1 et exprimer G' en fonction de G.
b) Montrer que F est de classe C^1 et calculer F'.
c) Montrer que $F + G$ est une fonction constante. Que vaut-elle? (On pourra calculer $(F + G)(0)$.)
d) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et en déduire l'intégrale I converge et donner sa valeur.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
a) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' à l'aide d'une intégrale.
d) A l'aide d'une intégration par parties montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$.

e) En déduire une expression simple de $F(x)$. Indication: on pourra utiliser l'exercice 4 pour déterminer $F(0)$.

Exercice 6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + x^2}$.

a) Justifier que F est bien définie pour tout $x > 0$.
b) Soit $a > 0$. Montrer que F est continue sur $[a, +\infty[$.
c) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
d) En raisonnant comme ci-dessus, montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7. **(Fonction Γ)** Pour $x > 0$ on note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que Γ est bien définie pour tout $x > 0$.
b) Montrer que, quelque soient $0 < a < b$, Γ est continue sur $[a, b]$.
c) En déduire que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
d) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
e) Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
f) Déterminer un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0. Indication: utiliser d).
g) Calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$. Indication: effectuer un changement de variable et utiliser l'exercice 4).

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on note $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier que F est bien définie pour tout $x > 0$.
b) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
c) En déduire la valeur de $F(x)$.

Exercice 9. **(Transformée de Laplace)** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On s'intéresse à la fonction Lf définie par

$$(Lf)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

a) On suppose uniquement dans cette question que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est absolument convergente. Montrer que Lf est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

On supposera par la suite que f est bornée.

b) Montrer que pour tout $x > 0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
c) Montrer que Lf est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
d) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(Lf)(x) = 0$.
e) Montrer que la transformée de Laplace Lf est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(Lf)^{(n)}(x) = (-1)^n L(t^n f)(x),$$

avec $t^n f$ l'application qui à $t \in \mathbb{R}^+$ associe $t^n f(t)$. Indication: on pourra raisonner par récurrence.