L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: intégration

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n°2 : Intégrales généralisées

Exercice 1. En utilisant la définition d'une intégrale convergente, dire si chacune des intégrales suivantes converge et si oui donner sa valeur.

a) $I_1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

b) $I_2 = \int_0^{1} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$

c) $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

d) $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

e) $I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t.$

f) $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 2. Étudier la convergence des intégrales suivantes (ici, $\alpha \geq 0$ est un paramètre):

a) $I_1 = \int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$

b) $I_2 = \int_0^{1} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t.$

c) $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\tan t}}.$

d) $I_4 = \int_0^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t^3-8}.$

e) $I_5 = \int_1^{5} \frac{\mathrm{d}t}{\ln^{\alpha}(t)}.$

f) $I_6 = \int_0^{1} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t.$

g) $I_7 = \int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$

h) $I_8 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$

i) $I_9 = \int_0^{1} \frac{\sin(\sqrt{t}) - \tan(\sqrt{t})}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

j) $I_{10} = \int_1^{2} \frac{\cos t}{1-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

k) $I_{11} = \int_{\mathrm{e}}^{4} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(\ln t)}.$

l) $I_{12} = \int_0^{1} \frac{\cosh t - \cos t}{t^2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 3. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes et/ou absolument convergentes (ici, $\alpha \geq 0$ est un paramètre):

a) $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\frac{1}{t})}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t.$

b) $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{4t^2+t+1}}.$

c) $I_3 = \int_1^{+\infty} (\sin(t) - t)\,\mathrm{d}t.$

d) $I_4 = \int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t.$

e) $I_5 = \int_1^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - \cos(\frac{1}{t})\right)\mathrm{d}t.$

f) $I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}.$

g) $I_7 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{2t^2+t}\,\sinh t}\,\mathrm{d}t.$

h) $I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(\frac{1}{t^2})}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 4. On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)dt.$

a) Montrer que I et J sont convergentes et que $I = J$.

b) Calculer $I + J$ et en déduire I et J.

Exercice 5. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}dt$ est convergente et la calculer.

Exercice 6. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur (on pourra effectuer soigneusement une intégration par parties).

Exercice 7.

a) Étudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

b) Soit $f :]0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 0$. Montrer que f est continue et que l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ converge.

c) En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\ln x}+\int_{1+\epsilon}^2\frac{dx}{\ln x} = I_0, \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\ln x}+\int_{1+2\epsilon}^2\frac{dx}{\ln x} = I_0-\ln 2 \quad \text{et} \quad \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\ln x}+\int_{1+\epsilon^2}^2\frac{dx}{\ln x} = +\infty.$$

Exercice 8. (Intégrale de Dirichlet)

a) Soient a, b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos b}{b} - \frac{1-\cos a}{a} + \int_a^b \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que l'on a $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geq \frac{2}{\pi(n+1)}$.

d) L'intégrale I est-elle absolument convergente ? (Indication : on rappelle que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.)

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)\arctan t}{t^\alpha}dt$. Étudier la nature (convergence ou divergence) de $I(\alpha)$ selon la valeur du paramètre α.

Exercice 10. Étudier la convergence et calculer, lorsqu'elles convergent, les intégrales suivantes (a est un paramètre réel supérieur à 0):

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx, \quad I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1},$$
$$I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}, \quad I_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x}.$$

Exercice 11. Étudier la convergence de $J(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\sqrt{t^2-1}}$ selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ et calculer $J(\alpha)$ lorsque α est un entier supérieur à 1. (Indication: essayer le changement de variable $x = \frac{1}{t}$).

Exercice 12. Soit $a > 0$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ayant deux limites finies l et l' en $+\infty$ et $-\infty$ respectivement. Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x+a) - f(x)\right)\mathrm{d}x,$$

est convergente et la calculer.