L2-S3 MPI
2007-2008
Mathématiques-Analyse dans $\mathbb{R}^n$

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n°1: Topologie de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. On définit, pour $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{i=1,..,n} |x_i|.$$

a) Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|x + ty\|_2^2 = t^2\|y\|_2^2 + 2t\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \|x\|_2^2$ et montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_2\|y\|_2$. En déduire que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

c) Dessiner la boule unité associée à chacune des normes ci-dessus (pour $n = 2$).

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$. En déduire que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont toutes équivalentes.

Exercice 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $N((x, y)) = \sup_{t\in[0,1]} |x + ty|$.

a) Montrer que N définit bien une norme.

b) Dessiner la boule unité pour cette norme.

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E qui converge vers l, i.e. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - l\| = 0$.

a) Montrer que la suite $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Quelle est sa limite?

b) Montrer que la réciproque est fausse en cherchant un exemple avec $E = \mathbb{C}$.

c) Soit N une autre norme sur E équivalente à $\|\cdot\|$. Montrer que la suite (x_n) converge aussi vers l pour la norme N.

Exercice 4. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, on pose $N(P) = \sup\{|P(x)|; x \in [0; \frac{1}{2}]\}$ et $\widetilde{N}(P) = \sup_{0\leq k\leq n} |a_k|$.

a) Montrer que N et $\widetilde{N}$ définissent des normes sur E.

b) Déterminer $N(X^n)$ et $\widetilde{N}(X^n)$.

c) Etudier la convergence de la suite de polynômes $(X^n)_n$ pour chacune des deux normes.

d) Les normes N et $\widetilde{N}$ sont-elles équivalentes?

Exercice 5. Parmi les ensembles suivants, préciser ceux qui sont ouverts.
a) (Ici $n = 1$) $[0, 1]$, $]0, 1]$, $]1, 3[$, $]-2, 4[\cup]5, 6[$, $]-\infty, 1]$, $]1, +\infty[$.
b) (Ici $n = 2$) $]-2, 1[\times[0, 3]$, $[0, 1] \times \{9\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = x^2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y - x^3 > 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy < 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, a \le x \le b\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 \ge 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$.

Exercice 6. Soit I un ensemble au plus dénombrable et soit (O_i) une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$.
a) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
b) Si I est fini, montrer que $\displaystyle\bigcap_{i\in I} O_i$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
c) Déterminer $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}[$. Comparer ce résultat avec le (b).

$\star$ **Exercice 7.** Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q = p/(p - 1)$. Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
a) Montrer que la fonction $\ln(x)$ est concave. En déduire que si a et b sont des réels positifs

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. En appliquant a) à

$$a_k = \frac{|x_k|}{\|x\|_p} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{|y_k|}{\|y\|_q},$$

montrer l'inégalité de Hölder

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \|x\|_p \|y\|_q.$$

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $z = ((x_1 + y_1)^{p-1}, \cdots, (x_n + y_n)^{p-1}) \in \mathbb{R}^n$. En appliquant l'inégalité de Hölder à x et z puis à y et z, montrer que

$$\|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p.$$

d) Montrer que $\|.\|_p$ est bien une norme sur $\mathbb{R}^n$.
e) Montrer que pour tout $p > 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. (On rappelle que $\|x\|_\infty = \displaystyle\sup_{1\le k\le n} |x_k|$). Quelle est la limite de $\|x\|_p$ lorsque p tends vers $+\infty$?

$\star$ **Exercice 8.** Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On définit l'intérieur de A par

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset A\}.$$

a) Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset A$.
b) Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert et que $\overset{\circ}{A} = A$ si et seulement si A est ouvert.
c) Pour les ensembles de l'exercice 5, déterminer leur intérieur et leur adhérence.