L2-S3 MPI
2007-2008
Mathématiques-Analyse dans $\mathbb{R}^n$

TD n°2: Continuité

Exercice 1. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions:

$$\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right), \quad \sqrt{1-(x-y)^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}, \quad \ln\left(\frac{y}{x^2+y^2-1}\right).$$

Exercice 2. Soient les fonctions définies sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x,y)=\frac{\sin x}{x+y}$ et $g(x,y)=x^y$. Comparer $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right]$, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0} f(x;y)\right]$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. De même avec la fonction g.

Exercice 3. Soit $f(x,y)=\frac{xy}{y-x}$.
a) Quel est le domaine de définition de cette fonction?
b) Soit f_1 la restriction de f à la droite d'équation $y=2x$. Quelle est la limite de f_1 en $(0,0)$?
c) Soit f_2 la restriction de f à la parabole d'équation $y=x+x^2$, quelle est la limite de f_2 en $(0,0)$?
d) Que peut-on en conclure quant à la limite de f en $(0,0)$?

Exercice 4 (Examen 05)**.** Étudier la continuité des applications suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \quad \text{et} \quad f(0,0)=0,$$

$$g(x,y)=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \quad \text{et} \quad g(0,0)=0.$$

Exercice 5. Étudier la continuité des applications suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \quad \text{et} \quad f(0,0)=0;$$

$$g(x,y)=\frac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \quad \text{et} \quad g(0,0)=0;$$

$$h(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x-y} \quad \text{si} \quad x\neq y, \quad \text{et} \quad h(x,x)=0.$$

Exercice 6. Soient f et g les deux fonctions définies par $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ et $g(x,y)=x^y+y^x$.
a) Quelles sont les domaines de définition de f et g?
b) Montrer que pour tout $\theta\in[0,2\pi]$ fixé, $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$.
c) Montrer un résultat similaire pour g. (Préciser pour quels θ.)
d) Montrer que pourtant f et g n'ont pas de limite en 0.

Exercice 7. Déterminer l'ensemble de continuité des fonctions suivantes:

$$f(x,y)=\tanh\left(\frac{x^2}{y^2}\right) \quad \text{si} \quad y\neq 0 \quad \text{et} \quad f(x,0)=1;$$

$$g(x,y)=e^{x^2-y} \quad \text{si} \quad x^2<y \quad \text{et} \quad g(x,y)=1 \quad \text{si} \quad x^2\geq y.$$

Exercice 8. Soient f, g définies par $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$ et $g(x,y,z)=\dfrac{(x+y)z}{x^2-y^2+z^2}$. Donner leurs domaines de définition. Étudier les limites de f en $(2,-2)$ et de g en $(2,-2,0)$.

Exercice 9 (Partiel 02)**.** Montrer la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \frac{xy}{(1+|x|)(1+|y|)(|x|+|y|)} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Exercice 10. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que
$$\forall\, x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$
En déduire que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue.

Exercice 11. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, soit f une application de E dans F. Montrer que f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque d'un fermé de F est toujours un fermé de E.

Exercice 12 (Examen 2e session 06)**.** Pour $q \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction réelle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{x^2 y^q}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$
Pour quelles valeurs de q la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 13 (Partiel 95)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^a} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$
Quelles sont les valeurs possibles de a si on impose f continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 14. Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$.

a) Écrire à l'aide de quantificateurs que f n'est pas uniformément continue sur E.

b) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de E, et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) - f(x_n) \geq \varepsilon$, est ce que f est uniformément continue sur E?

c) Montrer que si E est borné et $f(E)$ est non bornée, f n'est pas uniformément continue sur E.

Exercice 15. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues sur $]0,1]$?
$$\sin x, \qquad \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \tan x, \qquad \frac{\sin x}{x}.$$

Exercice 16 (Examen 06)**.** Soit (E, d) un espace métrique: à savoir, E est un ensemble quelconque, et $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une application qui vérifie que pour tous $x, y, z \in E$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$, et l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Etant donnée $(x_n)_n$ une suite de points de E, on dit que $(x_n)_n$ converge vers un point x de E si
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N,\ d(x_n, x) < \epsilon.$$
Par ailleurs, si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques, et si $f : X \to Y$ est une application de X dans Y, on dit que f est continue en un point a de X si
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in X,\ d_X(a,x) < \eta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$$
Montrer que f est continue en un point a de X si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de points de X, la convergence de $(x_n)_n$ vers a entraîne la convergence de $(f(x_n))_n$ vers $f(a)$.

Exercice 17. Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Soit f une application d'un sous ensemble $I \subset E$ dans F. On dit que f est K-lipschitzienne sur I ssi $\forall\, x, y \in I$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E$.

a) Montrer que si f est K-lipschtzienne sur I, alors elle est uniformément continue sur I.

b) Soient $E = F = \mathbb{R}$ et I un intervalle. Supposons que f est dérivable sur I, montrer que f est K-lipschtzienne sur I ssi $|f'(x)| \leq K$ pour tout $x \in I$.

c) Soit $g(x) = |x|^\alpha \sin(\frac{1}{x})$ avec $\alpha \in]1,2[$. Montrer que g se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Est-ce que g est lipschitzienne sur $[0,1]$? Est-ce que g est uniformément continue sur $[0,1]$?

Exercice 18. Vrai ou faux?

a) Toute suite convergente de $\mathbb{R}^n$ est une suite de Cauchy.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. Si $f_1 : x \mapsto f(x,0)$ et $f_2 : y \mapsto f(0,y)$ sont continues en 0, alors f est continue en $(0,0)$.

c) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue sur un compact, alors f est uniformément continue.

d) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. Alors, f est bornée sur B.