L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: algèbre linéaire

TD n°5 : Formes bilinéaires et formes quadratiques.

Exercice 1. Parmi les expressions ci-dessous, déterminer celles qui définissent une forme bilinéaire sur l'espace indiqué. Ecrire la matrice dans la base canonique de chacune des formes bilinéaires et indiquer lesquelles sont symétriques.

a) $B_1(x,y) = 2x_1y_1 - 4x_2y_2 + 3x_1y_2$, sur $\mathbb{R}^2$.
b) $B_2(x,y) = x_1y_1 + 8x_2y_4 + 3x_2$, sur $\mathbb{R}^4$.
c) $B_3(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 6x_2y_2 + 3x_2y_1$, sur $\mathbb{R}^2$.
d) $B_4(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, sur $\mathbb{R}^3$.
e) $B_5(x,y) = x_1x_2 - 8y_1x_2$, sur $\mathbb{R}^2$.
f) $B_6(x,y) = 0$, sur $\mathbb{R}^2$.
g) $B_7(x,y) = 3$, sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Pour chacune des matrices suivantes, écrire la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ (n étant la dimension de la matrice) dont c'est la matrice dans la base canonique.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et sa matrice M_2 dans la base $\mathcal{B}_2$. Calculer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$, et vérifier que $M_2 = {}^tPM_1P$.

a) $B_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $B_1(x,y) = x_1y_2 + 3y_1x_2$, $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
b) $B_2 : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $B_2(P,Q) = P(2)Q(1)$, $\mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), (X^2 - 3X + 2)\}$.
c) $B_3 : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $B_3(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(1-x)\mathrm{d}x$, $\mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), (X^2 - X)\}$.

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit B la forme bilinéaire de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Pourquoi B est-elle une forme bilinéaire symétrique?
b) Donner l'expression de B dans la base $\mathcal{B}$.
c) Vérifier que $\mathcal{C} = (e_1, -\frac{1}{2}e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ est une base de E et donner la matrice de B dans cette base.
d) Quel est le rang de B?

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et soient B_1 et B_2 deux formes bilinéaires sur E dont les matrices dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sont

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Donner les matrices de B_1 et B_2 dans la base $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ de E où

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, \quad v_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 + e_3.$$

b) Déterminer les rangs de B_1 et B_2.

Exercice 6. Donner la forme bilinéaire associée à chacune des formes quadratiques suivantes, sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et son rang.

a) $Q_1(x) = x_1^2$.
b) $Q_2(x) = x_1x_2$.
c) $Q_3(x) = 2x_1^2 - \frac{1}{3}x_1x_2$.
d) $Q_4(x) = x_1^2 + 9x_2^2$.
e) $Q_5(x) = 3x_1x_2 - x_2^2$.
f) $Q_6(x) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$.

Exercice 7. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner l'expression $Q(x)$ et expliciter la forme bilinéaire symétrique associée (on parle de forme polaire).

b) Vérifier que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de Q dans cette base.

c) En déduire le rang et la signature de Q.

Exercice 8. Pour chacune des formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^2$ suivantes, donner sa forme polaire et utiliser la méthode de Gauss pour déterminer sa signature et en déduire une base orthogonale.

a) $Q_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$.
b) $Q_2(x) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$.
c) $Q_3(x) = 4x_1^2 - x_2^2$.
d) $Q_4(x) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$.
e) $Q_5(x) = -x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2$.
f) $Q_6(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2$.
g) $Q_7(x) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$.
h) $Q_8(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$.
i) $Q_9(x) = 6x_1x_2 - 9x_2^2 - x_1^2$.
j) $Q_{10}(x) = 2x_1x_2$.

Exercice 9. Même exercice que le précédent pour les formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^3$ suivantes.

a) $Q_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2$.
b) $Q_2(x) = -4x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_3 - 2x_3^2 + 2x_2x_3$.
c) $Q_3(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 5x_3^2 - 2x_2x_3$.
d) $Q_4(x) = -3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 8x_3^2$.
e) $Q_5(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$.
f) $Q_6(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$.
g) $Q_7(x) = x_2^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3$.
h) $Q_8(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Exercice 10. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2.
a) Montrer que l'application $Q(A) = \mathrm{Det}(A)$ définit une forme quadratique sur E.
b) Donner la matrice de sa forme polaire dans la base canonique de E:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Donner le rang et la signature de Q.
d) Préciser l'orthogonal pour Q du sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle.
e) L'application $Q(A) = \mathrm{Det}(A)$ définit-elle une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$ si $n \neq 2$?

Définitions: Une forme quadratique Q, de forme polaire B, est dite:

- définie si pour tout $x \neq 0$ on a $Q(x) \neq 0$.
- dégénérée s'il existe $x \neq 0$ tel que $B(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$. Si E est de dimension n, Q est dégénérée si et seulement si l'application $E \ni x \mapsto [y \mapsto B(x, y)] \in E^*$ n'est pas injective et donc si et seulement si $\mathrm{rg}(B) < n$.

On remarque que si Q est dégénérée elle est nécessairement non-définie (s'il existe $x \neq 0$ tel que $B(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$ on a en particulier $Q(x) = B(x, x) = 0$).

L'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $Q(x) = 0$ s'appelle le cône isotrope de Q. L'ensemble des vecteurs $x \in E$ tels que $B(x, y) = 0$ pour tout $y \in E$ s'appelle le noyau de B (ou de Q).

Exercice 11. On considère la forme quadratique $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2ax_2x_3 + 2x_3^2$ définie sur $\mathbb{R}^3$ et où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique Q est-elle
a) non-dégénérée?
b) non-définie?

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On définit une forme bilinéaire symétrique B sur E

$$B(e_1, e_1) = B(e_2, e_2) = -B(e_3, e_3) = 1 \quad \text{et} \quad B(e_1, e_2) = B(e_1, e_3) = B(e_2, e_3) = 0.$$

a) Montrer que B n'est pas dégénérée.
b) Si $F = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)$, est-ce que B restreinte à F est non-dégénérée?

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $Q : E \to \mathbb{R}$ définie par $Q(P) = P(0)P(1)$.
a) Vérifier que Q est une forme quadratique et donner sa forme polaire B.
b) Déterminer la matrice de B dans la base $(1, X, X^2)$ de E.
c) La forme Q est-elle positive, négative?
d) Soit $P(X) = X^2 + X + 1$ et $F = \mathrm{Vect}(P)$. Déterminer $V^\perp$ et $V^{\perp\perp}$.
e) Déterminer le rang et le noyau de B.
f) Déterminer le cône isotrope de Q. Est-ce que c'est un sous-espace vectoriel de E?
g) Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de E telle que $Q(a_0P_0 + a_1P_1 + a_3P_3) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de Q.

Exercice 14. Soit $Q : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ définie par $Q(P) = P(1)P(2) + P(1)P(0)$.
a) Montrer que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_2[X]$.
b) Déterminer sa signature et son rang.

Exercice 15. Pour chaque forme bilinéaire B ci-dessous: montrer que B est symétrique, calculer $\mathrm{Ker}(B)$, donner sa signature et son rang, calculer l'orthogonal par rapport à B du sous-espace vectoriel F.
a) $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $B(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$ et $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
b) $B : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ définie par $B(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 16.
a) On considère sur $\mathbb{R}_2[X]$ la forme quadratique $Q(P) = \displaystyle\int_0^1 P(x)P'(x)\mathrm{d}x$. Déterminer la signature de Q ainsi qu'une base orthogonale pour Q.
b) Même question sur $\mathbb{R}_n[X]$ où n est un entier fixé.

Exercice 17. Répondre par VRAI ou FAUX aux questions suivantes et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple, selon le cas. Dans ce qui suivra, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et Q une forme quadratique sur E.
a) Le noyau d'une forme quadratique est un sous-espace vectoriel.
b) La somme de deux vecteurs isotropes est un vecteur isotrope.
c) Si $Q(v_1) > 0$ et $Q(v_2) > 0$ alors $Q(v_1 + v_2) > 0$.
d) La somme de deux formes quadratiques définies positives est définie positive.
e) Une forme quadratique bornée est nulle.
f) Si f et g sont deux formes linéaires, alors $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire.
g) Le produit de deux formes bilinéaires est une forme bilinéaire.
h) Si $f_1, \dots, f_n$ sont des formes linéaires et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels, alors $Q(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f_j(x))^2$ est une forme quadratique.
i) Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors $(x, y) \mapsto f(x)f(y)$ est définie positive.
j) Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le déterminant de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.
k) Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors le rang de sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est indépendant de la base choisie.
l) Si Q n'a pas de vecteur isotrope alors Q est définie positive ou définie négative.
m) Soit Q une forme quadratique sur R^2 telle qu'il existe deux droites vectorielles D_1 et D_2 en somme directe et telles que Q soit définie positive sur D_1 et sur D_2. Alors Q est définie positive.
n) Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe deux droites vectorielles D_1 et D_2 en somme directe et telles que Q soit définie positive sur D_1 et définie négative sur D_2. Alors Q est de signature $(1, 1)$.
o) La somme de deux formes quadratiques de signature $(1, 1)$ est une forme quadratique de signature $(1, 1)$.
p) Soient Q et Q' deux formes quadratiques ayant la même signature. Alors il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(Q')$.
q) Soient Q et Q' deux formes quadratiques telles qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ avec $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(Q) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(Q')$. Alors Q et Q' ont la même signature.
r) La signature de la forme quadratique $Q(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ sur $\mathbb{R}^3$ est $(3, 0)$.