L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: algèbre linéaire

TD n°3 : Matrices inversibles. Changements de bases.

Exercice 1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est inversible.

b) Déterminer A^{-1} et en déduire la solution du système $\begin{cases} y + z - t = 1, \\ x - z + t = 2, \\ x + z - t = 3, \\ + y - z - t = 4. \end{cases}$

Exercice 2. Même exercice que le précédent avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et le système $\begin{cases} x + z - t = 1, \\ y + t = 2, \\ x - z + t = 3, \\ x + y - z - t = 4. \end{cases}$

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme f de E donné par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 + (m+2)e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + (m-4)e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) = (m-2)e_1 - 2e_2 - 3e_3 \end{cases}$$

a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'application f est-elle bijective ? Dans ce cas, déterminer f^{-1}.

c) Pour quelles valeurs de m les s.e.v. Ker(f) et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans E?

d) Montrer que $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ est une base de E. Écrire la matrice de f dans cette nouvelle base.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère les vecteurs

$$\begin{array}{lll} v_1 = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, & v_2 = e_2 + 2e_3, & v_3 = e_1 \\ w_1 = e_1 + e_2 + e_3, & w_2 = e_1 + e_2 - e_3, & w_3 = 2e_1 + e_2 + 2e_3. \end{array}$$

a) Montrer que $\mathcal{B}_v = (v_1, v_2, v_3)$ et $\mathcal{B}_w = (w_1, w_2, w_3)$ sont deux bases de E.

b) Soit $f : E \to E$ l'application linéaire telle que $f(v_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Quelle est la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_v \mathcal{B}_w}(f)$ de f relativement aux bases $\mathcal{B}_v$ et $\mathcal{B}_w$.
c) Donner les matrices de passage $\mathcal{M}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_v}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_w}$.
d) En déduire la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ de f relativement à la base $\mathcal{B}$ puis l'image du vecteur $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ par f.

Exercice 5. On définit l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2,\ -\frac{1}{2}x_1 + 4x_2).$$

a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.
b) On considère les vecteurs $v_1 = (2, 1)$ et $v_2 = (2, -1)$. Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$.
c) Déterminer la matrice B de f dans cette nouvelle base.
d) Calculer B^n et en déduire A^n.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + 3x_2 + 3x_3,\ x_1 + 3x_2 - x_3,\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3).$$

a) Déterminer la matrice A, de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
b) Soient les vecteurs $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ et $v_3 = (1, 0, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
c) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.
d) Déterminer la matrice A', de f dans la base $\mathcal{B}'$ en utilisant deux methodes differentes.
e) Calculer A'^n et en déduire A^n.

Exercice 7. Soient les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ et par la relation de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - y_n, \\ y_{n+1} &= -x_n + 4y_n. \end{cases}$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n sous forme $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice à déterminer. Montrer par récurrence que pour tout n on a $X_n = A^n X_0$.
b) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui admet A pour matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$. Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$ où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.
c) Calculer A'^n et en déduire A^n, puis x_n et y_n en fonction de n.