L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: algèbre linéaire

TD n°2 : Applications linéaires.

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, lesquelles sont des applications linéaires? Préciser alors leur noyau et leur image.
a) $f(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$.
b) $g(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.
c) $h(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$.
d) $p(x_1, x_2) = (\sin x_1, x_2)$.
e) $r(x_1, x_2) = (x_2 - x_1, 0)$.

Exercice 2.
a) Soient $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Trouver une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ telle que $f(v_1) = (3, 2, 1)$ et $f(v_2) = (6, 5, 4)$.
b) Même question avec $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (3, 4)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3).$$

a) Vérifier que f est une application linéaire.
b) Déterminer le noyau de f. Quelle est sa dimension?
c) Déterminer l'image de f. Quelle est sa dimension?

Exercice 4. Même exercice que le précédent avec $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4).$$

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\varphi(P) = P - XP'$.
a) Montrer que φ est linéaire.
b) Déterminer son noyau et son image.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On note f, g les endomorphismes de E définis par

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (-x_1 + x_2 + x_3)e_1 + (x_1 + 2x_2 - x_3)e_2 + (x_1 - x_2 + x_3)e_3,$$

$$g(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (2x_1 - 2x_2 + x_3)e_1 + (2x_1 - 32x_2 + 2x_3)e_2 - (x_1 - x_3)e_3.$$

Ecrire les matrices de représentation $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(g)$ de f et de g dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dimension 3 de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$. Soit $f : E \to F$ l'applicaiton linéaire définie par

$$f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\tilde{e}_1 + (2x_1 + 2x_2 - x_3)\tilde{e}_2 + (-x_1 + 4x_2 + x_3)\tilde{e}_3.$$

Ecrire la matrice de représentation $M_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(f)$ de f et de g dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de Ker(f) puis donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9. Soit $\mathbb{R}_4[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \mathrm{d}^\circ P \leq 4\}$. On considère l'application $D : P \mapsto P'$.
a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
b) Vérifier que $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ et écrire la matrice de D dans cette base.
c) Déterminer l'image et le noyau de D.

Exercice 10. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ on définit $\varphi(P) = X^2P'' + P' + P$.
a) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
b) Écrire sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
c) Montrer que φ est bijective.

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3).$$

Est-ce que f est inversible? Si oui déterminer f^{-1}.

Exercice 12. Déterminer l'image de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, des endomorphismes suivants.
a) f échange $(1, 0)$ et $(0, 1)$.
b) g envoit $(1, 0)$ sur $(2, 3)$ et le noyau de g est engendré par $(1, -2)$.
c) h envoit $(0, 1)$ sur $(1, -1)$ et le noyau de h est engendré par $(2, -1)$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_n)$ une famille de réels deux à deux distincts. En utilisant l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)),$$

démontrer que pour toute famille $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui vérifie $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Exercice 14. Existe-t-il des applications linéaires $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ telles que Ker(f) soit engendré par le vecteur $(1, 1, 0, -1)$ et telles que Im(f) soit le plan d'équation $x + y - z = 0$? Justifiez votre réponse.

Exercice 15. Soient $f : E \to F$ une application linéaire et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E.
a) Montrer que si la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre alors la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

b) Montrer que si la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et que f est injective alors la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre.
c) Montrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice alors $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 16. Soient E un espace vectoriel et φ, ψ des endomorphismes de E tels que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Montrer que les sous-espaces Ker(φ) et Im(φ) sont stables par ψ, c'est-à-dire que $\psi(\mathrm{Ker}(\varphi)) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\psi(\mathrm{Im}(\varphi)) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 17. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
a) Montrer que si f est surjective alors $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.
b) Montrer que si g est injective alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g \circ f)$.

Exercice 18. Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que:

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$

Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} g$.

Rappel: Un endomorphisme p d'un espace vectoriel E est un projecteur si $p \circ p = p$.

Exercice 19. Soit E un espace vectoriel et p un projecteur.
a) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$.
b) En déduire que $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 20. Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\begin{cases} f(e_1) = 0, \\ f(e_2) = ae_2. \end{cases}$$

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.
b) Pour quelles valeurs de a est-ce que f est un projecteur?

Exercice 21. Déterminer la matrice qui représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ le projecteur sur le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ et de noyau la droite engendrée par le vecteur $(3, 2, 1)$.

Exercice 22. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

a) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.
b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f \circ g)$ et que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(g \circ f)$.
c) En déduire que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$.