L2 MIPI - S3
2015/2016
Mathématiques: algèbre linéaire

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n°1 : Espaces et sous-espaces vectoriels (s.e.v.), Bases.

Dans toute la feuille, la lettre $\mathbb{K}$ signifiera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On voudra dire par là que l'exercice peut se faire de façon indifférente selon qu'on considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 1. Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants, dire c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

a) $E_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$.
b) $E_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0\}$.
c) $E_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 3x_2 = x_3\}$.
d) $E_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_1^2\}$.
e) $E_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = 0\}$.
f) $E_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 \geq x_3\}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, dire si le sous-ensemble F est un s.e.v. de l'espace vectoriel E.

a) $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{d}^\circ P = 2\}$.
b) $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{d}^\circ P \leq n\}$.
c) $E = C^0(\mathbb{R})$ et $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(1) = 2\}$.
d) $E = C^1(\mathbb{R})$ et $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f' = f\}$.

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 deux s.e.v. de E.

a) Montrer que $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v. de E.

b) Montrer à l'aide d'un contre-exemple qu'en général $F_1 \cup F_2$ n'est pas un s.e.v. de E. (On pourra prendre $E = \mathbb{R}^2$.)

c) Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un s.e.v. de E si et seulement si ($F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$).

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$.

a) Est-ce que le vecteur $(2, 1, 2)$ appartient au s.e.v. engendré par les vecteurs

$$(1, 2, 1),\ (-1, 0, 3) \text{ et } (2, 2, 4).$$

b) Soient les vecteurs $v_1 = (4, 4, 2)$, $v_2 = (3, 2, 3)$ et $w = (3, 10, h)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $h \in \mathbb{R}$ le vecteur w appartient-il au s.e.v. engendré par v_1 et v_2?

Exercice 5. Soit F le s.e.v. de $\mathbb{C}^3$ engendré par $v_1 = (1, 0, \mathrm{i})$ et $v_2 = (1 + \mathrm{i}, 1, -1)$. Montrer que $(1, 1, 0)$ et $(1, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})$ appartiennent à F.

Exercice 6. Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons E_p le sous-ensemble des fonctions paires et E_i le sous-ensemble des fonctions impaires.

a) Montrer que E_p et E_i sont des s.e.v. de E.

b) Montrer que E_p et E_i sont en somme directe.

c) Montrer que $E_p \oplus E_i = E$.

Exercice 7. Déterminer si les phrases suivantes sont vraies ou fausse. Si elles sont vraies, donnez une démonstration, sinon un contre-exemple.
a) Une sous-famille d'une famille libre est libre.
b) Une sous-famille d'une famille liée est liée.
c) Une famille contenant une famille libre est libre.
d) Une famille contenant une famille liée est liée.
e) Une famille contenant 0 est liée.

Exercice 8.
a) Les vecteurs $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (-1, 3, 7)$ et $v_3 = (3, -2, -2)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Justifiez.
b) Les vecteurs $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$, et $v_3 = (1, 0, 0, -1)$ engendrent-ils $\mathbb{R}^4$? Pourquoi?

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs donnés sont linéairement indépendants et donner une base du s.e.v. engendré par ces vecteurs.
a) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 2)$, $v_3 = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
b) $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
c) $v_1 = (3, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 2)$, $v_3 = (1, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.
d) $v_1 = (3, -2, 0, 1)$, $v_2 = (-6, 4, 0, -2)$, $v_3 = (2, 1, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 3, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^4$.
e) $v_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (1, 0, 1, 1, 0)$, $v_4 = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 10.
a) Trouver une famille génératrice pour le s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

b) Même question pour le s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ défini par:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 7x_2 & - & 5x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

c) Même question pour les s.e.v. de $\mathbb{R}^5$ définis par:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 5x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & & - & 4x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & + & 6x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1, v_2, v_3\}$ une famille libre de E. Montrer que la famille $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ est libre.

Exercice 12. Soit E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, où $f_\lambda : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$, est libre dans E.

Exercice 13. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $(v, v_1, \dots, v_n)$ est libre si et seulement si $v \notin \mathrm{Vect}(v_1, \dots v_n)$

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}_2[X] := \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \mathrm{d}^\circ P \leq 2\}$.
a) Montrer que les vecteurs (polynômes) $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X + 1$ et $P_2(X) = (X + 1)^2$ forment une base de E.
b) Étant donné $P \in E$, exprimer ses coordonnées dans cette base en fonction de $P(-1)$, $P'(-1)$ et $P''(-1)$.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants: $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 1, 1, 3)$, $v_3 = (0, 1, 2, 2)$, $v_4 = (1, 0, -1, 2)$ et $v_5 = (2, 3, 0, 1)$. On définit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_4, v_5)$. Déterminer une base de chacun des espaces F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 16. Dans l'espace $\mathbb{R}_5[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \mathrm{d}^\circ P \leq 5\}$, on définit les sous-espaces :

$$E_1 = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \,|\, P(0) = 0\}$$
$$E_2 = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \,|\, P'(1) = 0\}$$
$$E_3 = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \,|\, X^2 + 1 \text{ divise } P\}$$
$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \,|P \text{ est pair}\}$$
$$E_5 = \{P \in \mathbb{R}_5[X] \,|\, P(X) = XP'(X)\}$$

Déterminer des bases des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ et $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$.

Rappel: Si E est un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont supplémentaires dans E lorsque $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$, autrement dit si $E = F \oplus G$.

Exercice 17. On considère dans $\mathbb{R}^3$, $F = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$ et $G = \mathrm{Vect}\{(0, 1, -1)\}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 18. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants: $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0, 1)$, $v_4 = (1, 0, 0, 0)$ et $v_5 = (1, 1, 1, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. On définit $F = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$, $G = \mathrm{Vect}\{e_3, e_4\}$ et $G' = \mathrm{Vect}\{e_3, e_4, e_5\}$. Montrer que $E = F \oplus G$ mais que $E \neq F \oplus G'$.

Exercice 19. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.
a) $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
b) Même question pour $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$.

Exercice 20. Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ du s.e.v. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y - z + t = 0\}$.

Exercice 21. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[-1, 1]$. On considère l'ensemble F des fonctions $f \in E$ qui vérifient

$$\exists A > 0,\ \forall x \in [-1, 1],\ |f(x)| \leq A|x|.$$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel.

b) Montrer que $f \in F$ si et seulement si $f(0) = 0$ (indication: on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis). En déduire un supplémentaire de F dans E.