L2 SV-S3
2012-2013
Mathématiques

TD n°5: Systèmes 2×2

Exercice 1. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n, \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n. \end{array}\right.$

a) Ecrire le système sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice que l'on déterminera et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b) Déterminer les valeurs propres de A et trouver des vecteurs propres correspondants.

c) Donner une matrice Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale ou triangulaire.

d) Calculer Q^{-1} puis $Q^{-1}U_0$.

e) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 2. Reprendre l'exercice précédent avec les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - 2v_n, \\ v_{n+1} & = & 2u_n + 5v_n. \end{array}\right.$

Même chose avec les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n, \\ v_{n+1} & = & 2u_n - v_n. \end{array}\right.$

Exercice 3. On considère la suite, dite de Fibonacci, définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. (Ses premiers termes sont successivement $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$)

a) On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut écrire $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice que l'on déterminera.

b) Déterminer les valeurs propres de A et trouver des vecteurs propres correspondants.

c) Donner une matrice Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale ou triangulaire.

d) Calculer Q^{-1} puis $Q^{-1}U_0$.

e) En déduire l'expression explicite du vecteur U_n en fonction de n, puis celle de u_n.

Exercice 4. On considère le système proies-prédateurs suivant (u_n désigne le nombre de proies et v_n celui de prédateurs) $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n - \dfrac{1}{2}u_n v_n, \\ v_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{10}u_n v_n. \end{array}\right.$

a) Montrer que ce système possède exactement deux points fixes que l'on déterminera.

b) Calculer les dérivées partielles des fonctions $f(x, y) = 2x - \dfrac{1}{2}xy$ et $g(x, y) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{10}xy$ puis la matrice jacobienne du système en chacun des deux points fixes.

c) Étudier la stabilité de ces points fixes.

Exercice 5. On considère le système hôte-parasitoide suivant (u_n désigne le nombre d'hôtes et v_n celui de parasitoides) $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n}{1+2v_n}, \\ v_{n+1} & = & \dfrac{2u_nv_n}{1+2v_n}. \end{array}\right.$ On prend u_0, $v_0 > 0$.

a) Justifier que pour tout n on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) Montrer que ce système possède exactement deux points fixes que l'on déterminera.

c) Calculer les dérivées partielles des fonctions $f(x,y) = \dfrac{3x}{1+2y}$ et $g(x,y) = \dfrac{2xy}{1+2y}$ puis la matrice jacobienne du système en chacun des deux points fixes.

d) Étudier la stabilité de ces points fixes.

Exercice 6. On considère le système d'équations différentielles $\left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + 3y(t), \\ y'(t) = 4x(t) - 3y(t), \\ x(0) = 4, \ y(0) = 0. \end{array}\right.$

a) Donner la matrice A associer au système.

b) Déterminer les valeurs propres de A et trouver des vecteurs propres correspondants.

c) Donner une matrice Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit diagonale ou triangulaire.

d) Calculer Q^{-1} puis $Q^{-1}X_0$ où $X_0 = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$.

e) En déduire la solution du système.

Exercice 7. Reprendre l'exercice précédent avec les systèmes

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = -x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -2x(t) - y(t), \\ x(0) = 2, \ y(0) = 2, \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + y(t), \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t), \\ x(0) = 1, \ y(0) = -1. \end{array}\right.$$

Exercice 8. On considère le système proies-prédateurs suivant où x désigne le nombre de proies et y celui de prédateurs:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{2}\right) - \dfrac{6x(t)y(t)}{1+2x(t)}, \\ y'(t) & = & -y(t) + \dfrac{3x(t)y(t)}{1+2x(t)}. \end{array}\right.$$

a) Montrer que ce système possède exactement trois solutions stationnaires que l'on calculera.

b) Calculer les dérivées partielles des fonctions $f(x,y) = x\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{6xy}{1+2x}$ et $g(x,y) = -y + \dfrac{3xy}{1+2x}$ puis la matrice jacobienne du système en chacune des trois solutions stationnaires.

c) Étudier la stabilité de ces solutions stationnaires.

Remarque : Cet exemple est un cas particulier du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & rx(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{M}\right) - \dfrac{ax(t)y(t)}{1+Dx(t)}, \\ y'(t) & = & -my(t) + \dfrac{eax(t)y(t)}{1+Dx(t)}, \end{array}\right.$$

où on a pris $r = 1$, $M = 2$, $m = 1$, $a = 6$, $e = 0,5$ et $D = 2$. Dans le cas général, a, e, m, r, K, D sont des constantes strictement positives : r désigne le taux de croissance intrinsèque des proies, M la capacité limite du milieu pour les proies, m le taux de mortalité des prédateurs, a l'efficacité des prédateurs dans leurs attaques, e le rendement de la conversion de biomasse proie en biomasse prédateurs et D exprime la satiété du prédateur (même si le nombre de proies augmente un prédateur ne pourra pas en consommer plus d'une certaine quantité).

Exercice 9. On considère le système $\begin{cases} x'(t) &= -x(t)y(t) + (N - x(t) - y(t)), \\ y'(t) &= x(t)y(t) - 10y(t), \end{cases}$ où $N > 0$ est fixé. Ce système décrit la dynamique d'une épidémie : x représente le nombre d'individus sains, y celui d'individus infectés et N est la population totale (la quantité $N - x - y$ désigne le nombre d'individus immunisés).

a) Montrer que ce système possède exactement deux solutions stationnaires. A quelle condition sur N ces solutions sont-elles positives, i.e. x et y sont positifs?

b) Calculer les dérivées partielles des fonctions $f(x, y) = -xy + (N - x - y)$ et $g(x, y) = xy - 10y$ puis la matrice jacobienne du système en chacune des solutions stationnaires.

c) Étudier la stabilité des solutions stationnaires positives? (Remarque : le résultat peut dépendre de la valeur de N).

Exercice 10. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$x''(t) = -kx'(t) - \sin(x(t)),$$

où $k > 0$ est fixé. Ce système décrit l'évolution d'un pendule (x représente l'angle entre le pendule et la verticale orientée vers le bas) avec frottement (k est appelée la constante de frottement). On définit $y(t) = x'(t)$ la vitesse angulaire du pendule.

a) Vérifier que si x est solution de l'équation ci-dessus alors les fonctions x et y sont solutions du système

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= -ky(t) - \sin(x(t)). \end{cases}$$

b) Montrer que les solutions stationnaires (ou points d'équilibre) sont les points $(n\pi, 0)$ où $n \in \mathbb{Z}$. Que représentent-ils?

c) Calculer la matrice jacobienne du système aux deux points $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$.

d) Étudier la stabilités de $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$. Pouvait-on s'y attendre?