L2 SV-S3
2012-2013
Mathématiques

TD n°1: Suites

Exercice 1. Pour chacune des suites suivantes, dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre. Lorsqu'elle est arithmétique ou géométrique, calculer la somme des 20 premiers termes.

a) $u_n = -\sqrt{5}(n-2)$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $v_n = 3 \times 2^{n-3}$, $n \geq 1$.
c) $w_{n+1} = w_n + 5$, $w_0 = 2$.
d) $x_{n+1} = 20x_n$, $x_0 = 1$.
e) $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n - 1)$, $y_0 = 2$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des nombres fixés, i.e. une suite arithmético-géométrique. On supposera $a \neq 1$. On a vu en cours qu'on pouvait exprimer directement u_n en fonction de n:

$$u_n = a^n u_0 + b \times \frac{1-a^n}{1-a}.$$

Le but de l'exercice est de retrouver cette formule d'une autre façon.
a) Déterminer deux nombres l et q (que l'on exprimera à l'aide de a et b) tels que pour tout n on ait $u_{n+1} - l = q(u_n - l)$.
b) Que peut-on dire de la suite $v_n = u_n - l$?
c) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
Application: On note u_n la quantité (en μg) d'un nutriment dans une cellule à l'instant n (le temps est mesuré en secondes). On suppose que les nutriments entrent dans la cellule à la vitesse constante de $50\mu g$ par seconde et en sortent proportionnellement à la quantité du nutriment à raison de $\frac{5}{100}$ d'entre eux par seconde.
d) Vérifier que la suite $(u_n)_n$ vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,95u_n + 50$.
e) Exprimer u_n en fonction de n et de u_0. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_n$?

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite géométrique, puis qu'elle converge.
b) Calculer de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Exercice 4. Pour chacune des suites ci-dessous, dire si elle est croissante? décroissante? minorée? majorée? bornée?

a) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

b) $v_n = (-2)^n$.

c) $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

d) $x_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$.

e) $y_n = n\mathrm{e}^{-n}$.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$ où $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.

a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ (on pourra raisonner par récurrence).

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

d) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

N.B.: la limite de la suite $(u_n)_n$ est le nombre e.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer ses points fixes ainsi que leur stabilité.

a) $f(x) = 2x - 3$.

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

c) $f(x) = 2$.

d) $f(x) = x^2$.

e) $f(x) = x$.

f) $f(x) = x - x^2$.

Exercice 7. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{2}{x+1}$. L'objectif est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = f(u_n)$ où $a \in [0, +\infty[$.

a) Etudier rapidement la fonction f et tracer son graphe.

b) Déterminer les points fixes de f et étudier leur stabilité.

c) Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite pour les valeurs de a suivantes: $1/4$, $1/2$, 2 et 5. Conjecturer le comportement de la suite $(u_n)_n$.

d) Etudier précisément la suite $(u_n)_n$ dans les cas $a = 0$ et $a = 1$.

e) On suppose ici que $a \in]0, 1[$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.

ii) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

iii) En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

f) On suppose finalement que $a > 1$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

ii) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

iii) En déduire que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 8. On s'intéresse à l'évolution d'une population soumise à un certain mode de prédation. Celle-ci est donnée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{500u_n^2}{40000 + u_n^2}$.

On notera f la fonction $f(x) = \dfrac{500x^2}{40000 + x^2}$.

a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Comment peut-on interpréter ce résultat?

b) Déterminer les points fixes de f.

c) Étudier la stabilité des points fixes.

d) Montrer que $f(x) > x$ si et seulement si $x \in]100, 400[$.
e) Etudier rapidement la fonction f et tracer son graphe.
f) A l'aide d'un graphe, déterminer le comportement limite de la suite $(u_n)_n$ selon les valeurs de u_0. (On distinguera selon la valeur de u_0 par rapport à 100 et 400.)
On souhaite maintenant démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.
g) Etudier les cas $u_0 = 100$ et $u_0 = 400$.
h) On suppose que $u_0 < 100$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante (on pourra utiliser la question c)), puis qu'elle converge. Quelle est sa limite?
i) On suppose que $u_0 \in]100, 400[$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]100, 400[$.
ii) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite?

j) On suppose enfin que $u_0 > 400$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 400$.
ii) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est décroissante, puis qu'elle converge. Quelle est sa limite?

Exercice 9. Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution d'une population dans diverses situations.
Partie I. La population a un taux de croissance $\gamma > 0$, i.e. le nombre d'individus u_n au temps n vérifie $u_{n+1} = \gamma u_n$.
a) Etudier le comportement de la suite $(u_n)_n$ selon les valeurs de γ. Interpréter en termes de l'évolution de la population.
Partie II. Lorsque $\gamma > 1$ le résultat précédent n'est pas raisonnable (la population croît indéfiniment). Les ressources naturelles limitées empêche la population d'avoir une taille supérieure à $M = 30000$ individus. Pour prendre cela en compte, on suppose maintenant que le taux de croissance de la population est $\gamma\left(1 - \frac{u_n}{M}\right)$ (lorsque u_n s'approche de sa valeur maximale M le taux de croissance diminue), i.e. la suite $(u_n)_n$ est donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \gamma\left(1 - \frac{x}{M}\right)x$. On supposera que $0 < \gamma \leq 4$. La population initiale est de $u_0 \in]0, M]$.
a) En étudiant rapidement la fonction f, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \in [0, M]$. (Le nombre d'individus est donc toujours bien un nombre positif et limité par la capacité maximale M.)
b) On suppose que $\gamma \leq 1$.

i) Déterminer les points fixes de f et étudier leur stabilité.
ii) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante (on pourra étudier le signe de $f(x) - x$) puis déterminer sa limite.

c) On suppose maintenant que $\gamma \in]1, 3[$.

i) Déterminer les points fixes de f.
ii) Etudier leur stabilité.
iii) A l'aide d'un graphe déterminer le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

d) Interpréter les résultats des questions **b)**ii) et **c)**iii) en termes d'évolution de la population.
Partie III. On reprend les notations de la partie II, et on suppose ici que $\gamma = 1,5$. Afin de réguler l'évolution de la population on effectue un prélèvement régulier proportionnel au nombre d'individus. On appelle E le taux d'efficacité de ce prélèvement ($E \in]0, 1[$ est fixé).

La nouvelle évolution de la population est donc donnée par $u_0 \in]0, M]$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ où $g(x) = \gamma\left(1 - \frac{x}{M}\right)x - Ex$. (On rappelle que $M = 30000$ et $\gamma = 1,5$.)

a) On suppose que $E \geq 0,5$.

i) Déterminer les points fixes de g.

ii) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante (on pourra étudier le signe de $g(x) - x$) puis déterminer sa limite.

b) On suppose maintenant que $E < 0,5$.

i) Déterminer les points fixes de g.

ii) Etudier leur stabilité.

iii) A l'aide d'un graphe déterminer le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

c) Interpréter les résultats des questions **a)**ii) et **b)**iii) en termes d'évolution de la population.

d) On souhaite stabiliser la population à 5000 individus. Quel taux de prélèvement E doit-on choisir?