L2 SV-S3
2012-2013
Mathématiques

TD n°2: Équations différentielles

Exercice 1. On reprend l'Exercice 2 de la feuille 1. On note $x(t)$ la quantité (en μg) d'un nutriment dans une cellule. On suppose que les nutriments entrent dans la cellule à la vitesse constante de $50\mu g$ par seconde et en sortent proportionnellement à la quantité du nutriment à raison de $\frac{5}{100}x$ par seconde. La quantité de nutriment vérifie cette fois l'équation différentielle

$$x' = 50 - 0,05x.$$

a) Déterminer les solutions stationnaires de cette équation et étudier leur stabilité.

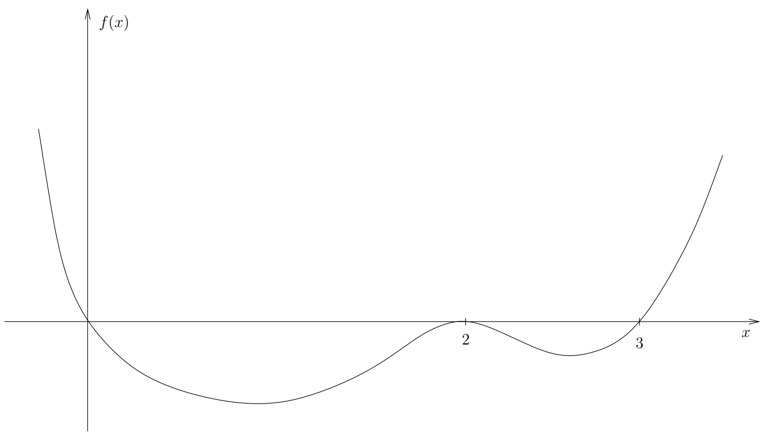
b) Représenter le comportement des solutions de cette équation à l'aide d'un graphe.

c) Résoudre explicitement cette équation.

On rappelle que la solution du problème discret correspondant, voir l'exercice 2 de la feuille 1, est $u_n = 1000 + (u_0 - 1000) \times 0,95^n$.

d) Comparer les suites $(u_n)_n$ et $(x(n))_n$, i.e. la quantité de nutriments selon qu'on a utilisé des suites définies par récurrence ou une équation différentielle pour décrire ce problème. Qu'observe-t-on?

Exercice 2. Soit f la fonction dont le graphe est tracé ci-dessous.



a) Déterminer les solutions stationnaires de l'équation $x' = f(x)$.

b) Étudier la stabilité de ces solutions.

c) Quelle est la limite quand $t \to +\infty$ de la solution de l'équation vérifiant $x(0) = 1$?

Exercice 3. On considère l'équation différentielle $x' = x^2(1 - x)$.

a) Déterminer les solutions stationnaires de cette équation et étudier leur stabilité.

b) Étudier le signe de la fonction $f(x) = x^2(1 - x)$.

c) Représenter le comportement des solutions de cette équation à l'aide d'un graphe.

d) Quelle est la limite quand $t \to +\infty$ de la solution de l'équation vérifiant $x(0) = \frac{1}{2}$?

Exercice 4. On considère une population dont le taux de croissance n est proportionnel au nombre d'individus (cas d'une reproduction sexuée), i.e. $n = ax$, et avec un taux de mortalité m. Pour cet exercice on prendra $a = 2$ et $m = 3$. L'évolution de cette population est donc donnée par l'équation

$$x'(t) = nx(t) - mx(t) = 2x^2(t) - 3x(t).$$

a) Déterminer les solutions stationnaires et étudier leur stabilité.

b) Étudier le signe de la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x$.

c) Représenter le comportement des solutions de cette équation à l'aide d'un graphe. Que peut-t-on en déduire sur le comportement de cette population?

d) Retrouver les résultats précédents en résolvant explicitement l'équation différentielle.

Exercice 5. (Modèle de croissance avec effet "Allee") On considère une population dont l'évolution est donnée par l'équation

$$x' = rx(x - M)(K - x),$$

où $r > 0$ et $0 < M < K$ sont fixés (r est le taux de croissance, M la population seuil et K la capacité limite).

a) Déterminer les solutions stationnaires et étudier leur stabilité.

b) Étudier le signe de la fonction $f(x) = rx(x - M)(K - x)$.

c) Représenter le comportement des solutions de cette équation à l'aide d'un graphe.

d) Que peut-on en déduire sur le comportement de cette population? Expliquer les appellations "population seuil" et "capacité limite".