L2 SV-S3
2009-2010
Mathématiques

TD n°4: Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition s'écrit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \alpha - e^{-x}(1+x) & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Quelle est la valeur de α?
b) Calculer $P(-2 < X < 3)$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{12} - \frac{x}{8} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ C & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{24} + \frac{x}{8} & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.
a) Calculer C pour que f soit bien une densité de probabilité.
b) Soit X une variable aléatoire dont la loi admet f pour densité. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Exercice 3. On considère la fonction f définie par: $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où $C \geq 0$.
a) Calculer C pour que f soit bien une densité de probabilité.
b) Soit X une variable aléatoire dont la loi admet f pour densité. Calculer $E(X)$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire dont la densité est constante sur l'intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) et nulle en dehors: on dit que X suit une loi *uniforme* sur $[a,b]$.
a) Déterminer la valeur de la constante.
b) Donner la fonction de répartition F_X de X.
c) Donner l'espérance et la variance de X.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 12x^3(1-x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
a) Montrer que la fonction f définit bien une densité de probabilité.
b) Soit X une variable aléatoire dont la loi admet f pour densité. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire de densité $f(t) = \alpha t \mathbb{1}_{[0,\beta]}(t)$.
a) A quelle(s) condition(s) sur α et β, f est-elle une densité de probabilité.
b) On suppose la condition ci-dessus remplie. Soit X une variable aléatoire de densité f. Représenter f ainsi que la fonction de répartition de X.
c) Déterminer α et β pour que X ait une espérance égale à 2.

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par $f(x) = Ke^{-\lambda|x|}$, où $\lambda > 0$.
a) Calculer K pour que f soit bien une densité de probabilité.
b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
c) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.
d) Soit $a > 0$. Calculer $P(X > a)$.

Exercice 8. 1) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

a) Calculer $P(0<X<1)$, $P(-1<X<1)$, $P(-2<X<1)$, $P(-0.7<X<-0.3)$ et $P(1<X<2)$.

b) Déterminer a tel que: $P(X>a)=5\%$, $P(0<X<a)=95\%$, $P(-a<X<a)=96\%$.

2) Cette fois X suit la loi $\mathcal{N}(-2,4)$. Calculer: $P(0<X<1)$, $P(0<X<0.5)$, $P(-1<X<1)$, $P(-2<X<1)$, $P(-0.7<X<-0.3)$, $P(1<X<2)$.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par:

$$f(x)=\frac{K}{x}e^{-\frac{1}{2}(\ln x+1)^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

a) Trouver K pour que f soit une densité de probabilité.

b) Trouver a tel que $P(X<a)=0,802$.

c) Calculer $E(X)$.

Exercice 10. Une machine fabrique des pièces cylindriques dont le diamètre en mm est représenté par une variable aléatoire notée X et suivant la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ où $m=8$ et $\sigma=0,4$.

a) Déterminer les probabilités des évènements suivants: $X<7.5$, $X>8.5$ et $|X-8|<0.5$.

b) Toute pièce fabriquée est vérifiée à l'aide de deux calibres, l'un de 7,5 mm, l'autre de 8,5 mm. La pièce est acceptée si elle passe dans le grand et ne passe pas dans le petit. Sinon, elle est refusée. Déterminer la probabilité pour qu'une pièce soit trop petite, puis la probabilité qu'elle soit trop grande, et enfin la probabilité qu'elle soit refusée.

c) Lorsque la pièce est trop petite, elle est rejetée définitivement. La perte est alors de 10 Euros. Si elle est trop grande, elle est rejetée, mais on peut la rectifier, le coût de l'opération étant de 3 Euros. Une pièce est vendue 15 euros.

L'entreprise projette de fabriquer 100 000 de ces pièces. Combien peut-elle espérer gagner?

Exercice 11. (Examen Décembre 2007) Un appareil électronique comporte 10 transistors. Cet appareil fonctionne si au moins 9 des 10 transistors sont en état de marche. On estime que la durée de vie (en années) d'un transistor est décrite par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,02$.

a) Calculer la probabilité p qu'un transistor marche pendant au moins 10 ans.

b) On note N le nombre de transistors de l'appareil qui sont en état de marche au bout de 10 ans. Quelle est la loi de la variable aléatoire N? Donner son espérance et sa variance.

c) Calculer la probabilité que l'appareil fonctionne pendant au moins 10 ans.

Exercice 12. (Examen Décembre 2007) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\frac{4\alpha}{3}x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases},$$

a) Pour quelle(s) valeur(s) de α, la fonction f définit-elle bien une densité de probabilité?

b) Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer $E(X)$, $Var(X)$ et $P(X\le\frac{1}{2})$.

Exercice 13. (Examen Décembre 2007) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

a) Donner $P(X<0,83)$, $P(X<-1,22)$, $P(0,27<X<1,11)$.

b) Trouver a tel que $P(X<a)=0,67$, puis b tel que $P(X<b)=0,33$.

Exercice 14. (Examen Décembre 2007) La taille en centimètres d'un homme de 25 ans est une variable aléatoire T qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ où $m=175$ et $\sigma^2=36$.

a) Que représentent m et σ^2?

b) Quelle est la probabilité qu'un homme de 25 ans mesure plus de 193cm?

c) Quelle est la probabilité qu'un homme de 25 ans mesure entre 166 et 184cm?

d) Déterminer a pour que $P(T\le a)=0,998$.

e) Déterminer b pour que $P(|T-175|<b)=0,95$.