L2 SV-S3
2009-2010
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

TD n°3: Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Dans une urne contenant initialement 3 boules blanches et 4 boules noires, on tire successivement et sans remise les boules, une à une. On décrit le nombre de tirages nécessaire pour obtenir toutes les boules noires à l'aide d'une variable aléatoire X. Donner la loi de X.

Exercice 2. On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$ lorsque X a la même probabilité p de prendre chacune des valeurs de $\{1, \ldots, n\}$.

a) Décrire $X(\Omega)$.

b) Déterminer la valeur de p pour que la loi de X soit bien une loi de probabilité.

c) Déterminer l'espérance et la variance de X.

Indication: on admet (ou rappelle) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, ..., 5\}$ et de loi $p(X = i) = Ki$, $i \in \{1, \ldots, 5\}$, et où $K \in \mathbb{R}$ est fixé.

a) Déterminer K pour que la loi de X soit bien une loi de probabilité.

b) Déterminer les lois de $U = \max\{X, 5 - X\}$ et de $V = \min\{X, 5 - X\}$.

Exercice 4. 170 personnes viennent à l'hôpital pour une consultation. On estime que chacune d'entre elles a 3% de "chance" d'être atteinte d'une maladie M. Un médecin les recoit. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de patients venant le consulter et atteint de cette maladie.

a) Donner la loi de X.

b) A combien de patients ayant la maladie M peut-t-il s'attendre?

Exercice 5. Dans une pépinière, 95% des scions (greffons) sont supposés sans virus. Les scions sont rangés par paquets de 2. Un paquet est déclaré sain si les 2 scions sont sans virus.

a) Déterminer la probabilité pour qu'un paquet soit sain.

b) Les scions sont vendus par lots de 10 paquets. On note X le nombre de paquets sains dans un lot. Déterminer la loi de X.

c) Un lot de 10 paquets (20 scions) est accepté par le client si au moins 9 des 10 paquets sont déclarés sains. Quelle est la probabilité pour qu'un lot soit accepté?

d) Le pépiniériste décide plutôt de regrouper les scions par paquets de 4, et de vendre des lots de 5 paquets (donc toujours 20 scions). Un paquet est déclaré sain si tous les scions du paquet sont sans virus, et un lot est accepté si au moins 4 des 5 paquets sont sains. Le choix du pépiniériste est-il justifié?

Exercice 6. Lors d'un jeu, on nous présente 220 boîtes: 40 sont pleines et les autres vides.

a) On choisit une boîte au hasard, et on en gagne le contenu. La boîte est alors remplie à nouveau, et on peut rejouer. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boîtes pleines obtenues en n tentatives. Donner la loi de X.

b) Cette fois la boite n'est pas remise en jeu. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de boîtes pleines obtenues en n tentatives ($n \leq 100$). Donner la loi de Y.

Pour pouvoir jouer à ce jeu, on doit payer 2 euros par tentative. Si on tombe sur une boîte pleine, on gagne 10 euros, et sinon rien.

c) On note G le *gain* (=ce qu'on a gagné moins ce qu'on a payé pour jouer) obtenu au bout de 50 parties. Déterminer la loi de G selon que l'on joue avec la première ou la deuxième règle.

d) On vous demande de choisir la règle du jeu que vous préferez. Laquelle choisirez vous?

Exercice 7. Carole prend un téléski, et emprunte l'une des N perches de l'appareil. Entre cet instant et la prochaine remontée de Carole, on considère que le nombre de skieurs qui se présentent suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité que Carole reprenne la même perche?

Exercice 8. Dans un ouvrage de 1000 pages, on a dénombré 50 coquilles. On estime que le nombre de coquilles par page de cet ouvrage est décrit par une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

a) Donner le nombre moyen de coquilles par page. Quelle valeur de λ faut-il alors choisir?

b) On choisit une page au hasard dans l'ouvrage. Quelle est la probabilité que cette page ne contienne aucune erreur? exactement une erreur? strictement plus d'une erreur?

Exercice 9. n individus ($n > 2$) jettent chacun une pièce honnête. Une personne gagne si elle obtient le contraire de toutes les autres.

a) Quelle est la probabilité qu'une partie comporte un gagnant?

b) Soit X la variable aléatoire correspondant au nombres de parties nécessaires à l'obtention d'un gagnant. Donner la loi de X, son espérance, sa variance.

Exercice 10. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules au hasard sans remise. On note X la variable aléatoire égale au plus petits des numéros tirés.

a) Donner la loi de X ainsi que son espérance.

b) Même question si on suppose le tirage avec remise.

Exercice 11. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

a) Donner la loi de $X + Y$.

b) Donner $E\left[\dfrac{1}{1+X}\right]$.

Exercice 12. Lors d'un accident de la route, on distingue 2 types de chocs: latéral ou frontal. On représente le type de choc par une variable aléatoire C prenant les valeurs 0 (latéral) ou 1 (frontal). On décrit la gravité G de l'accident sur une échelle de 1 à 3. Une étude montre que la loi du couple (C, G) est donnée par le tableau suivant:

	1	2	3
0	0,10	0,08	0,02
1	0,15	0,25	0,40

a) Calculer les lois marginales de C et G, ainsi que leur espérance et leur variance.
b) Les variables C et G sont-elles indépendantes? Calculer la covariance de (C, G) ainsi que leur coefficient de corrélation.
c) Calculer la probabilité que la gravité de l'accident soit maximale sachant que le choc est latéral.
d) On définit l'incidence à long terme de l'accident par $I = 0,2C + 0,3G$. Déterminer $E(I)$ et $Var(I)$.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Les valeurs de X sont affichées par un compteur de la manière suivante:

- si X prend une valeur non nulle, le compteur affiche correctement cette valeur.
- si X prend la valeur 0, le compteur affiche aléatoirement et de façon équiprobable une valeur entre 1 et n.

On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre affiché par le compteur. Quelle est la loi de Y? Son espérance?

Exercice 14. On note X le nombre de clients arrivés sur un canal de communication par unité de temps. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque client connecté fait une tentative de transmission avec la probabilité p et quitte le canal sans tentative avec la probabilité $1-p$. On note Y le nombre de clients qui effectuent une tentative de transmission par unité de temps. Déterminer la loi de Y. (On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.)

Exercice 15. (Examen Décembre 2007) La loi de probabilité jointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires est donnée par le tableau suivant

$Y \backslash X$	-1	0	1	2
-1	0,02	0,06	0,1	0,02
0	0,03	0,01	0,05	0,01
1	0,05	0,23	0,25	0,17

a) Déterminer les lois marginales de X et Y.
b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
c) Calculer $E(X)$, $Var(X)$, $E(Y)$ et $Var(Y)$.
d) Calculer la covariance de X et Y.
e) Calculer $E(X + Y)$ et $Var(X + Y)$.

Exercice 16. (Examen de rattrapage Juin 2008) Dans le département de l'Hérault, l'espérance du nombre de nouveaux cas de cancer de la thyroïde est de 1,05 cas par 2 mois. On suppose que la variable X correspondant au nombre de nouveaux cas observés sur <u>une année</u> suit une loi de Poisson.
a) Préciser la valeur du paramètre λ de cette loi de Poisson.
b) Calculer

(1) la probabilité qu'il y ait 2 nouveaux cas une année,
(2) la probabilité d'observer au plus 1 nouveau cas une année,
(3) la probabilité d'observer au moins 3 nouveaux cas une année.