Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
L1 MIPI - S2

Cours de Mathématiques : Polynômes et Suites

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1.1.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1.1 (Forme algébrique des nombres complexes)**.** *Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et i est un nombre tel que $i^2 = -1$. x est la* partie réelle *de z, notée $Re(z)$, et y est la* partie imaginaire *de z, notée $Im(z)$.*

Remarque 1.1. *$Re(z)$ et $Im(z)$ sont des nombres réels. Si $Im(z) = 0$ on dit que z est réel et si $Re(z) = 0$ on dit que z est imaginaire pur.*

Remarque 1.2. *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont* même *partie réelle et* même *partie imaginaire.*

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. On définit alors la somme et le produit de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ par

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \qquad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y). \tag{1.1}$$

On vérifie alors facilement que la somme et le produit dans $\mathbb{C}$ vérifient les même propriétés que dans $\mathbb{R}$: commutativité, associativité, distributivité.

Remarque 1.3. *Une construction effective de $\mathbb{C}$ est donnée dans la Section 1.4.*

Définition 1.2. *Le nombre $\overline{z} = x - iy$ s'appelle le* conjugué *de $z = x + iy$.*

On vérifie facilement que
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$,
- $-\overline{z} = \overline{-z}$,
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\mathrm{R}e(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
- $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Définition 1.3. *Le* module *de z est le réel positif noté $|z|$ et défini par*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Remarque 1.4. *Si x est un réel, le module de x est la valeur absolue de x.*

☠ **Attention !** On ne peut pas comparer deux nombres complexes avec $<, >, \leq, \geq$ (en particulier un nombre complexe n'est ni positif ni négatif). Mais on peut comparer le module de deux nombres complexes.

Exercice 1.1. Vérifier que pour tous complexes z, z' on a
a) $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\mathrm{R}e(z\overline{z})$.

b) $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
c) $|zz'| = |z| \times |z'|$.

Lemme 1.1 (Inégalité triangulaire)**.** *Soient z, z' deux nombres complexes. On a*

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$,
2. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Démonstration. 1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a alors

$$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2.$$

En utilisant le b) de l'Exercice 1.1 on en déduit que

$$|z + z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2.$$

On conclut en utilisant le fait que $|z + z'|$ et $|z| + |z'|$ sont positifs et que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. On écrit $|z| = |(z - z') + z'| \leq |z - z'| + |z'|$ d'où $|z| - |z'| \leq |z - z'|$. De même on a $|z'| - |z| \leq |z' - z|$. En combinant les deux on obtient le résultat. □

Exercice 1.2. Donner une interprétation géométrique de $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\overline{z}$, $z \mapsto z + a$ où $a \in \mathbb{C}$ est donné.

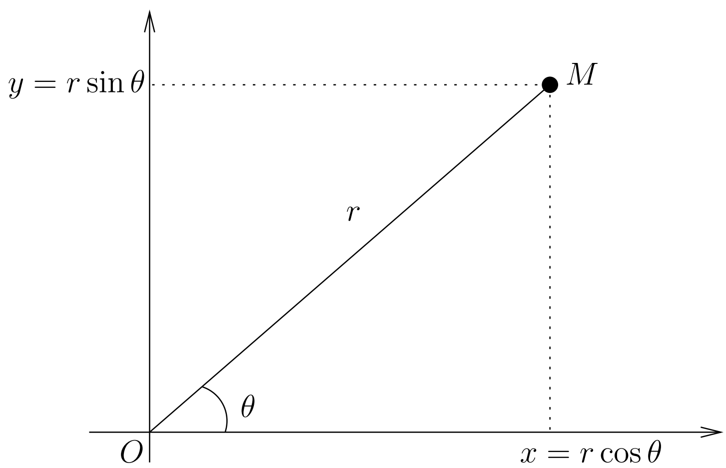
1.1.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 1.1 (Forme trigonométrique d'un nombre complexe)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Il existe $r > 0$ (en particulier r est réel) et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que*

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)). \tag{1.2}$$

Le nombre θ s'appelle un argument du nombre complexe z et on le note $arg(z)$.

Idée de démonstration. Au nombre complexe z on associe le point M du plan de coordonnées (x, y). Or tout point du plan est aussi uniquement défini par sa distance à l'origine (qui est le nombre r) et l'angle entre le demi-axe $[0x)$ et le vecteur $0\vec{M}$. □



Remarque 1.5. *On a $r = |z|$.*

Exercice 1.3. Mettre $z = 2 + 2i$ sous forme trigonométrique.

Proposition 1.2. *Deux complexes $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.*

Remarque 1.6. *La proposition précédente montre que l'argument d'un nombre complexe n'est pas unique.*

Proposition 1.3. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. z admet un unique argument dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$. Celui-ci est appelé argument principal de z et est noté $\mathrm{Arg}(z)$.*

Proposition 1.4. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et θ, θ' des arguments de z et z' respectivement. Alors $\theta+\theta'$ est un argument de zz'.*

Exercice 1.4. Démontrer la proposition précédente.

Proposition 1.5 (Formule de De Moivre)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, elle se fait par récurrence en utilisant la Proposition 1.4. Pour n négatif, on note que $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ et on applique ce qui précède à $-\theta$ et $-n \in \mathbb{N}$. □

1.2 Exponentielle complexe

1.2.1 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 1.4. *Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, on définit l'exponentielle de z, notée $\exp z$ ou e^z par*

$$\exp z = \mathrm{e}^x(\cos(y) + i\sin(y)),$$

où e^x est l'exponentielle usuelle du nombre réel x.

L'une des raisons de cette définition est qu'elle préserve les "propriétés algébriques" de l'exponentielle usuelle.

Proposition 1.6. *Soient z, z' deux nombres complexes. Alors*

1. $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$.
2. *pour tout $n \in \mathbb{Z}$,* $(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$.
3. $\mathrm{e}^z \neq 0$ *et* $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Exercice 1.5. Démontrer la proposition précédente.

Exercice 1.6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

a) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{R}e(z)}$.
b) $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.

Remarque 1.7. *On a défini l'exponentielle complexe à l'aide de* cos *et* sin*, qui peuvent être définies de façon géométrique. De même les identités pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ peuvent être montrées de façon géométrique, et on peut retrouver toutes les formules à partir de celles-ci.*

Il existe une définition de l'exponentielle complexe sous la forme de "série entière" :

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

qui sera étudiée dans un cours d'analyse plus avancé (voir aussi l'Exercice 33 du chapitre sur les suites dans le polycopié d'exercices). Le cosinus et le sinus sont alors définis à partir de cette dernière comme la partie réelle et la partie imaginaire de l'exponentielle complexe du nombre $i\theta$.

1.2.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Dans le cas où $z = i\theta$ est imaginaire pur, la Définition 1.4 donne

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Ceci permet de réécrire un nombre complexe mis sous forme trigonométrique comme

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta}.}$$

On l'appelle la forme exponentielle du nombre complexe z.

Remarque 1.8. *Deux complexes* $re^{i\theta}$ *et* $r'e^{i\theta'}$ *sont égaux si et seulement si* $r = r'$ *et* $\theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Cas particuliers importants :

$$\boxed{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ \mathrm{e}^{i\pi} = -1,\ \mathrm{e}^{2i\pi} = 1}.$$

☠ **Attention !** Ne pas confondre e^x lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$!

Exercice 1.7. Montrer que $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Proposition 1.7. *[Formules d'Euler] Soit* $\theta \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

1.2.3 Linéarisation et opération inverse

On donne ici deux applications des formule d'Euler de De Moivre.
Linéarisation : il s'agit d'écrire $\cos^n(\theta)$ ou $\sin^p(\theta)$ comme une somme de termes de la forme $\sin(k\theta)$ ou $\cos(k\theta)$, avec k entier. On utilise pour cela la formule d'Euler et la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Il s'agit ensuite de regrouper deux à deux les termes dont les puissances sont opposées l'une de l'autre. Cette procédure sera très utile dans le cours d'intégration.

Exemple 1.1. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\Big((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3\Big) \\
&= \frac{1}{8}\Big(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\Big) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Opération inverse : on veut cette fois exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(p\theta)$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. On utilise cette fois la formule de De Moivre.

Exemple 1.2. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= Re\big(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\big) \\
&= Re\big((\cos\theta + i\sin\theta)^3\big) \\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta).
\end{aligned}$$

1.3 Équations à coefficients complexes

1.3.1 Equation du second degré

L'une des raisons pour lesquelles on a souhaité introduire les nombres complexes est que certaines équations du second degré n'avaient pas de solutions réelles, par exemple l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Elle en a cependant deux dans $\mathbb{C}$: i et $-i$. Qu'en est-il d'une équation du second degré générale dont les coefficients sont eux aussi des nombres complexes :

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0?$$

La méthode est essentiellement la même que dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1.2. *Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. L'équation $z^2 = Z$ possède exactement deux solutions qui sont appelées racines carrées du nombre Z. Si z_0 est l'une d'entre elles alors l'autre est $-z_0$.*

☠ **Attention !** Lorsque x est un réel positif le nombre $\sqrt{x}$ désigne l'unique racine carrée positive de x. Pour un nombre complexe Z, qui n'est pas réel positif, ses deux racines carrées seront des nombres complexes et n'auront donc pas de signe. La notation $\sqrt{Z}$ serait donc ambiguë et on ne l'utilisera jamais ! !

Démonstration. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. On écrit Z sous forme exponentielle, $Z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$, et on cherche une solution de l'équation $z^2 = Z$ sous la forme $z = re^{i\alpha}$. Si z est solution alors

$$Re^{i\theta} = r^2 e^{2i\alpha},$$

avec $r^2 > 0$. On en déduit donc, cf Remarque 1.8, que $R = r^2$ et $2\alpha = \theta + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $r = \sqrt{R}$ et $\alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, et donc

$$z = \sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{ik\pi} = (-1)^k\sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}} = \pm\sqrt{R}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Réciproquement, on vérifie que ces deux nombres sont bien solutions de l'équation $z^2 = Z$. □

Proposition 1.8. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède exactement deux solutions lorsque $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ et une seule solution lorsque $\Delta = 0$. Si δ est une racine carrée de Δ alors les solutions sont*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

Tout comme pour les équations à coefficients réels, Δ est appelé le *discriminant* de l'équation $az^2+bz+c = 0$.

Démonstration. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à l'équation

$$a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

En notant δ une racine carrée de Δ on en déduit que z est solution si et seulement si $z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\delta}{2a}$ et donc si et seulement si $z = z_1$ ou $z = z_2$. □

Exemple 1.3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 8z + 4 - i = 0$.*
On calcule $\Delta = (-8)^2 - 4\times4\times(4-i) = 16i = 16e^{i\frac{\pi}{2}}$. Une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{16}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}(1+i)$. Les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{8-2\sqrt{2}(1+i)}{2\times4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

et

$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{8+2\sqrt{2}(1+i)}{2\times4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

1.3.2 Calcul des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique

Dans la pratique, la méthode utilisée dans la section précédente pour la recherche d'une racine carrée nécessite de savoir mettre un nombre complexe donné (le discriminant) sous forme exponentielle.

Exemple 1.4. *On souhaite résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 - i = 0$. On calcule*

$$\Delta = (-3)^2 - 4\times1\times(3-i) = -3 + 4i.$$

Si on veut mettre Δ sous forme exponentielle, on calcule $|\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ et il faut ensuite trouver θ tel que $\cos(\theta) = -\frac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = \frac{4}{5}$...

On va chercher à calculer une racine carrée d'un nombre complexe directement sous forme algébrique. Soit $Z = a + ib \in \mathbb{C}$ on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$. En développant $(x + iy)^2$ et en identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient les deux équations suivantes :

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{et} \quad 2xy = b.$$

Ces deux équations suffisent pour trouver x et y mais il est plus commode d'ajouter une troisième équation en remarquant que si $Z = z^2$ alors $|Z| = |z|^2$, ce qui se réécrit

$$\sqrt{a^2 + b^2} = x^2 + y^2.$$

On va résoudre ces équations pour l'exemple ci-dessus.

Exemple 1.5. *On cherche une racine carrée de $\Delta = -3 + 4i$. Les équations ci-dessus deviennent ainsi*

$$x^2 - y^2 = -3, \quad 2xy = 4 \quad \textit{et} \quad x^2 + y^2 = 5.$$

En utilisant la première et la dernière équation on trouve facilement

$$x^2 = 1 \quad \textit{et} \quad y^2 = 4,$$

d'où $x = \pm 1$ et $y = \pm 2$. Enfin, en utilisant la deuxième équation on en déduit que x et y doivent avoir le même signe ($xy = 2 > 0$!). On trouve ainsi les deux racines carrées de Δ : $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

On prend ensuite, par exemple, $\delta = 1 + 2i$ (que se passerait-il si on choisissait $\delta = -1 - 2i$?) et on trouve que les deux racines de l'équation $z^2 - 3z + 3 - i = 0$ sont

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = 1 - i \quad \textit{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = 2 + i.$$

1.3.3 Racines n-ième d'un nombre complexe

Nous reviendrons dans le chapitre suivant, voir le Théorème 2.9, sur les équations de degré n de la forme

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$. Nous verrons en particulier qu'une telle équation admet toujours une solution complexe. Notez que ce n'est pas vrai dans $\mathbb{R}$: l'équation $z^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution réelle.

Parmi les équations de degré n, il est facile de trouver les solutions de celles de la forme $z^n = Z$ où Z est un nombre complexe fixé.

Définition 1.5. *Soit $Z \in \mathbb{C}$. Les nombres complexes z tels que $z^n = Z$ sont appelés* racines n-ièmes *de Z.*

Pour les calculer, la méthode est similaire à celle utilisée dans la Section 1.3.1 pour le calcul des racines carrées. Elle consiste à écrire Z sous forme exponentielle, $Z = R\mathrm{e}^{i\theta}$, et on cherche alors z également sous forme trigonométrique : $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}$. Le nombre z vérifie $z^n = Z$ si et seulement si

$$(r\mathrm{e}^{i\alpha})^n = R\mathrm{e}^{i\theta},$$

ce qui est équivalent à

$$r^n = R, \ r \geq 0, \ \text{ et } \ n\alpha = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, on a

$$r = R^{\frac{1}{n}} \text{ et } \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \text{ où } k = 0, \ldots, n-1$$

(pour $k = n$ on retrouve le même résultat que pour $k = 0$, pour $k = n + 1$ le même que pour $k = 1, \ldots$).

Définition 1.6. *Les* racines n-ièmes de l'unité *sont les nombres complexes tels que $z^n = 1$.*

En appliquant ce qui précède à $Z = 1$, on en déduit que les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres complexes

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Géométriquement, ce sont les sommets du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre l'origine et de rayon 1 (cercle trigonométrique) et ayant le point d'affixe 1 pour sommet. Par exemple, les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = \overline{j}$.

Exercice 1.8. Résoudre $z^3 = 4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$.

Exercice 1.9. Montrer que la somme des n racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

1.4 Appendice : construction de $\mathbb{C}$

Les nombres complexes sont, par définition, les éléments $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels on définit

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'), \qquad (x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx'). \tag{1.3}$$

On note aussi

$$-(x,y)=(-x,-y).$$

L'ensemble des nombres complexes (c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$ muni de ces opérations) est noté $\mathbb{C}$. On va considérer les éléments de $\mathbb{C}$ comme des “nombres” z plutôt que comme des couples (x,y). On notera :

$$0=(0,0) \quad \text{et} \quad 1=(1,0).$$

Tout comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a une structure de corps commutatif, c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 1.9. *Si z, z', z'' sont trois nombres complexes, alors*

i) $z+0=0+z=z$,
ii) $z+z'=z'+z$,
iii) $z+(z'+z'')=(z+z')+z''$,
iv) $z+(-z)=(-z)+z=0$,
v) $z\times 1=1\times z=z$,
vi) $z\times z'=z'\times z$,
vii) $(z\times z')\times z''=z\times(z'\times z'')$,
viii) $z\times(z'+z'')=z\times z'+z\times z''$,
ix) Si $z\neq 0$ alors il existe un unique nombre complexe, noté $\frac{1}{z}$, tel que $z\times\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z}\times z=1$.

Exercice 1.10. Démontrer cette Proposition.

Exercice 1.11. Si $z=(x,y)$, montrer que $\dfrac{1}{z}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

On note i le nombre complexe

$$i=(0,1),$$

et on a donc

$$i\times i=(0,1)\times(0,1)=(0\times 0-1\times 1, 0\times 1+1\times 0)=(-1,0),$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{i^2=-1}.$$

La multiplication et l'addition de $(x,0)$ et $(x',0)$ coincident avec celles pour x et x', c'est-à-dire que

$$(x,0)+(x',0)=(x+x',0) \text{ et } (x,0)\times(x',0)=(xx',0).$$

On peut donc identifier $\mathbb{R}$ avec l'ensemble des nombres complexes de la forme $(x,0)$, et on a $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Les nombres complexes de la forme $(0,y)$ sont appelés les *imaginaires purs*. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Proposition 1.10 (Forme algébrique des nombres complexes)**.** *Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme*

$$z=x+iy,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ y\in\mathbb{R}.$$

Démonstration. On a $z=(x,y)=(x,0)+(0,1)\times(y,0)$, d'où le résultat d'après les conventions de notation ci-dessus. □

Exercice 1.12. Montrer que la somme et le produit de $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ donnés par (1.1) coincident bien avec ceux donnés par (1.3).

Chapitre 2

Polynômes à coefficients réels ou complexes

L'objet de ce chapitre est d'étudier les polynômes mais plutôt du point de vue arithmétique (divisibilité, division euclidienne, polynômes irréductibles,...). Nous verrons qu'il y a beaucoup de similitudes avec ce que l'on fait dans $\mathbb{Z}$. Dans tout le chapitre la lettre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Définitions et opérations sur les polynômes

Définition 2.1. *On appelle polynôme un objet de la forme* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *et* $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. X *est appelée une indéterminée et les* a_k *sont appelés les coefficients du polynôme* P. *L'ensemble des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *est noté* $\mathbb{K}[X]$.

Si tous les coefficients sont nuls on parlera du polynôme constant égal à zéro, ou polynôme nul, noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ ou plus simplement 0.

Remarque 2.1. *Si* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* $m > n$, *on a aussi* $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ *où on a posé* $a_k = 0$ *pour* $k = n+1, \dots, m$.

Remarque 2.2. *Une construction plus précise des polynômes est donnée dans la Section 2.5.1.*

On définit les opérations suivantes sur les polynômes.

Définition 2.2. *Soient* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^m$ *deux polynômes. Leur somme est le polynôme* $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) X^k$ *et leur produit le polynôme* $P \times Q = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k$ *où* $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.

Remarque 2.3. *Dans la définition précédente on a posé, cf Remarque 2.1,* $a_k = 0$ *si* $k > n$ *et* $b_k = 0$ *si* $k > m$.

Remarque 2.4. *Si* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *on définit également le polynôme* $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$. *Les deux lois "somme" et "multiplication par un scalaire" font de* $\mathbb{K}[X]$ *un espace vectoriel.*

Exercice 2.1. *Comparer le polynôme* λP *et le produit du polynôme constant* λ *avec le polynôme* P.

Définition 2.3. *Soit* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un polynôme. Si* P *n'est pas le polynôme nul, son* ***degré*** *est le plus grand entier* k *tel que* $a_k \neq 0$. *Si* $P = 0$ *son degré est par convention* $-\infty$. *Le degré de* P *est noté* $\deg P$ *ou* $d^\circ P$.

Si P est de degré n on peut donc écrire $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $a_n \neq 0$, et on dit que $a_n X^n$ est le terme de plus haut degré de P, ou **terme dominant** de P.

✎ **Notation.** Si $n \in \mathbb{N}$, on note en général $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, \deg P \leq n\}$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Remarque 2.5. *On écrira aussi parfois $P(X)$ au lieu de P.*

Théorème 2.1. *Pour tous P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ on a*

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q, \qquad \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q),$$

avec par convention $-\infty + n = -\infty$ si P ou Q est nul.

Démonstration. Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ où n et m sont les degrés respectifs de P et Q. Le terme dominant de PQ est alors $a_n b_m X^{n+m}$ d'où la première égalité. Par ailleurs, pour tout $k > \max(n,m)$ on a $a_k = b_k = 0$ et donc $a_k + b_k = 0$ ce qui prouve que le degré de $P+Q$ est inférieur ou égal à $\max(n,m)$. On vérifie facilement que les formules restent vraies dans le cas où un des polynômes est nul. □

Remarque 2.6. *Peut-on avoir* $\deg(P+Q) < \max(\deg P, \deg Q)$ *? Si oui, donnez un exemple.*

Exercice 2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Qu'en est-il de l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P = n\}$?

2.2 Divisibilité et division euclidienne

Définition 2.4. *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que le polynôme B divise le polynôme A, ou que B est un diviseur de A, s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$, et on notera $B|A$. On dit aussi que A est un multiple de B.*

Remarque 2.7. *a) On peut remarquer que si A n'est pas nul et si B divise A alors* $\deg B \leq \deg A$ *(c'est une conséquence du Théorème 2.1).*

b) Si $B = b_0$ est un polynôme constant (non nul) alors B divise A pour tout polynôme A. On peut en effet écrire $A = B \times \frac{1}{b_0} A$.

Exercice 2.2. *Montrer que si A divise B et B divise A alors il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $A = kB$. De tels polynômes sont dits* associés.

Comme dans l'ensemble des entiers, on peut définir une division euclidienne sur l'ensemble des polynômes.

Théorème 2.2. *Soient A et B deux polynômes, B étant non nul. Alors il existe une unique couple $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que*

1. $A = BQ + R$,
2. $\deg R < \deg B$.

Le polynôme Q s'appelle le quotient et R le reste (A est le dividende et B le diviseur).

Remarque 2.8. *L'unicité du couple (Q,R) implique que B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.*

Démonstration. 1) Existence. On suppose que B est de degré m et de terme dominant $b_m X^m$ (B n'est pas nul). Si $m = 0$ alors B est constant et d'après la remarque ci-dessus $A = B \times \frac{1}{b_0} A + 0$ donc le couple $(\frac{1}{b_0} A, 0)$ vérifie les propriétés voulues.

Si B n'est pas constant, i.e. $m \geq 1$, on va raisonner par récurrence sur le degré de A. On rappelle que $\mathbb{K}_n[X]$ note l'ensemble des polynômes de degré au plus n. Soit P_n la proposition “pour tout $A \in K_n[X]$ il existe (Q,R) vérifiant $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B = m$”.

- Si $\deg A < m$ on écrit $A = B \times 0 + A$ et le couple $(Q,R) = (0,A)$ vérifie bien les propriétés voulues. La proposition P_n est donc vraie pour tout $n < m$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que la propriété P_{n-1} est vraie et on montre P_n. Soit donc $A \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $\deg A < n$, et alors $A \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et le résultat est vrai par hypothèse de récurrence, soit $\deg A = n$. Alors $A' = A - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ (vérifiez le !) et on peut donc effectuer sa division euclidienne par B (hypothèse de récurrence) : il existe (Q', R') tel que
$$A' = BQ' + R' \quad \text{et} \quad \deg R' < \deg B.$$
On écrit alors
$$A = A' + \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} B = B\left(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q'\right) + R',$$
et le couple $(Q, R) = \left(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + Q', R'\right)$ est une division euclidienne de A par B.
- Le principe de récurrence permet d'affirmer que P_n est vraie pour tout n, ce qui prouve l'existence du couple (P, Q) pour tout polynôme A.

2) Unicité. Soient (Q, R) et (Q', R') tels $A = BQ + R$ $A = BQ' + R'$ avec $\deg R < \deg B$ et $\deg R' < \deg B$. En particulier on a
$$\deg (R' - R) \leq \max(\deg R, \deg R') < \deg B.$$
Puisque $BQ + R = BQ' + R'$ on a $B(Q - Q') = R' - R$. Si $Q \neq Q'$, on a alors $\deg B \leq \deg B + \deg (Q - Q') = \deg (R' - R)$ ce qui contredit $\deg (R' - R) < \deg B$. Ainsi $Q = Q'$ et donc $R = R'$. $\square$

Exercice 2.3. *Où a-t-on utilisé dans la récurrence ci-dessus le fait que B n'est pas un polynôme constant ?*

Dans la pratique, la division effective peut se faire en mimant la division des nombres. L'algorithme est même plus facile : il n'y pas de retenue...

Exemple 2.1. *Soient $A = 2X^5 + 3X^4 + X^3 - 1$ et $B = X^2 + X + 1$.*

$$\begin{array}{cccccc|l}
2X^5 & +3X^4 & +X^3 & & & -1 & X^2+X+1 \\ \cline{7-7}
-2X^5 & -2X^4 & -2X^3 & & & & 2X^3+X^2-2X+1 \\ \cline{1-3}
 & X^4 & -X^3 & & & -1 & \\
 & -X^4 & -X^3 & -X^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & -2X^3 & -X^2 & & -1 & \\
 & & 2X^3 & +2X^2 & +2X & & \\ \cline{3-5}
 & & & X^2 & +2X & -1 & \\
 & & & -X^2 & -X & -1 & \\ \cline{4-6}
 & & & & X & -2 &
\end{array}$$

On aura donc $Q = 2X^3 + X^2 - 2X + 1$ et $R = X - 2$.

Exercice 2.4. *Effectuer la division euclidienne de $A = X^4 - 2X^3 + X$ par $B = X^2 + X + 1$.*

Remarque 2.9. *Si A et B sont dans $\mathbb{R}[X]$ on peut aussi les voir comme polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et donc a priori effectuer la division de A par B soit dans $\mathbb{R}[X]$ soit dans $\mathbb{C}[X]$. En fait le résultat de cette division (quotient et reste) ne dépend pas du choix entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Cela découle de l'unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{C}$ en remarquant qu'une division euclidienne dans $\mathbb{R}$ est aussi une division euclidienne dans $\mathbb{C}$.*

2.3 Racines d'un polynôme

2.3.1 Application polynôme et racines

À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on peut associer une fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$:
$$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{2.1}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on retrouve les fonctions polynômes habituelles. On notera de la même façon un polynôme et la fonction associée, i.e. on notera P la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par (2.1).

Remarque 2.10. *On trouve parfois la notation $\widetilde{P}$ pour la fonction associée au polynôme P dans le but de distinguer ces deux objets. Cette distinction peut être particulièrement importante si $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

La notion de racine d'un polynôme est directement reliée à la fonction associée.

Définition 2.5. *On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si $P(a) = 0$.*

Un premier théorème important sur les racines des polynômes fait le lien avec la notion de divisibilité.

Théorème 2.3. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence*

$$P(a) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X - a)Q(X).$$

Autrement dit a est une racine de P si et seulement si P est divisible par $X - a$.

Démonstration. L'implication de droite à gauche est immédiate. Pour l'implication directe, on commence par effectuer la division euclidienne de P par $X - a$. Elle s'écrit

$$P(X) = (X - a)Q(X) + R(X) \tag{2.2}$$

avec $\deg R < 1$. Le polynôme R est donc constant. De plus on a $R(a) = P(a) = 0$ ce qui prouve que R est nul et donc que $X - a$ divise P. □

Remarque 2.11. *Si a est racine de P on peut trouver le polynôme Q tel que $P = (X - a)Q$ en effectuant la division euclidienne de P par $X - a$.*

Exemple 2.2. *Soit $P(X) = 3X^5 - 4X^4 + 5X^2 - 2X - 2$. On vérifie que $P(1) = 0$, on peut donc factoriser P par $X - 1$. Par division euclidienne on obtient*

$$3X^5 - 4X^4 + 5X^2 - 2X - 2 = (X - 1)(3X^4 - X^3 - X^2 + 4X + 2).$$

La notion suivante précise celle de racine.

Définition 2.6. *On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une racine de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ du polynôme P s'il existe un polynôme Q tel que*

$$P(X) = (X - a)^k Q(X), \qquad Q(a) \neq 0.$$

De façon équivalente a est de multiplicité k si et seulement si P est divisible par $(X - a)^k$ mais pas par $(X - a)^{k+1}$.

Exercice 2.5. *Montrer l'équivalence dans la définition ci-dessus.*

Remarque 2.12. *Si $k = 1$ on parle de racine simple, si $k = 2$ de racine double, etc.*

Le nombre de racines d'un polynôme est limité par son degré.

Théorème 2.4. *Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, non nul, de degré n, il a au plus n racines dans $\mathbb{K}$.*

☠ **Attention !** Le choix de l'ensemble $\mathbb{K}$ est important. Le polynôme $X^2 + 1$ n'a aucune racine comme polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et il en a 2 s'il est considéré comme polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur le degré de P.

- Le théorème est vrai pour un polynôme de degré 0, resp. 1 : il a toujours exactement aucune, resp. une, racine.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons le théorème vrai pour tout polynôme de degré n et montrons qu'il est vrai pour tout polynôme de degré $n+1$. Soit P de degré $n+1$. Si P n'a aucune racine c'est terminé ($0 \leq n+1$), sinon on peut écrire
$$P(X) = (X - a)Q(X)$$
où Q est de degré n. Si b est une autre racine de P, on a
$$0 = P(b) = (b - a)Q(b).$$
Comme $b - a$ n'est pas nul, b doit être racine de Q. Par hypothèse de récurrence il y a au maximum n possibilités, donc P a au plus $n + 1$ racines (a plus les n racines potentielles de Q).

□

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème.

Corollaire 2.1. *Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré au plus n et s'annule en $n+1$ éléments distincts de $\mathbb{K}$ alors P est nul.*

Avec le même raisonnement on peut en fait préciser le théorème précédent pour tenir compte de la multiplicité des racines.

Théorème 2.5. *Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, non nul, de degré n et si $a_1, \ldots, a_m$ sont des racines distinctes de multiplicité respective $k_1, \ldots, k_m$ alors $k_1 + \cdots + k_m \leq n$.*

Exercice 2.6. *Démontrez ce théorème.*

Exemple 2.3. *Soit $P(X) = X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 2X^2 + X \in \mathbb{R}[X]$. On peut vérifier que 0 et 1 sont racines de P d'où $P(X) = X(X-1)Q(X)$ et en effectuant la division euclidienne on trouve*

$$P(X) = X(X-1)(X^3 - X^2 + X - 1).$$

On remarque que 1 est aussi racine de $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1$. On obtient ainsi

$$P(X) = X(X-1)^2(X^2+1).$$

On remarque que 0 est racine de multiplicité 1 et que 1 est racine de multiplicité 2. On a bien $1+2 \leq 5$.

Si on considère P dans $\mathbb{C}[X]$ on a alors également i et $-i$ qui sont racines de multiplicité 1 et on a toujours bien $1+2+1+1 \leq 5$. On verra que dans $\mathbb{C}[X]$ il y a en fait toujours égalité, cf. Théorème 2.9.

2.3.2 Polynôme dérivé

Il est possible de définir le polynôme dérivé d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ sans utiliser la notion de limite. Cette notion de polynôme dérivé s'avère utile notamment en ce qui concerne l'étude des racines et des racines multiples.

Définition 2.7. *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Son polynôme dérivé est le polynôme défini par $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.*

Remarque 2.13. *La définition ci-dessus est bien sûr en accord avec celle que vous avez vu pour les fonctions d'une variable réelle via la notion de limite : si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors la fonction associée au polynôme P' est la dérivée (au sens dérivée de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) de la fonction associée à P.*

On peut facilement vérifier que la dérivation telle que définie ci-dessus a les propriétés usuelles :

Théorème 2.6. *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. $(P+Q)' = P' + Q'$, $(\lambda P)' = \lambda P'$.
2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$.
3. *Si P n'est pas constant alors* $\deg P' = \deg P - 1$.

Démonstration. La première propriété est immédiate. Il en suit que pour démontrer la seconde on peut se contenter de le faire pour des monômes, i.e. pour $P(X) = X^k$ et $Q(X) = X^\ell$. On a

$$(X^k X^\ell)' = (X^{k+\ell})' = (k+\ell)X^{k+\ell-1} \quad \text{et} \quad (X^k)'(X^\ell) + (X^k)(X^\ell)' = kX^{k+\ell-1} + \ell X^{k+\ell-1}.$$

□

Il est bien sûr possible d'itérer la dérivation. On notera $P^{(k)}$, ou $\frac{d^k}{dX^k}P$, la dérivée k-ième de P. Par convention $P^{(0)} = P$. On dispose alors des deux propriétés très utiles suivantes.

Proposition 2.1. *Si P est de degré n, de terme dominant $a_n X^n$, alors sa dérivée n-ième est le polynôme constant égal à $a_n n!$ et les dérivées suivantes son nulles.*

Exercice 2.2. Démontrer cette proposition.

Proposition 2.2 (Formule de Taylor)**.** *Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, alors*

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2!}(X-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Contrairement à la formule de Taylor habituelle, il n'y a pas de reste. Par ailleurs les termes d'indice $k > \deg P$ de cette somme sont nuls.

Démonstration. On commence par montrer le résultat pour $P_i(X) = X^i$. On calcule alors facilement (faites-le !) que

$$P_i^{(k)}(a) = \begin{cases} i(i-1)\ldots(i-k+1)a^{i-k} = \frac{i!}{(i-k)!}a^{i-k} & \text{si } k \leq i, \\ 0 & \text{si } k > i. \end{cases}$$

Par ailleurs, en utilisant la formule du binôme de Newton on peut écrire

$$P_i(X) = (X-a+a)^i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a^{i-k}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{i} \frac{i!}{(i-k)!k!} a^{i-k}(X-a)^k$$

et donc

$$P_i(X) = \sum_{k=0}^{i} \frac{P_i^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k,$$

ce qui montre que la formule est vraie pour les polynômes P_i. Par ailleurs, si $i \leq n$, on peut étendre la somme de $k = 0$ jusqu'à n puisque $P_i^{(k)}(a) = 0$ si $k > i$.

Soit maintenant $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On peut écrire

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(X),$$

et donc d'après le Théorème 2.6 on a

$$P^{(k)}(a) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i^{(k)}(a).$$

On a alors

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{P_i^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \right).$$

On peut finalement intervertir les signes de sommation et on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i^{(k)}(a) \right) \frac{1}{k!}(X-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Une application importante de ces notions est le lien avec les racines multiples.

Théorème 2.7. *Soit P un polynôme de degré n et $k \leq n$. Alors $a \in \mathbb{K}$ est racine multiple d'ordre k de P si et seulement si*

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(k)}(a) \neq 0.$$

Démonstration. On commence par écrire la formule de Taylor en coupant la somme en deux :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i + (X-a)^k \sum_{i=k}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i-k}.$$

On constate que la première somme est un polynôme de degré strictement inférieur à k. L'écriture ci-dessus correspond donc à la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)^k$: le quotient est $Q(X) = \sum_{i=k}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^{i-k}$ et le reste $R(X) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i$.

Si les dérivées en a sont nulles jusqu'à l'ordre $k-1$, on a $R(X) = 0$ et donc $(X-a)^k$ divise P. De plus on a $Q(a) = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$ ce qui prouve que si la dérivée d'ordre k n'est pas nulle a est racine de multiplicité k.

Réciproquement, supposons que a est une racine de multiplicité k. Donc P est divisible par $(X-a)^k$ et le reste de la division par $(X-a)^k$, $R(X) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i$, est nul. On en déduit que les dérivées en a sont nulles jusqu'à l'ordre $k-1$. Par ailleurs on a $Q(a) \neq 0$ ce qui prouve que $P^{(k)}(a) \neq 0$. $\square$

Exemple 2.4. *On voudrait déterminer les racines de $P = X^3 - X^2 - 8X + 12$ sachant que P possède une racine au moins double. Puisque P admet une racine double, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = P'(a) = 0$. On calcule $P' = 3X^2 - 2X - 8$. C'est un polynôme de degré 2. On montre facilement que P' a pour racines 2 et $-\frac{4}{3}$ et donc $a \in \{2, -\frac{4}{3}\}$. Il reste à calculer $P(2) = 0$ et $P(-\frac{4}{3}) = \frac{500}{27}$. On en déduit que 2 est racine double de P. On peut ainsi factoriser P par $(X-2)^2$. On trouve alors que $P = (X-2)^2(X+3)$. Finalement les racines de P sont 2 et -3.*

2.4 Polynômes irréductibles

On poursuit l'analogie avec les nombres entiers. L'analogue des "nombres premiers" est l'ensemble des polynômes dits **irréductibles**.

Définition 2.8. *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant est dit irréductible s'il n'a pas de diviseurs autre que les constantes non nulles ou ses associés, c'est-à-dire les polynômes de la forme λP où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Attention ! Contrairement à la division euclidienne la notion de polynôme irréductible dépend du choix de $\mathbb{K}$. Par exemple, le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (pourquoi ?) mais pas dans $\mathbb{C}[X]$. On peut en effet l'écrire $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$.

Dans les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ que l'on considère ici on connait en fait exactement tous les polynômes irréductibles.

Proposition 2.3. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif, autrement dit sans racine réelle.*

La démonstration de la première partie n'est pas facile. Elle repose sur un théorème que nous ne démontrerons pas mais qu'il **faut connaitre**.

Théorème 2.8 (D'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

On peut enfin démontrer, comme pour les nombres entiers,

Théorème 2.9. *Tout polynôme non constant se décompose (de façon unique) en produit d'irréductibles. En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on en déduit que tout polynôme de degré n admet exactement n racines comptées avec leur multiplicité.*

Remarque 2.14. *Puisque la notion d'irréductible dépend de $\mathbb{K}$, la factorisation en produit d'irréductibles aussi.*

Remarque 2.15. *Si $P = P_1P_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ on peut aussi écrire $P = (\lambda P_1) \times (\frac{1}{\lambda}P_2)$. Par ailleurs, pour tout $\lambda \neq 0$, un polynôme P est irréductible si et seulement si le polynôme λP l'est. L'unicité dans le théorème est donc à comprendre de la façon suivante : les facteurs irréductibles sont uniques* à multiplication par une constante près.

Exemple 2.5. *Le polynôme X^4+1 se factorise dans $\mathbb{R}[X]$ comme*

$$X^4+1=(X^2+1)^2-2X^2=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1),$$

et dans $\mathbb{C}[X]$ comme

$$X^4+1=\left(X-\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)\left(X\frac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\right).$$

Remarque 2.16. *Même si on connait la forme des polynômes irréductibles, la décomposition d'un polynôme (réel ou complexe) en facteurs irréductibles n'est pas toujours faisable de façon effective.*

2.5 Compléments

2.5.1 Construction de $\mathbb{K}[X]$

Dans cette section on donne une définition plus formelle des polynômes. Celle-ci repose sur la notion de "suites" que l'on (re)verra au Chapitre 3

Définition 2.9. *On appelle polynôme une suite $P=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ qui sont tous nuls à partir d'un certain rang. L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.*

L'interprétation est la suivante : la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des **coefficients** de P. Par exemple, si seul le coefficient a_0 est non nul il s'agira d'un polynôme constant, que l'on notera a_0. Si tous les coefficients sont nuls on parlera du polynôme constant égal à zéro, ou polynôme nul, noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ ou plus simplement 0.

On définit alors les opérations suivantes sur les polynômes.

Définition 2.10. *Soient $P=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $Q=(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux polynômes.*

- *La somme est définie par $P+Q=(a_k+b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*
- *Le produit est défini par $P\times Q=(c_k)_{i\in\mathbb{N}}$ où $c_k=\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}$.*

La définition du produit peut à première vue vous sembler compliquée, voir étrange. Nous allons rapidement voir qu'elle correspond à la multiplication telle qu'on l'a définie dans la Section 2.1. Notons également que ces définitions nécessitent quand même une justification : il faut prouver qu'elles ont un sens ! Cela veut dire qu'il faut justifier que les deux objets $P+Q$ et $P\times Q$ ainsi définis sont bien dans $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire que les suites $(a_k+b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 2.3. Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{K}[X]$ alors $P+Q$ et $P\times Q$ aussi.

Remarque 2.17. *Si $P=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ on définit également le polynôme $\lambda P=(\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les deux lois "somme" et "multiplication par un scalaire" font de $\mathbb{K}[X]$ un espace vectoriel.*

Définition 2.11. *On note X le polynôme $(0,1,0,0,...,0,...)$.*

Exercice 2.7. *Calculer le produit de X par un polynôme constant k, puis les produits X^2, X^3. Que vaut le produit X^n ?*

À l'aide de l'exercice précédent on montre alors facilement que

Proposition 2.4. *Le polynôme $P=(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ s'écrit*

$$P=\sum_{k\in\mathbb{N}}a_kX^k.$$

Ainsi, on écrira par exemple

$$P=(1,0,2,-3,6,0,0,\dots,0,\dots)=1+2X^2-3X^3+6X^4.$$

Notez que l'expression $\sum_{k\in\mathbb{N}}a_kX^k$ ne contient en fait qu'un nombre fini de termes non nuls (les a_k sont nuls à partir d'un certain rang) et est donc parfaitement bien définie. En particulier, si $a_k=0$ pour tout $k>n$ on a alors $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.

Exercice 2.4. Retrouver les formules définissant la somme et le produit de deux polynômes données dans la Section 2.1 à partir des définitions ci-dessus.

2.5.2 PGCD

On poursuit ici l'analogie avec les nombres entiers.

Définition 2.12. *Soient A, $B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non nuls. Un PGCD (plus grand commun diviseur) de A et B est un polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$ qui divise A et B, et tel que tout diviseur commun de A et B est un diviseur de D. Il est noté $A \wedge B$.*

On va commencer par justifier l'existence d'un PGCD. On va voir que ce dernier est "essentiellement" unique.

Proposition 2.5. *Si A et B sont deux polynômes non nuls, ils admettent un PGCD. De plus ce dernier est unique à constante multiplicative près, i.e. si D et D' sont deux PGCD de A et B il existe $k \in \mathbb{K}^*$ tel que $D = kD'$.*

Remarque 2.18. *a) Si on veut que le PGCD soit défini de façon unique on peut par exemple imposer qu'il soit unitaire, c'est-à-dire que son coefficient dominant est égal à 1.*

b) Puisque tout diviseur de A et B est un diviseur du PGCD, ce dernier est un diviseur de A et B de degré maximum.

Remarque 2.19. *Dans $\mathbb{Z}$ le PGCD est unique au signe près. Cela vient du fait que si $n|m$ et $m|n$ alors $n = \pm m$. Là encore ce qui importe c'est que deux PGCD doivent se diviser l'un l'autre.*

Remarque 2.20. *a) Si A et B sont dans $\mathbb{R}[X]$ on peut les voir aussi comme polynômes dans $\mathbb{C}[X]$. Tout comme pour la division euclidienne, le PGCD ne dépend pas (à constante multiplicative près) du choix entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.*

b) Le PGCD de deux polynômes ne change pas si on multiplie l'un ou les deux par une constante non nulle, i.e. $A \wedge B = (kA) \wedge (k'B)$ pour tous $k, k' \in \mathbb{K}^*$.

La deuxième partie de la proposition découle directement de l'Exercice 2.2. On va montrer l'existence à l'aide de l'algorithme d'Euclide. Ce dernier repose sur la division euclidienne et sur le résultat suivant.

Lemme 2.1. *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B. Un polynôme P est un diviseur commun de A et B si et seulement si c'est un diviseur commun de B et R.*

Exercice 2.8. *Démontrez le lemme ci-dessus.*

Démonstration de la proposition. On effectue la division euclidienne de A par B :

$$A = BQ_1 + R_1, \qquad \deg R_1 < \deg B.$$

Si $R_1 = 0$ on s'arrête, sinon on effectue la division de B par R_1 :

$$B = R_1Q_2 + R_2, \qquad \deg R_2 < \deg R_1.$$

Si $R_2 = 0$ on s'arrête sinon on continue en effectuant la division de R_1 par R_2 :

$$R_1 = R_2Q_3 + R_3, \qquad \deg R_3 < \deg R_2 \ldots$$

On note R_n le dernier reste non nul. On est sûr qu'un tel n existe puisque sinon $(R_n)_n$ formerait une suite strictement décroissante d'entiers positifs. On va montrer que R_n est bien un PGCD de A et B :

- On a $R_{n-1} = R_nQ_{n+1}$ donc R_n divise lui-même et R_{n-1}. À l'aide du lemme précédent on en déduit que R_n divise R_{n-1} et R_{n-2} puis R_{n-2} et R_{n-3}, et ainsi de suite. Finalement R_n divise A et B.
- Si P divise A et B alors, toujours d'après le lemme, P divise B et R_1, et donc R_1 et R_2, etc. Finalement P divise R_n.

□

Comme son nom l'indique, l'algorithme d'Euclide est aussi un moyen effectif de trouver le PGCD entre deux polynômes.

Exemple 2.6. *On veut déterminer le PGCD de* $A = 2X^4+3X^3+4X^2+2X+1$ *et* $B = 3X^3+4X^2+4X+1$. *La division de* A *par* B *s'écrit*

$$A = B(\frac{2}{3}X + \frac{1}{9}) + \underbrace{\frac{8}{9}(X^2 + X + 1)}_{R_1}.$$

Celle de B *par* R_1 *donne*

$$B = R_1 \times (\frac{27}{8}X + \frac{9}{8}) + 0.$$

Le dernier reste non nul est R_1. *Le PGCD de* A *et* B *est donc, à constante multiplicative près,* R_1. *Par exemple on peut prendre* $A \wedge B = X^2 + X + 1$.

Comme pour les entiers, on dira que

Définition 2.13. *Deux polynômes* A *et* B *sont premiers entre eux si* 1 *est un PGCD, autrement dit s'ils n'ont aucun diviseur commun autre que les polynômes constants non nuls.*

On dispose alors d'un théorème de Bezout similaire à celui dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 2.10 (Bezout)**.** *Soient* A *et* B *dans* $\mathbb{K}[X]$. $A \wedge B = 1$ *si et seulement si il existe* U, $V \in \mathbb{K}[X]$ *tels que*

$$AU + BV = 1.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $A \wedge B = 1$. On montre l'existence de U et V en "remontant" l'algorithme d'Euclide. On écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} A &=& BQ_1 + R_1 \\ B &=& R_1Q_2 + R_2 \\ &\vdots& \\ R_{n-2} &=& R_{n-3}Q_{n-1} + R_{n-1} \\ R_{n-1} &=& R_{n-2}Q_n + 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} R_1 &=& A - BQ_1 \\ R_2 &=& B - R_1Q_2 \\ &\vdots& \\ R_{n-1} &=& R_{n-2} - R_{n-3}Q_{n-1} \\ 1 &=& R_{n-1} - R_{n-2}Q_n \end{array}\right.$$

On remplace ensuite dans la dernière équation R_{n-1} par $R_{n-3}Q_{n-1} - R_{n-2}$, puis R_{n-2} par $R_{n-4}Q_{n-2} - R_{n-3}$, etc. (Voir l'exemple ci-dessous.)

Réciproquement, quelques soient U et V tout diviseur commun D de A et de B est un diviseur de $AU + BV$. Donc s'il existe U, V tels que $AU + BV = 1$ alors D divise 1 et donc D est constant. □

Remarque 2.21. *Les polynômes* U *et* V *donnés par le théorème ne sont pas uniques. On peut cependant montrer qu'il existe un couple* (U, V) *solution avec* $\deg U < \deg B$ *et* $\deg V < \deg A$. *En effet, si* (U, V) *est une solution et* $U = BQ + R$ *est la division euclidienne de* U *par* B, *on a alors* $AR + B(AQ + V) = 1$ *donc* $(R, AQ + V)$ *est aussi solution. Par ailleurs* $\deg R < \deg B$. *Finalement on a aussi* $\deg(AQ + V) < \deg A$ *puisque* $\deg B(AQ + V) = \deg AR - 1 < \deg A + \deg B$.

Exemple 2.7. *Soient* $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ *et* $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$. *On va montrer qu'ils sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide, puis déterminer* U *et* V *tels que* $AU + BV = 1$ *en remontant ce dernier. On effectue les divisions eucliennes successives :*

$$\begin{array}{ll} A = BQ_1 + R_1 & \textit{avec } Q_1 = X^2 + 1,\ R_1 = X^2 - X - 1, \\ B = R_1Q_2 + R_2 & \textit{avec } Q_2 = X^2 - X + 1,\ R_2 = -X + 2, \\ R_1 = R_2Q_3 + R_3 & \textit{avec } Q_3 = -X - 1,\ R_3 = 1. \end{array}$$

On a donc bien $A \wedge B = 1$. *On écrit ensuite*

$$1 = R_1 - R_2Q_3 = R_1 + (X + 1)R_2.$$

Puis

$$R_2 = B - R_1Q_2 = B - (X^2 - X + 1)R_1,$$

et donc

$$1 = R_1 + (X + 1) \times [B - (X^2 - X + 1)R_1] = (X + 1)B - X^3R_1.$$

Finalement

$$R_1 = A - BQ_1 = A - (X^2 + 1)B,$$

d'où

$$1 = (X+1)B - X^3 \times [A - (X^2+1)B] = -X^3A + (X^5+X^3+X+1)B.$$

On trouve par exemple $U = -X^3$ *et* $V = X^5 + X^3 + X + 1$.

Tout comme pour les entiers, on peut également définir la notion de PPCM (plus petit commun multiple) de deux polynômes.

2.5.3 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Introduction

On termine ce chapitre avec une notion étroitement reliée aux polynômes, celle des fractions rationnelles. Une fraction rationnelle est le quotient $F(X) = \dfrac{N(X)}{D(X)}$ de deux polynômes N et D, étant entendu que D n'est pas le polynôme nul et que deux fractions $\dfrac{N(X)}{D(X)}$ et $\dfrac{M(X)}{E(X)}$ sont égales si $NE = MD$. L'ensemble des fractions rationnelles est noté $\mathbb{K}(X)$. Tout comme pour les polynômes, on ne s'intéressera pas ici au côté "analytique" de ces fractions (domaine de définition de la fonction associée, limites,...) mais plutôt au côté algébrique/arithmétique, et en particulier à la notion de décomposition en éléments simples d'une fraction.

Commençons par un exemple.

Exemple 2.8. *On souhaiterait calculer l'intégrale suivante*

$$I = \int_0^1 \frac{2x^6 - 3x^5 - 13x^3 - x^2 - x + 18}{(x+1)(x-2)^2(x^2+1)} \mathrm{d}x.$$

Vous pouvez remarquer que la fonction $f(x) = \dfrac{2x^6 - 3x^5 - 13x^3 - x^2 - x + 18}{(x+1)(x-2)^2(x^2+1)}$ *est bien définie sur* $[0,1]$ *et donc on peut a priori calculer l'intégrale ci-dessus. La question est comment ! L'idée est de transformer* f *et de se ramener à des fractions "simples" dont on connait les primitives. Par exemple, vous savez calculer les primitives des polynômes, des fractions du type* $\dfrac{1}{(x-a)^n}$ *(on trouve* $\ln(|x-a|)$ *si* $n = 1$ *et* $\dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$ *si* $n > 1$*), de fractions telles que* $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ *(c'est de la forme* $\frac{u'}{u}$ *avec* $u(x) = x^2+x+1$*) ou bien aussi* $\frac{1}{x^2+1}$ *dont une primitive est* $\arctan(x)$.

Ici on a en fait (vérifiez-le en mettant le membre de droite au même dénominateur)

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{4x+1}{x^2+1}. \tag{2.3}$$

On peut alors facilement calculer une primitive F *de* f *et donc la valeur de* I.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 2x + 3 + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{4x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x \\ &= \left[x^2 + 3x + 2\ln(|x+1|) + \ln(|x-2|) + \frac{4}{x-2} + 2\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right]_0^1 \\ &= 2 + \ln(2) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Le membre de droite de (2.3) est ce qu'on appelle la décomposition en éléments simples de la fraction f. Sa particularité est que dans chacune des fractions apparaissant dans cette décomposition le dénominateur est un facteur irréductible (dans $\mathbb{R}$) ou une puissance d'un tel facteur. La question est bien sûr : peut-on toujours faire une telle décomposition et si oui comment la fait-on dans la pratique.

La réponse à la première question est OUI. On va voir ici comment on peut obtenir de façon théorique cette décomposition d'abord dans le cas de $\mathbb{C}(X)$ puis de $\mathbb{R}(X)$. La question du calcul pratique sera vue dans le cours de "Calculus".

Partie entière d'une fraction

Proposition 2.6. *Toute fraction rationnelle $F(X)$ peut s'écrire*

$$F(X) = Q(X) + \frac{R(X)}{B(X)}$$

où $\deg R < \deg B$. De plus cette décomposition est unique, Q s'appelle la partie entière de F.

Démonstration. Si $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$ il suffit de faire la division euclidienne de A par B. □

Exemple 2.9. *Dans l'exemple ci-dessus, la partie entière de la fraction $F(X) = \frac{2X^6-3X^5-13X^3-X^2-X+18}{(X+1)(X-2)^2(X^2+1)}$ est $Q(X) = 2X+3$, et $R(X) = 7X^4 - 24X^3 + 2X^2 + 3X + 6$.*

Parties polaires

On commence par traiter le cas complexe. Celui-ci est en fait plus simple car les seuls polynômes irréductibles sont de degré 1. Il se fait en deux temps.

Proposition 2.7. *Soit une fraction de la forme $\frac{N(X)}{D(X)}$ où $\deg N < \deg D$ et $D(X) = (X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2}\cdots(X-a_m)^{k_m}$ la factorisation en produit de facteurs irréductibles de D (les a_j sont des complexes distincts). Alors, il existe des polynômes $N_j(X)$, $j = 1,\ldots,m$ tels que*

$$\frac{N(X)}{(X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2}\cdots(X-a_m)^{k_m}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{N_j(X)}{(X-a_j)^{k_j}}.$$

De plus, pour tout j on a $\deg N_j < k_j$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur m, le nombre de racines distinctes de D.

- Pour $m = 1$ il n'y a rien à faire.
- Soit $m \geq 1$, on suppose que le résultat est vrai pour toute fraction dont le dénominateur a m racines distinctes. Soit maintenant D de la forme $D(X) = (X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2}\cdots(X-a_{m+1})^{k_{m+1}}$. Les polynômes $\tilde{D} = (X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2}\cdots(X-a_m)^{k_m}$ et $(X-a_{m+1})^{k_{m+1}}$ sont premiers entre eux, il existe donc U et V tels que

$$U(X)(X-a_{m+1})^{k_{m+1}} + V(X)\tilde{D}(X) = N(X). \tag{2.4}$$

  Il suffit en effet de partir de l'identité de Bezout et de la multiplier par $N(X)$. De plus, en raisonnant comme dans la Remarque 2.21 on peut toujours supposer que $\deg U < \deg \tilde{D}$ et $\deg V < \deg(X-a_{m+1})^{k_{m+1}} = k_{m+1}$. En divisant les deux membres de l'équation (2.4) par D on a alors

$$\frac{N(X)}{D(X)} = \frac{U(X)}{\tilde{D}(X)} + \frac{V(X)}{(X-a_{m+1})^{k_{m+1}}}.$$

  Le dernier terme est de la forme voulue et le polynôme $\tilde{D}$ a exactement m racines distinctes avec $\deg U < \deg \tilde{D}$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à la fraction $\frac{U}{\tilde{D}}$.

□

La seconde étape consiste à décomposer chaque terme de la forme $\frac{N(X)}{(X-a)^k}$.

Proposition 2.8. *Toute fraction rationnelle de la forme $\frac{N(X)}{(X-a)^k}$ avec $\deg N < k$ peut s'écrire*

$$\frac{N(X)}{(X-a)^k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{(X-a)^j} = \frac{a_1}{X-a} + \frac{a_2}{(X-a)^2} + \ldots + \frac{a_k}{(X-a)^k},$$

où les a_j sont des complexes.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor au point a au numérateur. □

Lorsque a est une racine du dénominateur d'une fraction rationnelle (supposée simplifiée), on dit que c'est un **pôle** de la fraction rationnelle. La somme donnée par la proposition précédent s'appelle la **partie polaire** relative au pôle a.

En réunissant toutes les opérations décrites ci-dessus, on obtient la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ d'une fraction rationnelle. On peut vérifier qu'il y a unicité d'une telle décomposition.

On considère finalement le cas réel. L'idée est de voir d'abord la fraction comme une fraction dans $\mathbb{C}$ et ensuite de revenir à $\mathbb{R}$. On va se contenter de montrer ce qu'il se passe lorsque la factorisation en produit d'irréductibles du dénominateur contient un polynôme du second degré sans racine réelle comme X^2+1.

Comme $X^2+1=(X-i)(X+i)$, la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ contiendra un terme de la forme

$$\frac{a}{X-i}$$

où $a=b+ic\in\mathbb{C}$. En utilisant qu'une fraction à coefficients réels est inchangée si on conjugue tous ses coefficients, on montre que dans la partie polaire relative à $-i$, il y a le terme

$$\frac{\bar{a}}{X+i}=\frac{b-ic}{X+i}.$$

Il ne reste plus qu'à observer que

$$\frac{b+ic}{X-i}+\frac{b-ic}{X+i}=\frac{2bX-2c}{X^2+1}.$$

On vérifie de même que si le dénominateur de la fraction rationnelle contient une expression de la forme $(X^2+aX+b)^k$ où X^2+aX+b est un polynôme sans racine réelle, alors la partie polaire relative aux racines complexes de ce polynôme devient

$$\frac{a_1X+b_1}{X^2+aX+b}+\frac{a_2X+b_2}{(X^2+aX+b)^2}+\ldots+\frac{a_kX+b_k}{(X^2+aX+b)^k}=\sum_{j=1}^{k}\frac{a_jX+b_j}{(X^2+aX+b)^j}.$$

À nouveau, on ne précise pas ici comment on obtient dans la pratique la décomposition en éléments simples, cela sera fait dans le cours de “Calculus”.

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.1 Généralités sur les suites

3.1.1 Définitions

Définition 3.1. *Une* suite *numérique, ou réelle, est une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, l'image* $u(n)$ *de* n *par* u *est notée traditionnellement* u_n*, qu'on appelle le terme de rang, ou d'indice,* n *de la suite. Souvent une suite est identifiée avec son image :* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. On dit aussi que* u *est la suite de terme général* u_n*.*

Exemple 3.1. *La suite des carrés des entiers est* $u : n \mapsto n^2$*, i.e.* $u_0 = 0$*,* $u_1 = 1$*,* $u_2 = 4, \ldots$

Remarque 3.1. *Il arrive que la suite ne soit pas définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Par exemple la suite définie par* $u_n = \frac{1}{n}$ *n'a de sens que si* $n \neq 0$*. On note alors* $(u_n)_{n\geq 1}$ *pour préciser que les valeurs autorisées de* n *commencent à* 1*.*

Définition 3.2. *Soient* u *et* v *deux suites et* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

- *La somme* $u + v$ *est la suite de terme général* $u_n + v_n$*. On définit de même le produit de* uv *est la suite de terme général* $u_n v_n$*, et si* v *ne s'annule pas, c'est-à-dire si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $v_n \neq 0$*, et le quotient* $\dfrac{u}{v}$ *celle de terme général* $\dfrac{u_n}{v_n}$*.*
- *La suite* λu *note la suite de terme général* λu_n*.*

Remarque 3.2. *Les deux lois "somme" et "multiplication par un scalaire" ci-dessus font de l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des suites un espace vectoriel dont l'élément neutre est la suite nulle, i.e. la suite* u *telle que* $u_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Définition 3.3. *On dit qu'une propriété* $P(n)$ *est* vraie à partir d'un certain rang *si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$ *est vraie.*

Exemple 3.2. *Soit* u *la suite définie par* $u_n = (n-3)^2 - 5$*. Si* $n \geq 6$ *on a* $n - 3 \geq 3$*, d'où* $(n-3)^2 \geq 9$ *et donc* $u_n \geq 4 > 0$*. Cependant* $u_5 = -1 < 0$*. La suite* u *n'est pas tout le temps positive, mais elle l'est à partir d'un certain rang. Dans cet exemple le* n_0 *est* 6*. Attention, cela ne signifie pas que pour* $n \leq 5$ *la propriété est fausse ! Ici on a par exemple* $u_0 = 4 > 0$*.*

3.1.2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 3.4. *Une suite* $(u_n)_n$ *est dite arithmétique s'il existe* $r \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_{n+1} = u_n + r$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Le nombre* r *est alors unique et s'appelle la raison de la suite.*

Étant donné le premier terme u_0 de la suite, on calcule alors les termes suivants par $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$, etc. On montre facilement par récurrence la propriété suivante

Proposition 3.1. $(u_n)_n$ *est une suite arithmétique de raison* r *et de premier terme* u_0 *si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n = u_0 + nr$*.*

Exercice 3.1. Démontrer la proposition.

Exemple 3.3. *En prenant* $u_0 = 1$ *et* $r = 2$ *on obtient la suite des entiers impairs.*

Proposition 3.2. *Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors la somme des premiers termes de la suite est*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{\textit{nombre de termes} \times (\textit{1er terme } + \textit{dernier terme })}{2}.$$

Démonstration. On remarque que l'égalité $(n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$ découle directement de $u_n = u_0 + nr$. Il suffit donc de montrer la première. On montre le résultat par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $P(n)$ la proposition "$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2}$".

- Pour $n = 0$ on a bien $u_0 = (0+1) \times u_0 + \frac{0 \times (0+1)r}{2}$. $P(0)$ est donc vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie et on montre que $P(n+1)$ aussi. On écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} u_k &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} \\
&\overset{HR}{=} (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} + (u_0 + (n+1)r) \\
&= (n+1)u_0 + u_0 + \frac{n(n+1)r}{2} + (n+1)r \\
&= (n+2)u_0 + \frac{(n+1)(n+2)r}{2}.
\end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Le principe de récurrence permet d'affirmer que $P(n)$ est vraie pour tout n.

$\square$

Remarque 3.3. *La preuve ci-dessus repose sur le fait qu'on ait deviné la formule qui donne la somme. L'idée du calcul est la suivante. On écrit $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 + (u_0 + r) + \cdots + (u_0 + nr)$, puis on regroupe ensemble les termes en u_0 et les termes en r. On obtient alors $u_0 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \cdots + n)$ et il reste à calculer $1 + 2 + \cdots + n$. On écrit alors 2 fois cette somme sur 2 lignes, l'une en sens inverse de l'autre, et au lieu de sommer ligne par ligne on somme colonne par colonne :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\
+ & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
= & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \\
= & n(n+1) & & & & & & & &
\end{array}$$

et on trouve bien que $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 3.5. *Une suite $(u_n)_n$ est dite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $u_0 \neq 0$, le nombre q est alors unique et s'appelle la raison de la suite.*

Étant donné le premier terme u_0 de la suite, on calcule alors les termes suivants par $u_1 = qu_0$, $u_2 = qu_1 = q^2 u_0$, etc. On montre facilement par récurrence la propriété suivante

Proposition 3.3. *$(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = q^n u_0$.*

Exercice 3.2. Démontrer la proposition.

Exemple 3.4. *La première année le loyer mensuel s'élève à 500 euros. L'augmentation annuelle est de 2%. À combien s'élèvera le loyer mensuel la cinquième année ?*

Si on appelle u_n le loyer mensuel en euros lors de l'année $n+1$ (ainsi le loyer de la première année est u_0) l'énoncé se traduit de la façon suivante : $u_0 = 500$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100}u_n = 1,02 \times u_n$. Autrement dit la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1,02$. Le loyer lors de la cinquième année est alors $u_4 = 1,02^4 \times 500 \simeq 541,22$ euros.

Remarque 3.4. *On peut faire commencer une suite géométrique à $n = 1$ (dans l'exemple précédent u_n serait le loyer lors de l'année n). La formule pour u_n devient alors $u_n = q^{n-1}u_1$: la puissance à mettre correspond à la différence entre les indices des 2 termes de la suite qui apparaissent, i.e. $u_n = q^{n-m}u_m$. Par exemple $u_{43} = q^{16}u_{27}$.*

Proposition 3.4. *Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$ alors la somme des premiers termes de la suite est*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \textit{1er terme} \times \frac{1 - \textit{raison}^{\textit{nombre de termes}}}{1 - \textit{raison}}.$$

Démonstration. On a $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} q^k u_0 = u_0 \times \sum_{k=0}^{n} q^k$. Par ailleurs

$$\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) \times (1-q) = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{j=1}^{n+1} q^j = 1 - q^{n+1},$$

et donc $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. □

Exemple 3.5. *On reprend l'exemple précédent. On voudrait maintenant savoir combien de loyer on paiera au total lors des 5 années. Il faut donc calculer*

$$S = 12u_0 + 12u_1 + 12u_2 + 12u_3 + 12u_4 = 12 \times (u_0 + \cdots + u_4) = 12 \times u_0 \times \frac{1-q^5}{1-q}.$$

Avec $u_0 = 500$ et $q = 1,02$ on trouve alors $S \simeq 31224$ euros ce qui fait en moyenne $520,40$ euros par mois.

Application : les suites arithmético-géométriques

Définition 3.6. *Une suite $(u_n)_n$ est dite arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que $u_{n+1} = a \times u_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Tout comme pour les suites arithmétiques et géométriques on peut exprimer directement le terme u_n en fonction de n. On supposera $a \neq 1$ sinon la suite est simplement une suite arithmétique. Étant donné u_0 on écrit

$$\begin{aligned}
u_1 &= au_0 + b \\
u_2 &= au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + (ab + b) \\
u_3 &= au_2 + b = a\left(a^2u_0 + (ab + b)\right) + b = a^3u_0 + (a^2b + ab + b) \\
u_4 &= au_3 + b = a\left(a^3u_0 + (a^2b + ab + b)\right) + b = a^4u_0 + (a^3b + a^2b + ab + b) \\
&\vdots \\
u_n &= a^nu_0 + (a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots + ab + b) = a^nu_0 + b \times \frac{1-a^n}{1-a}.
\end{aligned}$$

À la dernière ligne, on utilise le fait que $a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots + ab + b$ est la some des termes d'une suite géométrique de raison $a \neq 1$ et de premier terme b.

Exercice 3.3. Montrer proprement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = a^nu_0 + b \times \frac{1-a^n}{1-a}$.

Exemple 3.6. *Je souhaite acheter une voiture. Mes revenus me permettent de rembourser au maximum 300 euros par mois. Pour un prêt d'une durée de 5 ans, la banque me propose un taux d'intérêt de 3% par an, soit 0,25% par mois. Quel montant maximal pourrai-je emprunter à la banque et à combien se montera le montat total des intérêts que j'aurai versés ? Autrement dit, quelle est la valeur maximum de la voiture que je pourrai acheter et combien cela me coûtera-t-il de faire ce prêt ?*

On va appeler u_n le montant en euros qu'il me reste à payer à la banque après n mois. L'énoncé se traduit donc ainsi : lors du mois $n+1$ il me reste à rembourser le montant du mois précédent plus les intérêts du mois passé moins les 300 euros de remboursement effectués, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{0,25}{100} \times u_n - 300 = 1,0025u_n - 300.$$

On a affaire à une suite arithmético-géométrique dont les paramètres a et b valent respectivement $1,0025$ et -300.

La durée du prêt est de 5 ans, il faut donc qu'après 60 mois il ne me reste plus rien à payer, soit $u_{60} = 0$. Je cherche alors le montant que je peux emprunter soit ce qu'il me reste à payer après 0 mois : u_0. On écrit alors

$$0 = u_{60} = 1,0025^{60}u_0 - 300 \times \frac{1-1,0025^{60}}{1-1,0025} \iff u_0 = \frac{300 \times \frac{1-1,0025^{60}}{1-1,0025}}{1,0025^{60}} \simeq 16696.$$

Je pourrai acheter une voiture d'environ 16696 euros.

Le montant total des intérêts que j'aurai versés correspond alors au montant total de mes remboursements, 300×60, moins ce que j'ai emprunté, c'est-à-dire $18000 - 16696 = 1304$ euros.

Remarque 3.5. *Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques sont des cas particulier des suites dites* définies par récurrence *que l'on étudiera par la suite, cf Section 3.4 page 42.*

3.1.3 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 3.7.
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* croissante *si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.*
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* strictement croissante *si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.*
- *On dit que la suite $(u_n)_n$ est* décroissante *(resp.* strictement décroissante*) si la suite $(-u_n)_n$ est croissante (resp. strictement croissante), c'est-à-dire si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$, resp. $u_n > u_{n+1}$).*
- *$(u_n)_n$ est dite* monotone *(resp.* strictement monotone*) si $(u_n)_n$ est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

Pour savoir si une suite u est croissante, resp. décroissante, on pourra par exemple chercher le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si celui-ci est tout le temps positif alors la suite sera croissante, s'il est tout le temps négatif alors elle sera décroissante.

Exemple 3.7. *On considère la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)-(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)(n+3)} < 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$. La suite u est donc strictement décroissante.

Définition 3.8.
- *Une suite u est* constante *si $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c$.*
- *Une suite u est* stationnaire *si $\exists c \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = c$.*

Exercice 3.4. Écrire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :

a) La suite u est positive à partir d'un certain rang.

b) La suite u est constante à partir d'un certain rang. Comment s'appelle une telle suite ?

c) La suite u est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 3.5. Une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est-elle croissante ? décroissante ? constante ? Mêmes questions pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

3.1.4 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 3.9. *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est :*
- majorée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq M$: " $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$."*
  Un tel M est appelé un majorant de la suite.
- minorée *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \geq m$: " $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$."*
  Un tel m est appelé un minorant de la suite.
- bornée *si elle est* majorée *et* minorée*.*

Remarque 3.6. *Si la suite u est croissante (resp. décroissante) alors elle est minorée (resp. majorée) par son premier terme u_0.*

Remarque 3.7. *Une suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leq M$:*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M. \tag{3.1}$$

En effet, $|u_n| \leq M$ est équivalent à $-M \leq u_n \leq M$. Si (3.1) est vraie alors u est bien bornée, M est un majorant et $-M$ est un minorant. Réciproquement, si u est bornée il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $m \leq u_n \leq M$. Soit $M' = \max\{-m, M\}$. On a donc $M \leq M'$ et $-m \leq M'$ ce qui est équivalent à $m \geq -M'$. On en déduit que pour tout n on a $u_n \leq M \leq M'$ et $u_n \geq m \geq -M'$, autrement dit $-M' \leq u_n \leq M' \iff |u_n| \leq M'$.

Exercice 3.6. Soient u et v deux suites bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u + v$ et λu sont bornées.

Exercice 3.7. Montrer qu'une suite u est majorée, resp. minorée, si et seulement si elle est majorée, resp. minorée, à partir d'un certain rang.

Exercice 3.8. Une suite arithmétique de raison r est-elle majorée ? minorée ? bornée ? Mêmes questions pour une suite géométrique de raison q.

Exercice 3.9. Donner un exemple de suite :

a) Croissante et majorée.

b) Ni croissante, ni décroissante.

c) Ni majorée, ni minorée.

d) Croissante, ni strictement croissante à partir d'un certain rang ni stationnaire.

3.2 Limites de suites

3.2.1 Suites convergentes

Définition 3.10.

- *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ a pour* limite *$l \in \mathbb{R}$, et on note $u_n \to l$, si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.}$$

  On dit aussi que la suite u converge*, ou* tend*, vers l.*
- *On dit qu'une suite u est convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que u converge vers l.*
- *On dit qu'une suite u est* divergente *si elle n'est pas convergente c'est à dire :*

$$\forall l \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

Remarque 3.8. *Dans la définition 3.10 on peut remplacer $< \varepsilon$ par $\leq \varepsilon$.*

Remarque 3.9. *La convergence de u vers l est la même chose que la convergence de $u - l$ vers 0.*

Remarque 3.10. *La définition 3.10 ressemble fort à celle de la limite d'une fonction d'une variable réelle lorsque x tend vers $+\infty$ (voir le cours du premier semestre sur les fonctions d'une variable). Contrairement à ces dernières, dans le cas des suites la seule limite que l'on considère est lorsque n tend vers l'infini. On omettra donc souvent de le préciser (lorsque l'on parle des suites ! !).*

Remarque 3.11. *Dans la définition l'entier N dépend de ε (voir l'exemple ci-dessous).*

Pour montrer, à partir de la définition, qu'une suite u tend vers l on peut utiliser le plan suivant :

1. Soit $\varepsilon > 0$
2. Posons $N = \cdots$
3. Vérifions : Soit $n \geq N$, ..., on a bien $|u_n - l| < \varepsilon$
4. Donc $u_n \to l$.

Exemple 3.8. *Montrons avec la définition que la suite de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, *converge vers* 0. *C'est-à-dire :* $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. *La question à résoudre est la suivante : existe-t-il un entier* N *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$ *? On commence par étudier ce que signifie* $|u_n| < \varepsilon$. *Puisque* $u_n = \dfrac{1}{n} > 0$ *cela signifie que* $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ *c'est à dire* $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. *Ainsi on peut dire que* $\forall n \in \mathbb{N},\ n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *implique que* $|u_n| < \varepsilon$. *On doit donc choisir un entier* $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *puisqu'alors* $n \geq N \ \Rightarrow\ n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ *et donc* $|u_n| < \varepsilon$. *On peut prendre, par exemple,* $N = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ *et on a bien*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ |u_n| < \varepsilon,$$

ce qui est précisément la définition de "la suite $(u_n)_n$ *tend vers* 0*".*

Exercice 3.10. Montrer, en utilisant la définition, que la suite de terme général $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$ tend vers $3/2$.

Exercice 3.11. Montrer, en utilisant la définition que si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $u_n \to a$, alors $a \geq 0$ et $\sqrt{u_n} \to \sqrt{a}$.

Proposition 3.5. *Si une suite converge sa limite est unique.*

Démonstration. On va raisonner par l'absurde : supposons que $(u_n)_n$ converge à la fois vers l_1 et l_2 avec $l_1 \neq l_2$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}|l_1 - l_2|$. D'après la définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$, et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors $|u_N - l_1| < \varepsilon$ et $|u_N - l_2| < \varepsilon$. D'où,

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - u_N) + (u_N - l_2)| \leq |l_1 - u_N| + |u_N - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|.$$

Ce qui est absurde, donc l'hypothèse de départ est fausse. □

Définition 3.11. *On dit qu'une suite* u tend vers $+\infty$, *noté* $u_n \to +\infty$, *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

On dit que la suite u tend vers $-\infty$, *noté* $u_n \to -\infty$, *si*

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq B.$$

Attention ! Une suite qui tend vers $+\infty$ est une suite divergente. En particulier une suite ne converge pas vers l'infini...

Attention ! Une suite diverge si elle n'a pas de limite finite. Cela ne veut pas dire qu'elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Elle peut aussi ne pas avoir de limite du tout ! C'est le cas par exemple de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.

Pour montrer, à partir de la définition, que $u_n \to +\infty$, on peut utiliser le plan suivant :

1. Soit $A \in \mathbb{R}$
2. Posons $N = \cdots$
3. Vérifions : Soit $n \geq N$, ..., on a bien $u_n \geq A$.
4. Donc $u_n \to +\infty$.

Exercice 3.12. Montrer en utilisant la définition que $(\sqrt{n})_n$ tend vers $+\infty$.

Proposition 3.6. *1) Toute suite convergente est bornée.*
2) Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ *est minorée.*
3) Toute suite réelle qui tend vers $-\infty$ *est majorée.*

Démonstration. 1) Supposons que $u_n \to l$. Soit $\varepsilon = 1 > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < 1.$$

En utilisant l'inégaltié triangulaire on obtient que $|u_n| < |l| + 1$ pour tout $n \geq N$. Si on pose

$$M = \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |l| + 1\},$$

on a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite est bien bornée. (On aurait aussi pu conclure en disant que la suite était bornée à partir d'un certain rang et donc bornée.)

2) Supposons que $u_n \to +\infty$. Soit $A = 1$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq 1.$$

Donc la suite est minorée par $m = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, 1\}$.

3) On applique 2) à $-u_n$. □

Exercice 3.13. Montrer qu'une suite arithmétique de raison r tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$. Que se passe-t-il si $r = 0$?

3.2.2 Opérations sur les limites

Proposition 3.7. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, u, v deux suites et $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si $u_n \to l$ alors $|u_n| \to |l|$.*
2. *$u_n \to 0$ si et seulement si $|u_n| \to 0$.*
3. *Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ alors $u_n + v_n \to l + l'$.*
4. *Si $u_n \to l$ alors $\lambda u_n \to \lambda l$.*
5. *Si $u_n \to 0$ et v est bornée alors $u_n v_n \to 0$.*
6. *Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ alors $u_n v_n \to ll'$.*
7. *Si $u_n \to l$, $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $l \neq 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{l}$.*
8. *Si $u_n \to l$, $v_n \to l'$, $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $l' \neq 0$ alors $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{l}{l'}$.*
9. *Si $u_n \to +\infty$, resp. $u_n \to -\infty$, et v est bornée (en particulier si $v_n \to l'$) alors $u_n + v_n \to +\infty$, resp. $u_n + v_n \to -\infty$.*
10. *Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to l' > 0$, resp. $l' < 0$, alors $u_n v_n \to +\infty$, resp. $u_n v_n \to -\infty$.*
11. *Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$, resp. $-\infty$, alors $u_n v_n \to +\infty$, resp. $u_n v_n \to -\infty$.*
12. *Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et si $u_n \to +\infty$ (ou $u_n \to -\infty$), alors $\frac{1}{u_n} \to 0$.*

Remarque 3.12. *Ces propriétés sont similaires à celles sur les limites de fonctions.*

Bien que beaucoup de ces propriétes vous semblent "évidentes", ou en tous cas connues, il est très instructif d'en voir les démonstrations qui se font toutes à partir de la définition. Cela vous permettra de manipuler un peu cette définition, ce qui est loin d'être simple au début.

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. Or on a $\big||u_n| - |l|\big| \leq |u_n - l|$. Donc $n \geq N \Rightarrow \big||u_n| - |l|\big| < \varepsilon$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\big||u_n| - 0\big| = |u_n| = |u_n - 0|$, et donc quelque soit $\varepsilon > 0$ on a $\big||u_n| - 0\big| < \varepsilon \iff |u_n - 0| < \varepsilon$. D'où l'équivalence.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon/2$ (on applique la Définition 3.10 avec $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$) et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \varepsilon/2$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$ on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc

$$|u_n + v_n - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \varepsilon.$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{\varepsilon}{|\lambda|+1} > 0$, donc par définition de $u_n \to l$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|+1}.$$
Pour tout $n \geq N$ on a donc $|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| \times |u_n - l| < \dfrac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda|+1} < \varepsilon$.
5. La suite v est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{\varepsilon}{|M|+1} > 0$ donc, par définition de $u_n \to l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{|M|+1}$. On a alors, pour tout $n \geq N$, $|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| < \frac{|M|\varepsilon}{|M|+1} < \varepsilon$.
6. On écrit $u_n v_n = (u_n - l)v_n + l v_n$. D'après 4. on a $l v_n \to l l'$. D'autre part, on a $u_n - l \to 0$ et v_n est bornée car convergente donc d'après 5. $(u_n - l)v_n \to 0$. On en déduit, d'après 3., que $u_n v_n \to l l'$.
7. D'après 1. $u_n \to l \ \Rightarrow |u_n| \to |l|$. D'autre part, comme $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$,
$$\big||u_n| - |l|\big| < \frac{|l|}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{|l|}{2} < |u_n| - |l| < \frac{|l|}{2}.$$
En particulier, pour tout $n \geq N_1$ on a $|u_n| > \dfrac{|l|}{2}$ et donc $\dfrac{1}{|u_n|} < \dfrac{2}{|l|}$. Ainsi la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est bornée à partir d'un certain rang et est donc bornée. Par ailleurs, pour tout n, $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l} = (l - u_n)\dfrac{1}{l u_n}$. La suite $l - u$ tend vers 0 et la suite $\frac{1}{lu}$ est bornée, on peut donc appliquer 5. ce qui prouve le résultat.
8. $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$ or $u_n \to l$ et $\dfrac{1}{v_n} \to \dfrac{1}{l'}$ d'où le résultat.
9. On traite le cas $u_n \to +\infty$. v est bornée, en particulier minorée donc il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $v_n \geq m$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n \geq A - m$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $u_n + v_n \geq (A - m) + m = A$.
10. On traite le cas $l' > 0$. $v_n \to l'$ et $\dfrac{l'}{2} > 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$,
$$|v_n - l'| < \frac{l'}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{l'}{2} < v_n - l' < \frac{l'}{2}.$$
En particulier, on obtient, pour tout $n \geq N_1$, $v_n > \frac{l'}{2} > 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $u_n \to +\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow u_n \geq \dfrac{2|A|}{l'} \geq 0$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $u_n v_n \geq |A| \geq A$.
11. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, resp. $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N_1 \Rightarrow u_n \geq \sqrt{|A|}$, resp. $n \geq N_2 \Rightarrow v_n \geq \sqrt{|A|}$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $u_n v_n \geq |A| \geq A$.
12. On traite le cas $u_n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \to +\infty$, par définition il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$. En prenant l'inverse (on a des nombres positifs) on en déduit que pour tout $n \geq N$ on a alors
$$\left|\frac{1}{u_n} - 0\right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon,$$
ce qui prouve bien que $\frac{1}{u_n} \to 0$.

□

Remarque 3.13. *Au 7. si $l = 0$ on ne peut rien dire.*
Exemple : $u_n = (-1)^n/n \to 0$ mais $\frac{1}{u_n} = n/(-1)^n$ n'a pas de limite (ni finie ni infinie).

Remarque 3.14. *Les quatre "formes indéterminées" sont $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. La terminologie "forme indéterminée" signifie juste qu'il faut plus d'information pour pouvoir étudier la limite, pas que l'on ne pourra rien faire du tout. Si on rencontre une de ces formes on évitera donc de s'arrêter là et de conclure par "c'est une forme indéterminée".*

Par exemple la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$ signifie que la seule connaissance de $u_n \to +\infty$ et $v_n \to -\infty$ ne permet pas de tirer de conclusion sur la limite éventuelle de la suite $u + v$ comme le montrent les trois exemples ci-dessous.

Exemple 1 : $u_n = n^2 \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ *et* $u_n + v_n \to +\infty$.
Exemple 2 : $u_n = n + 1 \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ *et* $u_n + v_n \to 1$.
Exemple 3 : $u_n = n + (-1)^n \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ *mais* $u_n + v_n$ *n'a pas de limite.*
Dans chacun des cas $u_n \to +\infty$ *et* $v_n \to -\infty$, *cependant* $u + v$ *a un comportement différent à chaque fois. Remarquez qu'on sait dire lequel...*

Exemple 4 : $u_n = (-1)^n/n \to 0$, $v_n = n \to +\infty$ *mais* $u_n v_n = (-1)^n$ *n'a pas de limite.*

Exercice 3.14. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et si $u_n \to 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.

3.2.3 Limites usuelles

Fractions rationnelles

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_p$, $b_0, \ldots, b_q$ des réels tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ On considère

$$u_n = \frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k n^k}{\displaystyle\sum_{j=0}^{q} b_j n^j}.$$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$ (les plus grandes puissances). Pour le voir il suffit de mettre $\dfrac{a_p n^p}{b_q n^q}$ en facteur dans l'expression de u_n et d'utiliser la Proposition 3.7.

Logarithme et exponentielle

Dans ce cours, on admet les résultats suivants :

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.
- L'exponentielle "croit plus vite" que n'importe quelle puissance. C'est-à-dire, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^a} = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} n^a \mathrm{e}^{-n} = 0.$$

  On démontrera le cas particulier $a = 1$ dans l'Exemple 3.9.
- N'importe quelle puissance positive de n "croit plus vite" que le logarithme. C'est-à-dire, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0.$$

  Avec $\alpha = 1$ on obtient le cas particulier important

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Factorielle

On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$.
On admet le résultat suivant (voir l'Exercice 32 dans le polycopié d'exercices) : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

3.2.4 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Proposition 3.8. *Soit une suite* u *qui converge vers* l *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
1) si $a < l$ *alors il existe* $N_1 \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq N_1$, $u_n > a$.
2) si $l < b$, *il existe un entier* $N_2 \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq N_2$, $u_n < b$.
3) si $a < l < b$, *il existe un entier* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq N$, $a < u_n < b$.

Démonstration. 1) On a $\varepsilon = l - a > 0$ donc, par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < l - a$. Or $|u_n - l| < l - a \Rightarrow u_n - l > -(l - a)$. D'où $u_n > a$ pour tout $n \geq N_1$.

2) On applique 1) à $v = -u$ et $a = -b$.

3) est une conséquence de 1) et 2). □

Proposition 3.9. *[Passage à la limite dans une inégalité] On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq a$ (ou $u_n > a$). Si u_n a pour limite l alors $l \geq a$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons $l < a$. D'après la proposition précédente, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow u_n < a$. Soit $n = \max(N, N_1)$. On a alors $u_n < a$ mais par hypothèse $u_n \geq a$. C'est absurde. □

☠ **Attention !** Si pour tout $n \geq N$ on a $u_n > a$ et $u_n \to l$ alors on ne peut **pas** en déduire que $l > a$. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1/n > 0$ et $1/n$ tend vers 0, mais on n'a pas $0 > 0$! Moralité : les inégalités strictes se transforment en inégalités larges par passage à la limite.

Théorème 3.1. *[Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)] Soient u, v et w trois suites réelles telles que*

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow\ u_n \leq v_n \leq w_n, \\ u_n \to l \text{ et } w_n \to l. \end{cases}$$

Alors $v_n \to l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ et $n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon$. Soit $N_0 = \max(N, N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N_0$, on a

- $u_n \leq v_n \leq w_n$,
- $|u_n - l| < \varepsilon \ \Rightarrow\ -\varepsilon < u_n - l$,
- $|w_n - l| < \varepsilon \ \Rightarrow\ w_n - l < \varepsilon$.

Ainsi $\forall n \geq N_0$ on a $-\varepsilon < u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l < \varepsilon \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$. □

Exemple 3.9. *Soit $v_n = \dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$. On va montrer le résultat sur les croissances comparées, à savoir $v_n \to 0$. On sait que $\mathrm{e} > 1$. Soit $h = \mathrm{e} - 1 > 0$. On écrit alors, pour tout $n \geq 2$ et en utilisant la formule du binôme de Newton,*

$$\mathrm{e}^n = (h+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

où on a utilisé le fait que $h > 0$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq v_n \leq \frac{2}{(n-1)h^2}$. On peut alors appliquer le théorème des gendarmes avec les suites $u_n = 0$ et $w_n = \frac{2}{(n-1)h^2}$ ce qui prouve bien que $v_n \to 0$.

Corollaire 3.1. *Soit u une suite et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \alpha_n,$$

et telle que $\alpha_n \to 0$. Alors $u_n \to l$.

Démonstration. Pour tout $n \geq N$ on a

$$-\alpha_n \leq u_n - l \leq \alpha_n.$$

Comme $-\alpha_n \to 0$ et $\alpha_n \to 0$, on a d'après le théorèmes des gendarmes $u_n - l \to 0 \Leftrightarrow u_n \to l$. □

Proposition 3.10. *Soient u et v deux suites réelles telles que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n$.*

1. *Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.*
2. *Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.*
3. *Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ alors $l \leq l'$.*

Démonstration. 1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1 \Rightarrow u_n \geq A$. Soit $N_2 = \max(N, N_1)$. Pour tout $n \geq N_2$ on a $u_n \leq v_n$ et $u_n \geq A$, donc $v_n \geq A$. On a montré que pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existait $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow v_n \geq A$, c'est précisément la définition de $v_n \to +\infty$.

2. On applique 1. aux suites $-u$ et $-v$.

3. D'après la Proposition 3.7 on a $v_n - u_n \to l' - l$. De plus, pour tout $n \geq N$ on a $v_n - u_n \geq 0$. On en déduit d'après la Proposition 3.9 que $l' - l \geq 0$. □

Exemple 3.10. *Si u est une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison r, on a les cas suivants :*

1. *si $|r| < 1$ la suite u converge vers 0.*
2. *si $r = 1$ la suite u converge vers u_0.*
3. *si $r = -1$ la suite diverge.*
4. *si $|r| > 1$ la suite u diverge. Elle tend vers $+\infty$ si $r > 1$ et $u_0 > 0$, et vers $-\infty$ si $r > 1$ et $u_0 < 0$.*

En effet, si $r > 1$, on peut écrire $r = 1 + h$ avec $h > 0$. On a alors, en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$r^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq 1 + nh \to +\infty.$$

Si $|r| < 1$ et $r \neq 0$ (si $r = 0$ le résultat est évident), on a $\frac{1}{|r|} > 1$, donc $(\frac{1}{|r|})^n \to +\infty$ (suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{|r|}$), ce qui implique que $|r|^n \to 0$ et donc $r^n \to 0$. Si $r = -1$ la suite n'a pas de limite (voir la Section 3.5 sur les suites extraites).

3.2.5 Suites et continuité

Vous avez étudié au premier semestre les fonctions continues. Vous y avez en particulier vu plusieurs résultats permettant de montrer qu'une fonction est continue (somme de fonctions continues, produit de fonctions continues, etc.) Le théorème qui suit fournit un critère très utile pour caractériser les fonctions continues. On l'utilise en particulier pour montrer qu'une fonction n'est *pas* continue.

Théorème 3.2. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f est continue en a si et seulement si **pour toute** suite $(x_n)_n$ qui converge vers a la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. $(\Rightarrow)$ On suppose que f est continue en a. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers a, il faut montrer que la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\eta > 0$ tel que (3.2) soit vraie. Comme $(x_n)_n$ tend vers a et que $\eta > 0$, par définition il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n - a| < \eta$. On peut ainsi appliquer (3.2) à x_n pour tout $n \geq N$ et on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |x_n - a| < \eta \ \Longrightarrow\ |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ on a trouvé $N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Longrightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ ce qui signifie précisément que la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$.

$(\Leftarrow)$ On raisonne par contraposition. On suppose que f n'est pas continue en a, c'est-à-dire que $f(x)$ ne tend pas vers $f(a)$ lorsque x tend vers a. Autrement dit on écrit la négation de (3.2) :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon, \tag{3.3}$$

et on montre qu'il existe une suite $(x_n)_n$ qui tend vers a mais telle que la suite $(f(x_n))_n$ ne tende pas vers $f(a)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\eta = \frac{1}{n} > 0$ dans (3.3), il existe $x_n \in I$ tel que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$. D'après le Corollaire 3.1 la suite $(x_n)_n$ tend vers a. Par contre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$ donc la suite $(f(x_n))_n$ ne tend pas vers $f(a)$. On a construit une suite $(x_n)_n$ qui tend vers a et telle que la suite $(f(x_n))_n$ ne tende pas vers $f(a)$. □

Remarque 3.15. *Pour montrer que f n'est **pas** continue en a, il suffit de trouver **une** suite $(x_n)_n$ qui tend vers a et telle que la suite de terme général $f(x_n)$ ne tende pas vers $f(a)$.*

Exercice 3.15. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0. Indication : considérer la suite de terme général $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

3.2.6 Remarque sur les suites de nombres complexes

Une *suite complexe* est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'une suite complexe $(u_n)_n$ *converge* vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

l s'appelle la *limite* de la suite, et on note $u_n \to l$. La partie réelle et la partie imaginaire d'une suite complexe sont des suites réelles. On utilisera le résultat suivant.

Proposition 3.11. *Une suite complexe converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si $(Re(u_n))_n$ converge vers $Re(l)$ et $(Im(u_n))_n$ converge vers $Im(l)$.*

3.3 Suites monotones, suites adjacentes

3.3.1 Borne supérieure, borne inférieure dans $\mathbb{R}$

On rappelle la définition d'ensemble majoré et minoré.

Définition 3.12. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que*
- *$M \in \mathbb{R}$ est un* majorant *de A si, pour tout $x \in A$, $x \leq M$,*
- *$m \in \mathbb{R}$ est un* minorant *de A si, pour tout $x \in A$, $x \geq m$.*

On dit que A est
- majoré *si A admet un majorant,*
- minoré *si A admet un minorant.*
- borné *si A est majoré et minoré.*

Remarque 3.16. *Dire qu'une suite $(u_n)_n$ est majorée, resp. minorée, est équivalent à dire que l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ de ses termes est majoré, resp. minoré.*

On admettra le théorème suivant.

Théorème 3.3. (Théorème de la borne supérieure)
1. *Soit A un sous-ensemble majoré non-vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément que l'on appelle la* borne supérieure *de A, notée* $\sup A$.
2. *Soit A un sous-ensemble minoré non-vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément que l'on appelle la* borne inférieure *de A, notée* $\inf A$.

Remarque 3.17. *Le théorème ci-dessus est faux si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$. Par exemple le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$ est majoré non-vide, mais n'admet pas de borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$!).*

Attention ! La borne supérieure d'un ensemble n'est pas forcément le plus grand élément de celui-ci, car par définition le plus grand élément d'un ensemble doit appartenir à l'ensemble. De même la borne inférieure d'un ensemble n'est pas forcément le plus petit élément de celui-ci.

Exemple 3.11. *L'ensemble $A =]0, 1[$ admet -1, 0 comme minorants. Sa borne inférieure est 0 mais elle n'appartient pas à A : l'ensemble A n'a pas de plus petit élément. D'autre part, 10, 4 et 1 sont des majorants de A et sa borne supérieure est 1.*

L'ensemble $A =]-\infty, 2]$ n'a pas de minorant donc n'a pas de borne inférieure et a une borne supérieure 2 qui est dans A qu'on appelle aussi maximum ou plus grand élément.

Proposition 3.12. *Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Si $A \subset B$ alors* $\sup A \leq \sup B$.

Démonstration. On suppose que $A \subset B$. Par définition, $\sup B$ est le plus petit majorant de B. En particulier c'est un majorant de B donc pour tout $x \in B$ on a $x \leq \sup B$. Soit maintenant $x \in A$, puisque $A \subset B$ on a $x \in B$ et donc $x \leq \sup B$. On a montré que pour tout $x \in A$ on avait $x \leq \sup B$, autrement dit $\sup B$ est un majorant de A. Comme $\sup A$ est le plus petit majorant de A, nécessairement $\sup A \leq \sup B$. □

La proposition suivante permet de caractériser la borne supérieure d'un ensemble.

Proposition 3.13. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$M = \sup A$.*
2. *M est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a \leq M$.*
3. *M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $a_n \to M$.*

Démonstration. On va montrer 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.

1. $\Rightarrow$ 2. Par définition M est un majorant de A. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. On a $M - \varepsilon < M$ et donc, comme M est le plus petit majorant de A, $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant donc il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$. (On a bien sur $a \leq M$ puisque M est un majorant.)

2. $\Rightarrow$ 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{1}{n} > 0$, par hypothèse, il existe $a_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$. Montrons que la suite $(a_n)_n$ ainsi construite convient. Les suites de terme général $u_n = M - \frac{1}{n}$ et $w_n = M$ tendent toutes les deux vers M. Puisque pour tout n on a $u_n \leq a_n \leq w_n$ le résultat est une simple application du Théorème des gendarmes.

3. $\Rightarrow$ 1. Il faut montrer que M est le plus petit majorant de A. On sait déjà que M est un majorant de A. Soit maintenant $M' < M$, on montre que M' n'est pas un majorant de A. Par hypothèse il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui tend vers M. Soit $\varepsilon = M - M' > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |a_n - M| < \varepsilon$. En particulier on a $a_N - M > -\varepsilon = M' - M$ et donc $a_N > M'$ ce qui prouve bien que M' n'est pas un majorant de A. □

Exercice 3.16. Ecrire une proposition similaire pour caractériser la borne inférieure d'un ensemble.

3.3.2 Théorème des suites monotones

Théorème 3.4.
1. *Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*
2. *Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.*

Démonstration. 1. Supposons que $(u_n)_n$ est croissante et majorée. L'ensemble $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et, par hypothèse, majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure M d'après le Théorème 3.3. On va montrer que $u_n \to M$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition 3.13, on sait alors qu'il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a \leq M$, autrement dit il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < u_N \leq M$. Comme la suite $(u_n)_n$ est croissante, $\forall n \geq N$, $u_n \geq u_N$ donc on a $\forall n \geq N$, $M - \varepsilon < u_n \leq M < M + \varepsilon \Longrightarrow |u_n - M| < \varepsilon$ ce qui prouve que la suite $(u_n)_n$ converge (vers M).

2. Il suffit d'appliquer 1. à la suite $-u$. □

Attention ! La preuve du théorème montre que si une suite est croissante et majorée alors elle converge vers la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de ses termes. Dans la pratique, lorsqu'on montre qu'une suite est majorée on cherche juste <u>un</u> majorant et on ne trouve pas forcément le meilleur qu'est la borne supérieure. Si a est un majorant de la suite $(u_n)_n$ tout ce qu'on pourra affirmer c'est que la limite ℓ vérifie $\ell \leq a$ (la borne supérieure est le plus petit majorant). Voir l'Exemple 3.12 et l'Exercice 3.17.

Théorème 3.5.
1. *Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
2. *Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Démonstration. 1. Soit $A \in \mathbb{R}$. La suite u n'est pas majorée, donc A ne peut pas être un majorant de la suite : $\exists N \in \mathbb{N}$, $u_N > A$. Comme la suite est croissante, $\forall n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$. On a donc montré que pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existait $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \ \Rightarrow u_n > A$, c'est précisément la définition de $u_n \to +\infty$.

Le 2. se fait de la même façon. □

Exemple 3.12. *On va montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. La suite est donc (strictement) croissante.*
- *Montrons qu'elle est majorée. Soit $k \geq 2$. On a $k^2 \geq k(k-1) > 0$ donc $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. On en déduit que*

$$u_n \;=\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \;\leq\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \;=\; 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \;\leq\; 2.$$

La suite $(u_n)_n$ est donc bien majorée, par 2.

Finalement, la suite est croissante et majorée donc elle converge.
Remarque : on sait qu'elle converge vers la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ et que celle-ci est inférieure ou égale à 2, mais rien ne dit qu'elle vaut 2. C'est d'ailleurs faux comme le montre l'exercice ci-dessous.

Exercice 3.17. On reprend la suite u de l'exemple précédent. En vous inspirant de l'exemple et en écrivant que, si $n \geq 3$,

$$u_n \;=\; 1 + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2},$$

montrer que la suite u est majorée par $\dfrac{7}{4}$.

Remarque : la limite de la suite u est en fait $\dfrac{\pi^2}{6}$, qui est strictement inférieur à $\dfrac{7}{4}$, mais la preuve de ce résultat dépasse le cadre de ce cours.

3.3.3 Suites adjacentes

Définition 3.13. *Deux suites u et v sont dites* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si la suite $u - v$ converge vers 0.*

Théorème 3.6 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Si deux suites u et v sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont même limite.*

Remarque 3.18. *Le théorème reste vrai si les suites u et v ne sont croissante/décroissante qu'à partir d'un certain rang.*

Lemme 3.1. *Si u est une suite décroissante et qui tend vers 0 alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N < 0$. Comme u est décroissante, on a $n \geq N \Rightarrow u_n \leq u_N < 0$. Soit $\varepsilon = |u_N| = -u_N$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$. Soit $N' = \max(N, N_1)$. On a $u_{N'} \leq u_N$ et $|u_{N'}| < \varepsilon = -u_N \Rightarrow u_N < -|u_{N'}| = u_{N'}$ ce qui est absurde. □

Démonstration du Théorème. Supposons que u est croissante et v est décroissante. Soit $w = v - u$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}). \tag{3.4}$$

Comme v est décroissante, $v_{n+1} - v_n \leq 0$, et comme u est croissante, $u_n - u_{n+1} \leq 0$. On déduit alors de (3.4) que la suite w est décroissante. De plus elle tend vers 0, donc d'après le lemme précédent on a $w_n \geq 0$ pour tout n. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$. La suite u est donc croissante et majorée par v_0. Donc elle converge vers un certain l. De même v est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers un certain l'. On a alors $u_n - v_n \to l - l'$ mais par hypothèse $u_n - v_n \to 0$. Par unicité de la limite on obtient $l = l'$. □

Remarque 3.19. *La démonstration ci-dessus montre également que la limite commune l des suites u et v vérifie*

$$u_n \leq l \leq v_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont respectivement strictement *croissante et* strictement *décroissante, on peut remplacer $u_n \leq l \leq v_n$ par $u_n < l < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 3.13. *Soient u et v les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$. On va montrer que ces deux suites sont adjacentes.*

- *On montre que la suite u est (strictement) croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

- *On montre que la suite v est (strictement) croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n \times n!}\right) \\
&= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\
&= \frac{n+2}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\
&= \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} \\
&= -\frac{1}{n(n+1) \times (n+1)!} \ < \ 0.
\end{aligned}$$

- *On montre que la suite $u - v$ tend vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n - v_n = -\frac{1}{n \times n!} \to 0$.*

Les deux suites u et v sont bien adjacentes, elles convergent donc vers une même limite l.
N.B. On peut montrer que cette limite vaut e.

Un des théorèmes principaux que vous avez vus au premier semestre dans le cours “Fonctions d’une variable réelle” est le Théorème des Valeurs Intermédiaires.

Théorème 3.7 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$ tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel γ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

On va ici démontrer ce théorème à l’aide des suites adjacentes.

Démonstration. On souhaite utiliser le théorème des suites adjacentes. Pour construire les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ en question, dont la limite commune sera le point c recherché, on va utiliser le procédé dit de *dichotomie* (divisions successives par deux).

On suppose que $f(a) \leq f(b)$ (le cas $f(a) \geq f(b)$ se traite de la même façon). Soit γ tel que $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$. L’idée est de construire deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que

1. $a_0 = a$ et $b_0 = b$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ (autrement dit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$),
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ (à chaque étape on divise la taille de l’intervalle par deux),
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$ (à chaque étape on a $\gamma \in [f(a_n), f(b_n)]$).

L’idée est, à chaque étape, de diviser l’intervalle en 2 de façon à ce que le nombre γ soit toujours compris entre les valeurs de f aux bornes du nouvel intervalle.

Admettons que l’on sache construire deux telles suites. D’après 2. la suite $(a_n)_n$ est croissante et la suite $(b_n)_n$ est décroissante, et d’après 3. la suite $(b_n - a_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc elle tend vers 0. On en déduit que les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite c, et d’après 1. et 2. on a bien $c \in [a, b]$. Finalement comme f est continue on a, d’après le Théorème 3.2, $f(a_n) \to f(c)$ et $f(b_n) \to f(c)$, et en utilisant la Proposition 3.9 et 4. on a $f(c) \leq \gamma \leq f(c)$, c’est-à-dire $f(c) = \gamma$.

Il reste donc à construire les suites a et b vérifiant les propriétés 1. à 4. ci-dessus. On le fait par récurrence. On prend $a_0 = a$ et $b_0 = b$ (ainsi 1. est vérifié). Supposons $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ construits vérifiant 1. à 4. Soit $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ le “milieu” de $[a_n, b_n]$. On compare $f(m_n)$ et γ :

— Si $f(m_n) < \gamma$ on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
— Sinon on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.

On vérifie facilement que les propriétés 2., 3. et 4. sont vérifiées jusqu'au rang $n+1$. L'idée est qu'on a divisé l'intervalle $[a_n, b_n]$ en deux et "gardé" la moitié (droite ou gauche) telle que γ soit toujours compris entre les valeurs images par f de chacune des deux bornes du nouvel intervalle. □

Exercice 3.18. Illustrer à l'aide d'un dessin le procédé de constructions des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

3.4 Suites définies par récurrence

3.4.1 Suites récurrentes d'ordre 1

Une suite définie par récurrence d'ordre 1 est une suite dont les termes sont définis de façon successive. C'est-à-dire que pour tout entier n le terme u_{n+1} est défini à partir de u_n. De façon plus précise :

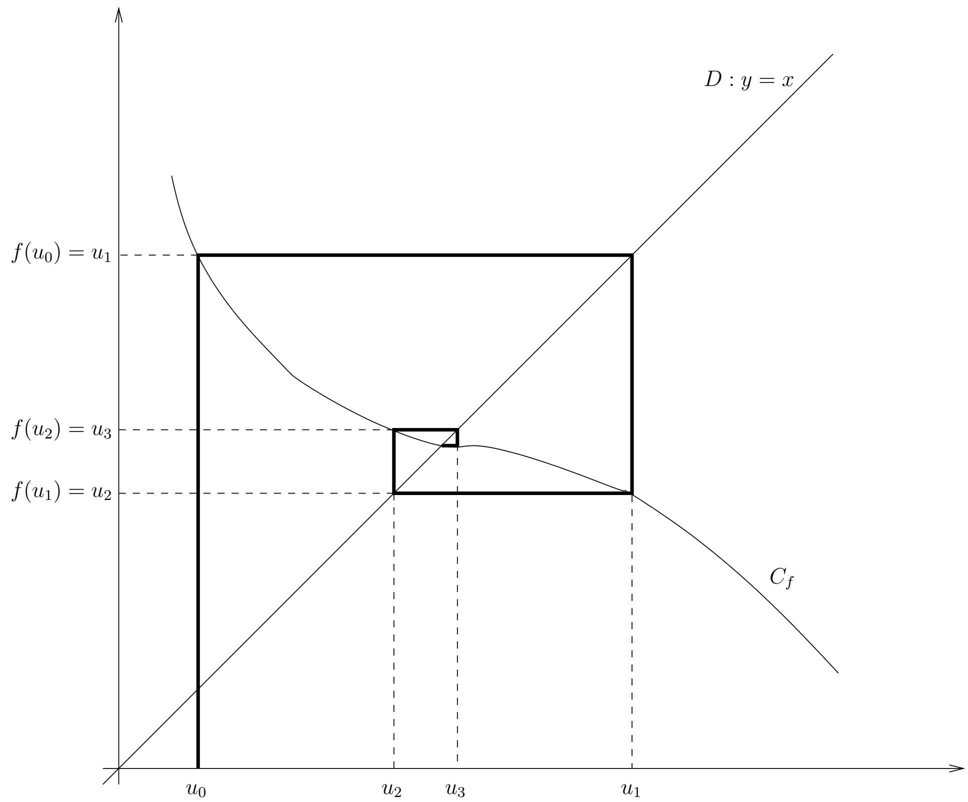
Définition 3.14. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset I$. On appelle suite définie par récurrence par la fonction f toute suite vérifiant $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 3.14. *Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques sont des suites définies par récurrence dont la fonction f est, successivement, $f(x) = x + r$, $f(x) = qx$ et $f(x) = ax + b$.*

Remarque 3.20. *La condition $f(I) \subset I$ permet de s'assurer qu'étant donné $u_0 \in I$ on pourra bien construire toute la suite. Si $u_0 \in I$ alors $u_1 = f(u_0) \in I$ donc $f(u_1)$ a bien un sens et on peut construire $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite.*

Remarque 3.21. *On n'impose a priori aucune condition supplémentaire sur la fonction f. Elle peut ne pas être dérivable ni même continue.*

On peut représenter graphiquement les termes d'une suite définie par récurrence à l'aide d'une "toile d'araignée". Un tel graphique permet de "deviner" le comportement de la suite : est-elle croissante ? décroissante ? a-t-elle une limite ? laquelle ?



Une notion importante dans l'étude des suites définies par récurrence est celle de point fixe.

Définition 3.15. *Les solutions de l'équation $f(x) = x$ s'appellent les points fixes de f.*

Exemple 3.15. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. On peut remarquer qu'on a bien $f(\mathbb{R}^*) \subset \mathbb{R}^*$. Les points fixes de f sont les nombres x (différents de 0) tels que*

$$f(x) = x \iff x + \frac{2}{x} = 2x \iff \frac{2}{x} = x \iff 2 = x^2.$$

La fonction f a donc deux points fixes : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Remarque 3.22. *Graphiquement les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite D d'équation $y = x$. En effet, $M(x, y) \in C_f$ si et seulement si $y = f(x)$ et $M \in D$ si et seulement si $y = x$. Ainsi $M \in C_f \cap D$ si et seulement si $x = y = f(x)$, i.e. x est un point fixe de f.*

L'appellation "point fixe" provient du fait suivant. Si $(u_n)_n$ est définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ et si pour un certain entier N le nombre u_N est un point fixe de f, alors pour tout $n \geq N$ on a $u_n = u_N$: lorsque la suite prend pour valeur un point fixe à un certain moment elle y reste à jamais, autrement dit la suite est stationnaire. Un cas particulier important est lorsque u_0 est un point fixe.

Exercice 3.19. Montrer par récurrence que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u_N est un point fixe de f alors $u_n = u_N$ pour tout $n \geq N$.

La seconde raison pour laquelle la notion de points fixes est importante est reliée à l'étude de la limite d'une suite définie par récurrence :

Proposition 3.14. *Si la fonction f est continue et si la suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ a une limite $\ell \in I$, alors ℓ est un point fixe de f.*

Démonstration. Supposons que la suite $(u_n)_n$ tende vers $\ell \in I$. Comme f est continue en ℓ, d'après le Théorème 3.2, la suite $(f(u_n))_n$ tend vers $f(\ell)$. Or pour tout n on a $f(u_n) = u_{n+1}$ et, comme $(u_n)_n$ tend vers ℓ, la suite $(u_{n+1})_n$ tend aussi vers ℓ. Par unicité de la limite on a bien $f(\ell) = \ell$. □

☠ **Attention !** On ne dit pas que toutes les suites définies par récurrence ont pour limite un point fixe. Ce que le résultat dit c'est que *s'il y a une limite alors c'est un point fixe.* Mais il se peut que la suite n'ait pas de limite ou bien tende vers $\pm\infty$. Prenons par exemple la fonction $f(x) = 2x$. Cette fonction possède un point fixe : 0. Cependant la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison 2 et ne tend vers 0 que si $u_0 = 0$. Pour $u_0 = 1$ par exemple on a $u_n = 2^n$ qui tend vers $+\infty$.

Afin d'étudier une suite par récurrence, on peut alors essayer d'utiliser le schéma directeur suivant :

1. À l'aide de la toile d'araignée on conjecture le comportement de la suite.
2. On cherche les points fixes de f afin de déterminer les limites potentielles de la suite.
3. Si possible, on utilise l'un des résultats généraux sur les limites pour montrer que la suite a effectivement une limite. Par exemple que la suite est croissante et majorée ou bien décroissante et minorée.

Pour savoir si une suite est croissante ou décroissante on peut bien entendu chercher à déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ cela conduit à l'étude du signe de la fonction $g(x) = f(x) - x$. On peut également parfois simplifier cette étude à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 3.15. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in I$ est donné et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la fonction f est croissante alors la suite $(u_n)_n$ est monotone : si $u_0 \leq u_1$ la suite est croissante sinon elle est décroissante.*

Démonstration. On suppose que $u_0 \leq u_1$, montrons par récurrence que la suite u est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la propriété "$u_n \leq u_{n+1}$".

- P_0 est vraie par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. Comme f est croissante on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$. Mais, par définition de la suite $(u_n)_n$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Donc P_{n+1} est vraie.

- Le principe de récurrence permet d'affirmer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq u_{n+1}$, donc la suite est croissante.

On montre de la même façon que si $u_0 \geq u_1$ alors la suite est décroissante. □

☠ **Attention !** Ne pas confondre "la fonction f est croissante" et "la suite u est croissante".

Exemple 3.16. *On considère la suite u définie par récurrence par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$. Ici, on a $f(x) = \sqrt{6+x}$. La fonction f est définie sur $I = [-6, +\infty[$ et pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq 0$, en particulier $f(I) \subset I$. De plus f est continue sur I.*

La fonction f est croissante (strictement) sur I donc la suite u est monotone. De plus on a $u_1 = \sqrt{6+10} = 4 < u_0$ donc la suite u est décroissante. Elle est également minorée (par 0), donc elle converge d'après le Théorème 3.4.

On note l sa limite. Comme f est continue sur I, l vérifie $l = f(l)$. On résout l'équation

$$f(x) = x \iff x = \sqrt{6+x} \implies x^2 = 6 + x.$$

On résout l'équation $x^2 - x - 6 = 0$. Les solutions de cette équation sont -2 et 3. Attention ! ! Cela ne veut pas dire que -2 et 3 sont solutions de $f(x) = x$. En effet, on a raisonné par implication et non par équivalence ! Ce que l'on peut dire à ce niveau c'est que les seules solutions possibles de l'équation $f(x) = x$ sont -2 et 3. On vérifie pour chacune de ces deux valeurs si elle est bien solution de $f(x) = x$. C'est le cas pour 3 mais pas pour -2. Conclusion : l'équation $f(x) = x$ admet 3 pour unique solution, et donc $l = 3$. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 3.

Exemple 3.17. *On reprend l'exemple précédent mais cette fois avec $u_0 = -5$. On a alors cette fois $u_1 = \sqrt{6+(-5)} = 1 > u_0$ donc la suite u est croissante. Soit elle est majorée et elle converge vers la seule solution de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire vers $l = 3$, soit elle n'est pas majorée et alors elle tend vers $+\infty$.*

On va montrer qu'elle est majorée par l. On raisonne par récurrence. Soit P_n la propriété "$u_n \leq l$".

- *P_0 est vraie car $u_0 = -5 < l = 3$. De même P_1 est vraie.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq l$. Comme f est croissante on a $f(u_n) \leq f(l)$ mais $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(l) = l$, donc $u_{n+1} \leq l$. Autrement dit P_{n+1} est vraie.*
- *Le principe de récurrence permet d'affirmer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On a montré que la suite $(u_n)_n$ était croissante et majorée (par l) donc elle converge vers la seule limite possible c'est-à-dire vers $l = 3$.

3.4.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On s'intéresse ici aux suites vérifiant une relation de récurrence de la forme

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

où a et b sont deux nombres réels fixés. On va cherchez à déterminer explicitement u_n en fonction de n.

Pour une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite est entièrement déterminée par son premier terme u_0. Ici la donnée seule de u_0 ne suffit pas, il faut également donner u_1. On peut alors calculer

$$u_2 = au_1 + bu_0,\ u_3 = au_2 + bu_1,\ \ldots$$

Proposition 3.16. *Soient a et b deux nombres réels fixés. L'ensemble E des suites vérifiant la relation de récurrence (3.5) est un espace vectoriel de dimension 2.*

Démonstration. Pour montrer que E est un espace vectoriel, le plus simple est de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites de nombres réels (voir Remarque 3.2). La suite nulle vérifie bien (3.5). Par ailleurs, si $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}(u+\lambda v)_{n+2} &= u_{n+2} + \lambda v_{n+2} = (au_{n+1} + bu_n) + \lambda(av_{n+1} + bv_n) = a(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + b(u_n + \lambda v_n) \\ &= a(u+\lambda v)_{n+1} + b(u+\lambda v)_n.\end{aligned}$$

Cela prouve que la suite $u + \lambda v$ est dans E et donc E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

On va maintenant montrer qu'il est de dimension 2. On considère l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(u) = (u_0, u_1)$: à une suite u on associe le couple formé par ses deux premiers termes. On vérifie facilement que f est linéaire. On va montrer que f est bijective. Puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2 cela prouvera bien que E est de dimension 2 (cf cours d'algèbre linéaire du premier semestre).

Étant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on construit par récurrence la suite u. On pose $u_0 = x$ et $u_1 = y$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $u_0, \ldots, u_{n+1}$ construits. On définit alors $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Par construction la suite u vérifie (3.5) et donc $u \in E$. Par ailleurs $f(u) = (u_0, u_1) = (x, y)$, ce qui prouve que f est surjective.

On montre finalement que f est injective. Soit $u \in E$ tel que $f(u) = (0, 0)$. On montre par récurrence que $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit P_n la proposition "$\forall k \leq n,\ u_k = 0$".

- Puisque $f(u) = (0, 0)$ cela prouve que P_0 et P_1 sont vraies.
- Soit $n \geq 1$ fixé, on suppose que P_n est vraie. On a alors $u_k = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, n$. Pour montrer que P_{n+1} est vraie il reste à montrer que $u_{n+1} = 0$. Or $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} = a \times 0 + b \times 0 = 0$, et donc P_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet d'affirmer que P_n est vraie pour tout n et donc u est la suite nulle. Ainsi $\ker(f) = \{0\}$ et donc f est aussi injective. □

On va maintenant chercher une base de l'espace E. Puisqu'il est de dimension 2 cette base contiendra exactement 2 éléments.

Lemme 3.2. *Soit $q \in \mathbb{C}$. La suite u de terme général $u_n = q^n$ vérifie (3.5) pour tout entier n si et seulement si q est racine du polynôme du second degré $P(X) = X^2 - aX - b$.*

Démonstration. Soit u la suite de terme général $u_n = q^n$. On a

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \iff q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n \iff q^n(q^2 - aq - b) = 0.$$

Si q est racine de P alors $q^2 - aq - b = 0$ et donc $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout n. Réciproquement, si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout n, c'est en particulier vrai pour $n = 0$ et donc $q^2 = aq + b$, c'est-à-dire que q est racine de P. □

Puisque P est un polynôme du second degré à coefficients réels il y a trois cas possibles : deux racines réelles distinctes, une racine réelle double ou bien deux racines complexes conjuguées. Dans ce dernier cas, si on met les deux racines q et $\bar{q}$ sous forme exponentielle $q = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\bar{q} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, on a alors $q^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ et $\bar{q}^n = r^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$. On peut alors facilement vérifier que les deux suites u et v de terme général respectif $u_n = \frac{1}{2}(q^n + \bar{q}^n) = r^n\cos(n\theta)$ et $v_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}(q^n - \bar{q}^n) = r^n\sin(n\theta)$ sont réelles et vérifient également (3.5).

Proposition 3.17. *Soit $P(X) = X^2 - aX - b$.*

1. *Si P possède deux racines réelles distinctes q_1 et q_2 alors les suites u et v de terme général respectif $u_n = q_1^n$ et $v_n = q_2^n$ forment une base de E. Autrement dit, toute suite w vérifiant (3.5) est de la forme $w_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ où α et β sont deux nombres réels que l'on détermine à l'aide de w_0 et w_1.*
2. *Si P possède une racines réelles double q alors les suites u et v de terme général respectif $u_n = q^n$ et $v_n = nq^n$ forment une base de E. Autrement dit, toute suite w vérifiant (3.5) est de la forme $w_n = (\alpha + \beta n)q^n$ où α et β sont deux nombres réels que l'on détermine à l'aide de w_0 et w_1.*
3. *Si P possède deux racines complexes conjuguées $q = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\bar{q} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ alors les suites u et v de terme général respectif $u_n = r^n\cos(n\theta)$ et $v_n = r^n\sin(n\theta)$ forment une base de E. Autrement dit, toute suite w vérifiant (3.5) est de la forme $w_n = r^n(\alpha\cos(\theta n) + \beta\sin(\theta n))$ où α et β sont deux nombres réels que l'on détermine à l'aide de w_0 et w_1.*

Démonstration. Dans chacun des trois cas on commence par vérifier que les deux suites u et v sont dans E. Il reste juste à le faire pour la suite v dans le cas 2., les autres ont déjà été faits ci-dessus. Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$\begin{aligned} v_{n+2} - av_{n+1} - bv_n &= (n+2)q^{n+2} - a(n+1)q^{n+1} - bnq^n \\ &= nq^n(q^2 - aq - b) + q^{n+1}(2q - a). \end{aligned}$$

Le premier terme est nul puisque q est racine de P. Par ailleurs, comme q est racine double de P, d'après le Théorème 2.7 on a $0 = P'(q) = 2q - a$ et donc le second terme est nul également.

Pour montrer que les deux suites u et v forment une base, il suffit de montrer qu'elles forment une famille libre (une famille libre de 2 éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 forme une base). On traite le cas 1., les autres sont similaires et laissés à titre d'exercice. Soient donc λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = 0$, c'est-à-dire tels que $\lambda u_n + \mu v_n = 0$ pour tout entier n. En particulier pour $n = 0$ on obtient $\lambda + \mu = 0$, soit $\mu = -\lambda$, et pour $n = 1$ on obtient

$$\lambda q_1 + \mu q_2 = 0 \iff \lambda(q_1 - q_2) = 0.$$

Puisque q_1 et q_2 sont distinctes on en déduit que $\lambda = 0$ et donc $\mu = -\lambda = 0$, ce qui prouve que la famille (u, v) est bien libre et est donc une base de E. □

Exercice 3.20. Dans les cas 2. et 3. montrer que les suites u et v forment une famille libre.

Exemple 3.18. *On considère la suite de Fibonacci u définie par $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Ses premiers termes sont $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8, \ldots$ On cherche à exprimer u_n en fonction de n. Pour cela on commence par chercher les racines du polynôme $X^2 - X - 1$ (ici $a = b = 1$). On trouve que ce polynôme admet deux racines réelles distinctes $q_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. La proposition précédente nous permet d'affirmer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait*

$$u_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Pour déterminer α et β on utilise u_0 et u_1. On obtient alors le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 & = & u_0 \\ \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 & = & u_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta & = & 1 \\ \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \beta & = & -\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.
Bien que ce ne soit pas évident sur la formule ci-dessus, tous les termes de cette suite sont des nombres entiers. Pourquoi ?

3.5 Suites extraites (Sous-suites)

3.5.1 Suites extraites et convergence

Définition 3.16. *On appelle* extractrice *toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$* strictement croissante.

Définition 3.17. *Étant donnée une suite $(u_n)_n$, on appelle* suite extraite*, ou* sous-suite*, de $(u_n)_n$ toute suite $(u_{\varphi(n)})$ avec φ une extractrice.*

Exemple 3.19. *Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, \ldots)$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_3, u_5, \ldots)$ sont des suites extraites de la suite $(u_n)_n$. Elles correspondent respectivement aux extractrices $\varphi(n) = 2n$ et $\varphi(n) = 2n + 1$.*

☠ **Attention !** L'extractrice φ doit être *strictement* croissante. Par exemple $(u_{n^2-n})_n$ n'est pas une suite extraite de $(u_n)_n$ car $\varphi(n) = n^2 - n$ n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{N}$ (on a $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$).

Remarque 3.23. *Si φ est un extractrice, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n. Si $\varphi(n) = n$ alors φ est l'identité et la suite extraite correspondante est la suite entière.*

Exercice 3.21. Montrer que si φ est une extractrice alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n.

Proposition 3.18. *Si la suite u tend vers l, resp. $\pm\infty$, alors toute suite extraite de u tend vers l, resp. $\pm\infty$.*

Démonstration. On traite le cas où u tend vers $l \in \mathbb{R}$. Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de u. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. On a alors pour tout $n \geq N$, $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$ et donc $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$. Ce qui prouve que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ tend vers l. □

Exercice 3.22. Démontrer la proposition lorsque u tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Corollaire 3.2 (Pour montrer qu'une suite n'a pas de limite)**.** *Soit u une suite. On suppose qu'il existe deux suites extraites v et w de u telles que*

1. $v_n \to a$, $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,
2. $w_n \to b$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,
3. $a \neq b$.

Alors la suite u n'a pas de limite. En particulier elle diverge.

Exemple 3.20. *Montrons que si $r = -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite géométrique de raison r et de premier terme u_0 diverge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = u_0 \times (-1)^n$. Ainsi, pour tout n on a $u_{2n} = u_0$ et $u_{2n+1} = -u_0$. Les deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent respectivement vers u_0 et $-u_0$. Comme $u_0 \neq 0$, ces deux sous-suites ont des limites distinctes, et donc la suite u diverge.*

Exercice 3.23. Montrer que si une suite u a ses deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui convergent vers la même limite l alors la suite u converge vers l.
Solution : Supposons que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - l| < \varepsilon$ et $p \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - l| < \varepsilon$. Soit $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Pour tout $n \geq N$, soit n est pair et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, soit n est impair et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Si n est pair, $n \geq N \geq 2N_1$ entraine que $p \geq N_1$ et donc $|u_n - l| = |u_{2p} - l| < \varepsilon$. Si n est impair, $n \geq N \geq 2N_2 + 1$ entraine que $p \geq N_2$ et donc $|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| < \varepsilon$. On a donc, pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que la suite u tend vers l.

3.5.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 3.8. *[Théorème de Bolzano-Weierstrass] Toute suite réelle bornée possède une suite extraite convergente.*

Il existe plusieurs méthodes pour démontrer ce théorème. On propose ici de le faire à l'aide du théorème des suites monotones. La preuve repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.3. *Toute suite u admet une sous-suite monotone.*

Démonstration du théorème. Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite monotone de u. Puisque u est bornée la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ l'est aussi. Il y a deux possibilités : soit cette suite est croissante et elle est majorée (elle est bornée), soit elle est décroissante et elle est minorée (elle est bornée). Dans les deux cas le Théorème des suites monotones permet d'affirmer que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge. □

Démonstration du lemme. On dit que $m \in \mathbb{N}$ est un pic de la suite u si pour tout $n \geq m$ on a $u_n \leq u_m$ (u_m est plus grand que tous les termes de u qui suivent). Soit la suite u possède une infinité de pics soit elle en a un nombre fini (éventuellement zéro).

- Si u possède une infinité de pics $m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\varphi(n) = m_n$. φ est bien une extractrice et par définition des pics on a $u_{\varphi(n)} \geq u_{\varphi(n+1)}$ pour tout n. Autrement dit la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est décroissante.
- Si u possède un nombre fini de pics. Soit m le plus grand d'entre eux (on prend $m = 0$ si u n'a pas de pics). On pose $\varphi(0) = m + 1$. Comme $m + 1$ n'est pas un pic, il existe $\varphi(1) > m + 1 = \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} > u_{\varphi(0)}$. De même, $\varphi(1)$ n'est pas un pic (les pics sont tous inférieurs à m), il existe donc $\varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(2)} > u_{\varphi(1)}$. On construit ainsi par récurrence $(\varphi(n))_n$ strictement croissante telle que pour tout n on ait $u_{\varphi(n+1)} > u_{\varphi(n)}$. La suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ est donc strictement croissante.

□

Exercice 3.24. Rédiger proprement la récurrence utilisée dans la démonstration ci-dessus.

Ce théorème a surtout un intérêt "théorique". On en donne ici une application à l'un des résultats que vous avez vus au premier semestre et qui concerne les fonctions continues.

Théorème 3.9. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Remarque 3.24. *" f est bornée et atteint ses bornes" signifie que*

1. *f admet une borne inférieure m et une borne supérieure M,*
2. $\exists (x_m, x_M) \in [a, b]^2$, $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$.

Démonstration du Théorème 3.9. Montrons par l'absurde que f est majorée : supposons que f n'est pas majorée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \in [a,b]$ donc la suite $(x_n)_n$ est bornée. D'après le Théorème de Bolzano-Weiertrass il existe une extractrice φ et un réel $c \in [a,b]$ tel que $x_{\varphi(n)} \to c$. De plus la fonction f est continue donc $f(x_{\varphi(n)}) \to f(c)$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n$ donc $f(x_{\varphi(n)}) \to +\infty$. D'où la contradiction.

Montrons maintenant que f atteint sa borne supérieure. Soit $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ (M existe puisque f est bornée). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - 1/n$ n'est pas un majorant de f donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $M - 1/n < f(x_n) \leq M$. On applique à nouveau le Théorème de Bolzano-Weiertrass : la suite $(x_n)_n$ est bornée donc il existe une extractrice φ et un élément $d \in [a,b]$ tel que $x_{\varphi(n)} \to d$. La fonction f est continue donc $f(x_{\varphi(n)}) \to f(d)$. D'autre part, pour tout n on a $M - \frac{1}{n} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)} < f(x_{\varphi(n)}) \leq M$, et donc d'après le théorème des gendarmes $f(x_{\varphi(n)}) \to M$. Par unicité de la limite, on en déduit que $M = f(d)$.

En appliquant le résultat à $-f$, on montre que $-f$ est majorée et atteint sa borne supérieure et donc que f est minorée et atteint sa borne inférieure. □

3.6 Suites de Cauchy

Définition 3.18. *Une suite u est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq N,\ |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

Exercice 3.25. Écrire la négation de la définition d'une suite de Cauchy.

Théorème 3.10. *Une suite de nombres réels est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) : Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon/2$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, $\forall n \geq N, \forall p \geq N$, on a $|u_n - u_p| = |(u_n - l) + (l - u_p) \leq |u_n - l| + |u_p - l| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) : Soit u une suite de Cauchy. La preuve se fait en trois étapes

1. On montre que u est bornée.
2. On montre que u possède une sous-suite convergente. On note l la limite de cette sous-suite.
3. On montre que u tend vers l.

Etape 1. On applique la définition de suite de Cauchy avec $\epsilon = 1$. Il existe donc N tel que quelque soient $n, p \geq N$ on a $|u_n - u_p| < 1$. En particulier, pour $p = N$ on obtient

$$u_N - 1 < u_n < u_N + 1, \quad \forall n \geq N.$$

La suite u est donc bornée à partir du rang N, et elle est donc bornée.

Etape 2. Puisque u est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'affirmer que u possède une sous-suite qui converge. Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une telle sous-suite et l sa limite.

Etape 3. Montrons que u tend vers l. Soit donc $\epsilon > 0$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| < \epsilon$. Comme $u_{\varphi(n)} \to l$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_0$ alors $|u_{\varphi(n)} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, u est de Cauchy donc il existe N_1 tel que si $n, p \geq N_1$ on a $|u_n - u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $N = \max(N_0, N_1)$. Si $n \geq N$ on a alors

$$|u_{\varphi(n)} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et comme $\varphi(n) \geq n \geq N_1$ on a aussi

$$|u_n - u_{\varphi(n)}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement on obtient que si $n \geq N$ alors

$$|u_n - l| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon.$$

□

Remarque 3.25. *Pour montrer qu'une suite diverge, il suffit de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy.*

Exercice 3.26. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente. Indication : montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 3.27. Soit k un réel tel que $0 \leq k < 1$ et soit $(u_n)_n$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k|u_{n+1} - u_n|.$$

a) Démontrer que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ pour tout entier $n \geq 0$.
b) Démontrer que si p et q sont deux entiers tels que $p \geq q \geq 0$ alors

$$|u_p - u_q| \leq k^q \frac{|u_1 - u_0|}{1 - k}.$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy (et donc qu'elle converge).

Chapitre 4

Séries numériques à termes positifs

4.1 Définition, convergence et opérations sur les séries

4.1.1 Définition

Une série (numérique) est essentiellement une “somme infinie” (de nombres). On va bien sûr préciser ce qu'on entend par là, cette idée n'est pas complètement anodine et demande beaucoup de précautions. Commençons par un exemple simple.

Exemple 4.1. *Étant donné $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Lorsque n tend vers l'infini $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 et on a donc envie d'écrire

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Il n'est bien entendu pas question d'effectuer une infinité d'additions et l'exemple ci-dessus suggère de faire une somme de n termes pour ensuite passer à la limite $n \to \infty$. La notion de série est donc intimement liée à celle de limite !

Définition 4.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour tout n, u_n est appelé le terme d'indice n et S_n la somme partielle d'indice n. En d'autre termes la série $\sum u_n$ est la suite des sommes partielles.*

Remarque 4.1. *La définition ci-dessus est assez formelle. Elle ne donne pas de sens précis à la notion de somme infinie ni à la valeur éventuelle de celle-ci.*

Remarque 4.2. *Si la suite $(u_n)_n$ n'est définie que pour $n \geq n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ on définit de façon similaire la série $\sum u_n$ comme la suite $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0}$.*

4.1.2 Nature d'une série

Définition 4.2. *On dit qu'une série $\sum u_n$ converge, ou est convergente, si la suite des sommes partielles converge, c'est-à-dire qu'elle a une* **limite finie***. Dans ce cas $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ est appelé la somme de la série est on écrira*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S. \tag{4.1}$$

Dans le cas contraire on dira que la série diverge, ou est divergente.

Exemple 4.2. *Comme on l'a vu dans l'exemple 4.1 la série de terme général* $u_n = \frac{1}{2^n}$ *converge et sa somme est* $S = 2$*, tandis que la somme partielle d'indice* n *est* $S_n = 2 - \frac{1}{2^n}$*.*

☠ **Attention !** a) L'égalité (4.1) signifie deux choses : la série $\sum u_n$ converge **et** sa somme vaut S. On distinguera bien les notations $\sum u_n$, qui désigne la série elle-même qu'elle converge ou non, et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ qui désigne la somme de la série (ce qui sous-entend que la série converge).

b) On fera bien attention à ne pas confondre la suite $(u_n)_n$ et celle des sommes partielles $(S_n)_n$. En particulier la suite $(u_n)_n$ peut converger mais pas la série. Par exemple, si $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge mais on a $S_n = n + 1$ et donc la série diverge.

Remarque 4.3. *Soit* $\sum u_n$ *une série et* $p \in \mathbb{N}^*$*. Pour tout* $n \geq p$ *on a*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^{n} u_k = S_{p-1} + \sum_{k=p}^{n} u_k. \tag{4.2}$$

On en déduit que la série de terme général $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge si et seulement si la série de terme général* $(u_n)_{n\geq p}$ *converge. On dit qu'elles ont* **même nature**. *Autrement dit, on ne change pas la nature d'une série en lui enlevant un nombre fini de termes.*

De même, on ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes (prouvez-le). Par contre, dans les deux cas leur somme diffère a priori comme le montre (4.2).

Définition 4.3. *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente. On appelle reste d'indice* n *la quantité*

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On a bien sur envie d'écrire que $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, ce qui sous-entend que la série de terme général $(u_k)_{k\geq n+1}$ converge et que sa somme est R_n. C'est effectivement le cas, cela découle directement de la remarque précédente.

Exercice 4.1. *Soit* $q \in \mathbb{R}$*. Calculer la somme partielle d'indice* n *de la série de terme général* q^n*,* $n \geq 0$*. En déduire que cette série converge si et seulement si* $|q| < 1$*. Dans ce cas calculer sa somme ainsi que le reste d'indice* n*.*

Exercice 4.2. *On considère la suite* $(u_n)_{n\geq 2}$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$*. On note* $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ *la somme partielle d'indice* n*.*

a) *Vérifier que pour tout* n *on a* $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$*.*

b) *En déduire une expression simple de* S_n *et déterminer la nature de la série* $\sum u_n$*.*

4.1.3 Opérations sur les séries

Proposition 4.1. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors les séries de terme général* $u_n + v_n$ *et* λu_n *convergent et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Démonstration. Cela découle directement des identités

$$\sum_{k=0}^{n} u_k + v_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

et des points 3. et 4. de la Proposition 3.7. □

Remarque 4.4. *On vérifie facilement que si $u_n = 0$ pour tout n la série $\sum u_n$ converge. La proposition ci-dessus montre que l'ensemble des suites $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n$ converge forme un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites.*

Corollaire 4.1. *Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n + v_n$ diverge.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Si $\sum u_n + v_n$ converge, comme $\sum u_n$ converge on a $\sum(-u_n)$ qui converge aussi et donc $\sum(u_n + v_n) + (-u_n) = \sum v_n$ converge ! □

☠ **Attention !** Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent on ne peut rien dire sur $\sum u_n + v_n$. On évitera en particulier d'écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$

même si on sait que la série $\sum u_n + v_n$ converge, tant que l'on n'aura pas justifié que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent !

Exercice 4.3. *Vérifiez que les séries de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ et $v_n = -1$ divergent mais que la série $\sum u_n + v_n$ converge.*

On termine cette section avec un résultat important.

Théorème 4.1. *Si $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_n$ tend vers 0.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$. On écrit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = S_{n-1} + u_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

La série converge signifie que la suite $(S_n)_n$ converge vers un certain ℓ, et donc on a aussi $S_{n-1} \to \ell$. Ainsi $u_n = S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0$. □

Remarque 4.5. *a) Encore une fois, il faut faire attention à ne pas confondre la suite $(u_n)_n$ avec la série, autrement dit avec la suite des sommes partielles.*

b) On utilise ce théorème surtout comme critère pour montrer qu'une série diverge : il suffit de montrer que le terme général u_n ne tend pas vers 0. On dit alors parfois que la série diverge trivialement. Dans la pratique on commencera toujours par vérifier que $u_n \to 0$. C'est souvent assez facile et cela évite une étude parfois longue (et inutile si u ne tend pas vers 0).

Exemple 4.3. *On considère la série de terme général $u_n = (-1)^n$. La suite $(u_n)_n$ ne tend par vers 0 (elle ne converge pas du tout) donc la série $\sum(-1)^n$ diverge.*

Cette exemple montre qu'il faut faire très attention avec les séries, et ne pas les considérer comme des simples sommes. On ne peut par exemple pas "regrouper" les termes comme on le fait pour une somme finie. On écrirait sinon :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0,$$

mais aussi

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots = u_0 + (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1!!!$$

Ici on peut en fait calculer simplement les sommes partielles S_n et on observe que $S_n = 1$ si n est pair tandis $S_n = 0$ si n est impair, ce qui confirme que la série diverge.

☠ **Attention !** La réciproque de ce théorème est **fausse**. Le fait que la suite $(u_n)_n$ tende vers 0 est une condition **nécessaire** pour que la série converge mais elle n'est **pas suffisante**, voir l'Exemple 4.4 ci-dessous.

Exemple 4.4. *On considère la série de terme général* $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$*, définie pour* $n \geq 1$*. On a bien* $u_n \to 0$*. Calculons maintenant la somme partielle de la série :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) = \ln(n+1).$$

On en déduit que $S_n \to +\infty$ *et donc la série diverge.*

4.2 Convergence des séries à termes positifs

Étant donnée une série $\sum u_n$, les deux (premières) questions auxquelles on souhaite répondre sont : la série converge-t-elle ? si oui, quelle est sa somme ? Même si une série n'est en fait rien d'autre qu'une suite, la suite des sommes partielles, on n'a en général pas d'expression simple pour ces dernières sauf dans des cas très particuliers. Il n'est donc pas toujours si simple de déterminer la nature d'une série puis de calculer éventuellement sa somme.

Cette dernière section donne une première approche quant à la question de la nature d'une série dans le cas particulier, mais cependant très important, des séries dites **à termes positifs**. Vous verrez en L2 les séries à termes quelconques (et même des séries de fonctions). La question de la valeur de la somme d'une série convergente est encore plus difficile, encore une fois vous en aurez un premier aperçu en L2.

Dans toute la suite, $(u_n)_n$ désignera une suite de nombres **positifs :** $u_n \geq 0$ **pour tout** n**.**

4.2.1 Théorème de comparaison

Le fait que les séries à termes positifs soient plus simples à étudier provient de la propriété (évidente) suivante.

Proposition 4.2. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. Alors la suite* $(S_n)_n$ *des sommes partielles est croissante.*

Démonstration. Il suffit d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geq 0.$$

□

On en déduit immédiatement

Théorème 4.2. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée, i.e. il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

Dans ce cas, sa somme est égale à la borne supérieure de $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$*.*

Démonstration. D'après la proposition précédente la suite $(S_n)_n$ est croissante et donc le résultat découle directement des Théorèmes 3.4 et 3.5. □

Remarque 4.6. *Si la suite* $(S_n)_n$ *n'est pas majorée elle tend vers* $+\infty$*.*

☠ **Attention !** Il est indispensable d'avoir une série à termes positifs comme le prouve l'Exemple 4.3.

Ce théorème permet d'obtenir le premier résultat dit de comparaison sur les séries à termes positifs.

Théorème 4.3. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. On suppose de plus que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* n*.*

1. *Si la série* $\sum v_n$ *converge alors la série* $\sum u_n$ *converge. On a alors* $0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$*.*

2. *Si la série $\sum u_n$ diverge alors la série $\sum v_n$ diverge.*

Démonstration. On peut remarquer que 2. est la contraposée de 1., il suffit donc de montrer 1. On suppose donc que $\sum v_n$ converge, et notons T sa somme. Comme c'est une série à termes positifs, d'après le Théorème 4.2, la suite de ses sommes partielles $(T_n)_n$ de $(v_n)_n$ est majorée et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sup\{T_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_k \leq v_k$, en sommant terme à terme ces inégalités on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq S_n \leq T_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

On en déduit que la suite $(S_n)_n$ est majorée et donc, toujours d'après le Théorème 4.2, la série $\sum u_n$ converge. Par ailleurs, puisque $0 \leq S_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ pour tout n, on a bien, par passage à la limite dans les inégalités

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

□

Remarque 4.7. *Le théorème est relativement simple en apparence. Étant donnée une série $\sum u_n$ à étudier, tout la difficulté dans la pratique est de savoir à quelle autre série la comparer.*

Exemple 4.5. *Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \frac{1}{n}$. On voudrait déterminer la nature de $\sum v_n$. On vérifie d'abord que $v_n \to 0$ sinon la série diverge. On va utiliser pour cela le théorème précédent en comparant v_n à la suite $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On a vu dans l'Exemple 4.4 que la série $\sum u_n$ divergeait. On peut facilement vérifier que u_n et v_n sont bien positifs. On va montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \leq v_n$. D'après le 2. du théorème on en déduira que la série $\sum v_n$ diverge.*

Soit $f(x) = x - \ln(1+x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est dérivable et on a $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$. La fonction f est donc croissante et on a donc, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$ et donc $\ln(1+x) \leq x$. En prenant $x = \frac{1}{n}$ on en déduit bien que $u_n \leq v_n$ et donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
Remarque : ce résultat est montré d'une autre manière dans l'Exercice 3.26.

☠ **Attention !** Dans l'exemple précédent il est très simple (presque évident) de voir que les séries considérées sont bien à termes positifs. Il faut cependant toujours s'en assurer et surtout **le dire**. Cela vous évitera d'appliquer le théorème à la va-vite et donc de l'appliquer à tort.

Remarque 4.8. *Le théorème reste vrai si on a $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, i.e. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. On a par contre dans ce cas*

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n.$$

Exercice 4.4. *On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. En comparant $\frac{1}{n^2}$ à $\frac{1}{n(n-1)}$ montrer que cette série converge et donnant un majorant de sa somme (on pourra utiliser l'exercie 4.2).*

4.2.2 Séries de termes généraux équivalents

L'inconvénient du théorème de comparaison précédent est que souvent il demande une intuition du résultat : vais-je essayer de prouver que la série $\sum u_n$ converge ou diverge. Dans le premier cas on chercherait à majorer u_n (par une série convergente) et dans le second à minorer u_n (cette fois par une série divergente). On va voir ici un second théorème de comparaison beaucoup plus intéressant dans le sens où les deux séries comparées auront nécessairement la même nature : soit elles convergent toutes les deux soit elles divergent toutes les deux. Ce théorème repose sur la notion importante de suites équivalentes.

Définition 4.4. *Deux suite $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites équivalentes s'il existe une suite $(\epsilon_n)_n$ telle que*

1. *$\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$, $u_n = \epsilon_n v_n$,*

2. $\epsilon_n \to 1$.

On notera $u_n \sim v_n$.

Remarque 4.9. *Si la suite* $(v_n)_n$ *ne s'annule pas, tout du moins à partir d'un certain rang, on a nécessairement* $\epsilon_n = \frac{u_n}{v_n}$ *et donc dire que* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont équivalentes revient à dire que la suite* $\frac{u_n}{v_n}$ *tend vers* 1.

Si c'est $(u_n)_n$ *qui ne s'annule pas, encore une fois au moins à partir d'un certain rang, alors d'après 1.* ϵ_n *ne peut s'annuler pour* $n \geq n_0$ *et on peut donc écrire* $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\epsilon_n} \to 1$.

La définition ci-dessus est faite pour s'appliquer au cas où on ne sait pas si les suites u et v ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. Dans la pratique il est souvent facile de voir si l'une des deux ne s'annule pas et pour déterminer si deux suites sont équivalentes on cherchera juste à voir si leur quotient tend vers 1.

Exemple 4.6. *On peut vérifier que les suites de terme général* $\dfrac{n+\ln(n)}{n^3+1}$ *et* $\dfrac{1}{n^2}$ *son équivalentes. De même, les suites de terme général* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *et* $\dfrac{1}{n}$ *sont équivalentes.*

☠ **Attention !** Dire que deux suites sont équivalentes ne veut pas dire qu'elles sont égales ! Bien sur, deux suites égales sont équivalentes (pourquoi ?) mais la réciproque est fausse. On fera donc bien attention à ne pas confondre $u_n \sim v_n$ et $u_n = v_n$. En particulier, les règles que vous avez l'habitude d'utiliser pour l'addition **ne s'appliquent pas** aux équivalents ! Par exemple, $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ n'impliquent pas que $u_n + v_n \sim w_n + x_n$ (voir l'Exercice ci-dessous).

Exercice 4.5. *On considère les suites de terme général* $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$, $w_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ *et* $x_n = -\frac{1}{n}$.

a) *Montrer que* $u_n \sim w_n$ *et que* $v_n \sim x_n$.

b) *Montrer que les suites de terme général* $u_n + v_n$ *et* $w_n + x_n$ *ne sont pas équivalentes.*

La seule propriété valable sur les équivalents concerne le produit.

Proposition 4.3. *Soient u, v, w et x des suites telles que* $u_n \sim w_n$ *et* $v_n \sim x_n$. *Alors* $u_n v_n \sim w_n x_n$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $(\epsilon_n)_n$ et $(\eta_n)_n$ telles que $u_n = \epsilon_n w_n$ et $v_n = \eta_n x_n$ avec $\lim \epsilon_n = \lim \eta_n = 1$. On a donc

$$u_n v_n = \epsilon_n \eta_n \times w_n x_n,$$

avec $\epsilon_n \eta_n \to 1$, ce qui prouve que $u_n v_n \sim w_n x_n$. □

Une des applications importantes de la notion de suites équivalentes est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.4. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes* **positifs**. *Si* $u_n \sim v_n$ *alors les deux séries ont la même nature, c'est-à-dire que soient elles divergent toutes les deux soit elles convergent toutes les deux.*

Démonstration. On va montrer que si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ aussi. La réciproque se fait en intervertissant les rôles de u_n et v_n. Supposons donc que $\sum v_n$ converge. On sait que $u_n \sim v_n$. Soit donc $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\epsilon_n)_n$ tels que $u_n = v_n \epsilon_n$, pour $n \geq n_0$. Comme $\epsilon_n \to 1$ la suite $(\epsilon_n)_n$ est bornée. En particulier il existe M tel que $\epsilon_n \leq M$ pour tout n, et puisque $v_n \geq 0$ on a

$$u_n \leq M v_n.$$

La série $\sum M v_n$ converge d'après la Proposition 4.1 et donc la série $\sum u_n$ aussi d'après le Théorème 4.3. □

☠ **Attention !** Comme pour le Théorème 4.3 on insiste sur le fait que le résultat n'est vrai que pour des séries à termes positifs. Cependant là encore il suffit qu'elles le soient à partir d'un certain rang (moralement cela vient du fait qu'on ne change pas la nature d'une série si on modifie un nombre fini de ses termes).

Remarque 4.10. *Si on a montré que* $u_n \sim v_n$ *il suffit de montrer que l'une des deux est à termes positifs à partir d'un certain rang, c'est alors automatiquement le cas de l'autre.*

En effet, supposons que $v_n \geq 0$ *pour* $n \geq n_0$. *Par ailleurs* $u_n = \epsilon_n v_n$ *et* $\epsilon_n \to 1$. *D'après la Proposition 3.8, il existe donc* n_1 *tel que* $\epsilon_n \geq \frac{1}{2}$ *pour tout* $n \geq n_1$. *On a alors pour tout* $n \geq \max(n_0, n_1)$

$$u_n = \epsilon_n v_n \geq 0.$$

Remarque 4.11. *Dans le cas où les deux séries convergent, ce théorème ne dit rien sur la valeur de leur somme. Elles n'ont a priori rien à voir l'une avec l'autre. On peut cependant montrer le résultat suivant :*

Si $u_n \sim v_n$ et sont à termes positifs. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes les deux et dans ce cas leur reste respectif R_n et R'_n sont équivalents, i.e. $R_n \sim R'_n$, soit les deux séries divergent et dans ce cas leur somme partielle S_n et T_n sont équivalentes, i.e. $S_n \sim T_n$.

Dans la pratique on va chercher un équivalent "simple" pour lequel on connait la nature de la série. Un moyen de trouver un tel équivalent est d'utiliser les développements limités.

Exemple 4.7. *On souhaiterait déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$. On commence par vérifier qu'on a bien $u_n \to 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $u_n \geq 0$. On va chercher un équivalent simple de u_n. Ce qui semble "compliqué" ici c'est le sinus. On remarque que le terme à l'intérieur du sinus tend vers 0, on va donc chercher à faire un DL de sinus en 0. On a*

$$\sin(x) = x + x\epsilon(x), \qquad \epsilon(x) \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

En particulier $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(1+\epsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. On en déduit que $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, d'où $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ et donc, voir l'Exercice 4.4, que la série $\sum u_n$ converge.

4.2.3 Séries de Riemann

Les théorèmes de comparaison et d'utilisation des équivalents nécessitent de connaitre déjà la nature de la série à laquelle on compare. Plus on aura de séries de "référence" auxquelles on pourra se ramener, plus ces théorèmes seront utiles. Nous avons vu les séries du type $\sum q^n$, $q \in \mathbb{R}$, dites séries géométriques. Nous allons voir ici les séries du type $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, appelées séries de Riemann et dont les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ que nous avons déjà rencontrées sont un cas particulier, avec $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ respectivement.

Théorème 4.5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Si $\alpha \leq 0$ alors $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge trivialement. Dans la suite on se restreint donc à $\alpha > 0$. On va montrer le résultat en comparant la série avec une intégrale.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. En particulier on a $u_n = f(n)$. La fonction f est strictement décroissante. Pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [k, k+1]$ on peut donc écrire

$$u_{k+1} \leq f(x) \leq u_k.$$

et on en déduit que

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq u_k.$$

(On rappelle que si pour tout $x \in [a, b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$. Faites un dessin pour vous en convaincre.) En sommant ensuite cette inégalité pour k allant de 1 à n, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n+1} u_j = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \\ \iff \qquad S_{n+1} - u_1 \ \leq \ \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \ \leq \ S_n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

On calcule ensuite facilement l'intégrale : une primitive de $f(x) = x^{-\alpha}$ est $\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$ si $\alpha \neq 1$ et $\ln(x)$ si $\alpha = 1$. On en déduit que

$$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(n+1) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On a maintenant deux cas :

- Si $\alpha > 1$ alors $1 - \alpha < 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}$. De l'inégalité de gauche de (4.3) on en déduit que $(S_n)_n$ est majorée (sinon elle tend vers $+\infty$, voir la Remarque 4.6) et donc la série converge.

- Si $\alpha \leq 1$ alors $1-\alpha \geq 0$ et on a donc $\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$. On déduit cette fois de l'inégalité de droite de (4.3) que la suite $S_n \to +\infty$ et donc la série diverge.

$\square$

Exercice 4.6. *En utilisant le Théorème 4.3 et les résultats sur les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$, démontrez directement que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha \geq 2$ et diverge si $\alpha \leq 1$.*

4.2.4 Règles de D'Alembert et Cauchy

On termine ce chapitre avec deux autres critères permettant d'étudier la convergence des séries à termes positifs. Ces deux critères sont en fait des conséquences de la comparaison avec des séries géométriques mais permettent de simplifier cette étude (il n'est pas évident de savoir à quelle série géométrique comparer).

Proposition 4.4 (Règle de D'Alembert). *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $(u_n)_n$ est non nulle à partir d'un certain rang. On suppose de plus que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$.*

- *Si $\ell < 1$ alors la série converge.*
- *Si $\ell > 1$ alors la série diverge.*
- *Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure.*

Remarque 4.12. *Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est défini ssi $u_n \neq 0$, et donc au moins à partir d'un certain rang. Cela a donc un sens de regarder sa limite.*

Remarque 4.13. *Dans le cas $\ell = 1$, dire qu'on ne peut pas conclure signifie qu'il y a des cas où la série converge et d'autres où la série diverge. Par exemple, si $u_n = \frac{1}{n}$ on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+n^{-1}} \to 1$$

et on a vu que la série divergeait, tandis que si $u_n = \frac{1}{n^2}$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+n^{-1})^2} \to 1$$

et on a vu que la série convergeait. Cela ne veut pas dire qu'on ne pourra pas étudier la nature de la série, mais simplement que la règle de D'Alembert ne permet pas de décider.

Démonstration. Supposons que $\ell < 1$ (on a évidemment $\ell \geq 0$ puisque u_n est à termes positifs). On a alors $\ell < \frac{1+\ell}{2}$ et donc, d'après la Proposition 3.8, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1+\ell}{2}.$$

On montre alors facilement par récurrence (faites-le) que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$u_n \leq u_{n_0} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-n_0} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n.$$

Puisque $0 \leq \frac{1+\ell}{2} < 1$, la série géométrique de terme général $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ converge et donc la série $\sum u_n$ aussi d'après le Théorème 4.3.

On considère maintenant le cas $\ell > 1$. En raisonnant comme ci-dessus on montre cette fois qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1+\ell}{2},$$

et donc

$$u_n \geq u_{n_0} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-n_0} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n. \tag{4.4}$$

Comme $\frac{1+\ell}{2} > 1$, la série géométrique de terme général $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ divverge et donc la série $\sum u_n$ aussi d'après le Théorème 4.3. En fait ici, (4.4) montre que $u_n \to +\infty$ et donc la série diverge trivialement. $\square$

Exemple 4.8. *On veut déterminer la nature de la série* $\sum u_n$ *où* $u_n = \frac{1}{n!}$ *(on a en fait déjà montré qu'elle convergeait dans l'Exemple 3.13). On vérife que* $u_n \geq 0$ *et ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On calcule ensuite*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

On a $0 < 1$ *donc la série converge.*

Proposition 4.5 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. On suppose que* $u_n^{1/n} \to \ell$ *où* $\ell \in \mathbb{R}$ *ou* $\ell = +\infty$*.*

- *Si* $\ell < 1$ *alors la série converge.*
- *Si* $\ell > 1$ *alors la série diverge.*
- *Si* $\ell = 1$ *on ne peut pas conclure.*

Remarque 4.14. *Ici encore, dans le cas* $\ell = 1$*, dire qu'on ne peut pas conclure signifie qu'il y a des cas où la série converge et d'autres où la série diverge et qu'il faudra faire autre chose pour décider dans quel cas on se trouve.*

Démonstration. L'idée de la preuve est similaire à celle de la Règle de D'Alembert. Supposons d'abord que $\ell < 1$ (ici encore on a évidemment $\ell \geq 0$). On a alors $\ell < \frac{1+\ell}{2}$ et donc, d'après la Proposition 3.8, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$u_n^{1/n} < \frac{1+\ell}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n.$$

Puisque $0 \leq \frac{1+\ell}{2} < 1$, la série géométrique de terme général $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ converge et donc la série $\sum u_n$ aussi d'après le Théorème 4.3.

Si maintenant $\ell > 1$ on a $\ell > 1$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$

$$u_n^{1/n} > \frac{1+\ell}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n. \tag{4.5}$$

Comme $\frac{1+\ell}{2} > 1$, la série géométrique de terme général $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ divverge et donc la série $\sum u_n$ aussi d'après le Théorème 4.3. À nouveau ici, (4.5) montre que $u_n \to +\infty$ et donc la série diverge trivialement. □

Annexe A

Alphabet grec

majuscule	minuscule	nom	majuscule	minuscule	nom
A	α	alpha	B	β	beta
Γ	γ	gamma	Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	epsilon	Z	ζ	zeta
H	η	eta	Θ	θ, ϑ	thêta
I	ι	iota	K	κ	kappa
Λ	λ	lambda	M	μ	mu
N	ν	nu	Ξ	ξ	xi
O	o	omicron	Π	π, ϖ	pi
P	ρ, ϱ	rhô	Σ	σ, ς	sigma
T	τ	tau	Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ, φ	phi	X	χ	chi
Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega

Annexe B

Notations

- $a \in A$: l'élément a appartient à l'ensemble A.
- $a \notin A$: l'élément a n'appartient pas à l'ensemble A.
- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: somme pour k allant de p à n (k entier).

  Exemple : $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.
- $\displaystyle\prod_{k=p}^{n}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: produit pour k allant de p à n (k entier).

  Exemple : $\displaystyle\prod_{k=2}^{5} k^2 = 2^2 \times 3^2 \times 4^2 \times 5^2$.
- $n!$, $n \in \mathbb{N}$: factorielle n. On a $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ si $n \geq 1$, et par convention $0! = 1$.
- $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: coefficients binomiaux. C'est le nombre de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

  On trouve parfois la notation C_n^p.
- $E(x)$: la partie entière de x. C'est le plus grand entier relatif tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

- resp. : respectivement.
- ssi : si et seulement si.
- i.e. : id est, qui signifie c'est-à-dire.

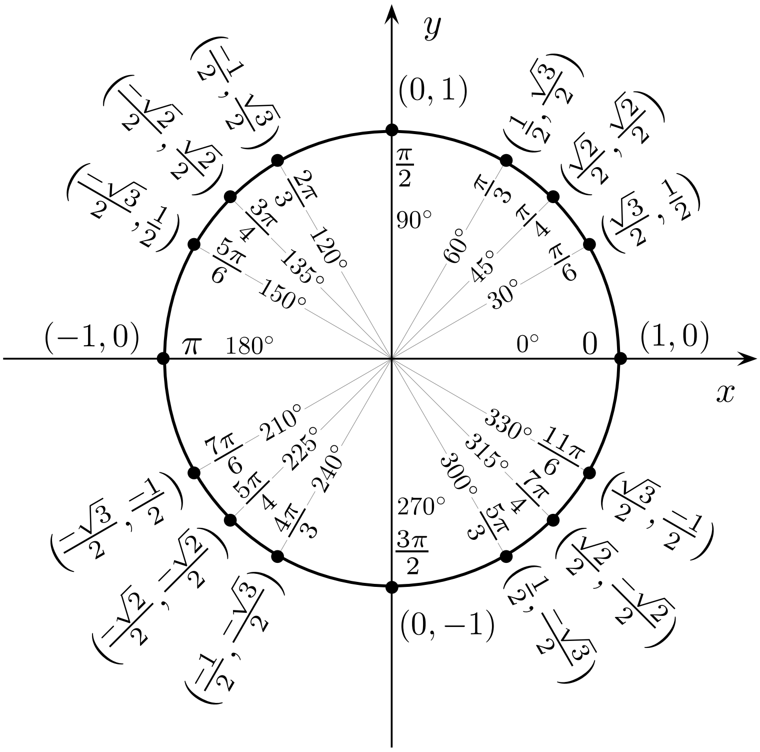
Annexe C

Trigonométrie circulaire

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$
$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{1}{\cot(a)}$$
$$1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$$
$$1 + \cot^2(a) = \frac{1}{\sin^2(a)}$$
$$\sin(-a) = -\sin(a)$$
$$\cos(-a) = \cos(a)$$
$$\tan(-a) = -\tan(a)$$
$$\sin(\pi - a) = \sin(a)$$
$$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$$
$$\tan(\pi - a) = -\tan(a)$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$$
$$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$$
$$\tan(\pi + a) = \tan(a)$$
$$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$$
$$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$$
$$\tan(\pi/2 - a) = 1/\tan(a)$$
$$\sin(\pi/2 + a) = \cos(a)$$
$$\cos(\pi/2 + a) = -\sin(a)$$
$$\tan(\pi/2 + a) = -1/\tan(a)$$
$$\sin(3\pi/2 - a) = -\cos(a)$$
$$\cos(3\pi/2 - a) = -\sin(a)$$
$$\tan(3\pi/2 - a) = 1/\tan(a)$$
$$\sin(3\pi/2 + a) = -\cos(a)$$
$$\cos(3\pi/2 + a) = \sin(a)$$
$$\tan(3\pi/2 + a) = -1/\tan(a)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin((p + q)/2)\cos((p - q)/2)$$
$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin((p - q)/2)\cos((p + q)/2)$$
$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos((p + q)/2)\cos((p - q)/2)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin((p + q)/2)\sin((p - q)/2)$$
$$\tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p + q)}{\cos(p)\cos(q)}$$
$$\tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p - q)}{\cos(p)\cos(q)}$$
$$\sin(a)\sin(b) = (1/2)(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$
$$\cos(a)\cos(b) = (1/2)(\cos(a + b) + \cos(a - b))$$
$$\sin(a)\cos(b) = (1/2)(\sin(a + b) + \sin(a - b))$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = 2\frac{\tan(a)}{1 + \tan^2(a)}$$
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\tan(2a) = 2\frac{\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$
$$\sin^2(a) = (1 - \cos(2a))/2$$
$$\cos^2(a) = (1 + \cos(2a))/2$$
$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$
$$\tan(a) = \frac{\sin(2a)}{1 + \cos(2a)} = \frac{1 - \cos(2a)}{\sin(2a)}$$

$\sin(a) = \sin(b) \Rightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$
$\cos(a) = \cos(b) \Rightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$
$\tan(a) = \tan(b) \Rightarrow a = b + k\pi$
$$t = \tan(\frac{a}{2}) \Rightarrow \sin(a) = \frac{2t}{1 + t^2},\ \cos(a) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},\ \tan(a) = \frac{2t}{1 - t^2}$$



Angle	**Cosinus**	**Sinus**	**Tangente**
0	1	0	0
π	-1	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1	X
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$