L1 MPI
2011/2012
S1 Mathématiques

TD n^{o}1: Formalisme mathématique et nombres réels

Exercice 1. Montrer les identités suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Rappel : si $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ et par convention $0! = 1$.

Exercice 4. Démontrer que pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel n on a

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

En déduire que pour tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 5. On rappelle que $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ on a

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

b) Démontrer la formule du binôme de Newton (raisonner par récurrence sur n)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 6. Montrer les inégalités suivantes, pour tout x, y, z réels :

a) Pour $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$,

b) $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$,

c) $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$,

d) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$, et étudier le(s) cas d'égalité.

Exercice 8. Dans chacun des cas, la proposition B est-elle une condition suffisante (CS), une condition nécessaire (CN) ou une condition nécessaire et suffisante (CNS) de la proposition A?

a) A : "$x^2 \geq x$" et B : "$x \geq 1$"
b) A : "n impair" et B : "n^2 impair"
c) A : "$\forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$" et B : "$x \geq 10^{10}$"
d) A : "$x \in [1,3]$" et B : "$x \in [1,4]$"

Exercice 9. En utilisant des tables de vérité, montrer que
a) (non (A ou B)) $\Leftrightarrow$ (non A et non B),
b) (non (A et B)) $\Leftrightarrow$ (non A ou non B),
c) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A))$,
d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non A ou B).
e) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non $B \Rightarrow$ non A).

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.

Exercice 11. Écrire la négation de $a \leq b \leq c$ et celle de $a = b = c$.

Exercice 12. Prendre la négation des phrases suivantes:
a) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n + 1$.
b) $\forall a \in A$, $\exists b \in B, a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1$.
c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| < \alpha \Longrightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon$.

Exercice 13. Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.
a) $\forall i \in \{1,2,3\}, \exists a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$.
b) $\exists i \in \{1,2,3\}, \forall a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1$.
c) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\},\ f_i(a) = 1$.
d) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,2,3\},\ f_i(a) = 1$.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
a) $3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4$.
b) $\frac{3x+4}{4x+2} = x$.
c) $x = \sqrt{2x+3}$.
d) $\frac{2x+1}{3x-4} = \frac{x+1}{x-1}$.
e) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$.

Exercice 15. On suppose que $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ vérifient $|x - a| < |a|$. Montrer qu'alors x est non nul et de même signe que a.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :
a) $2x^2 - 3x + 4 < 4x^2 + 2x + 9$,
b) $2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0$,
c) $\dfrac{2x+1}{3x+2} < 0$,
d) $\dfrac{1}{x} > x$,
e) $\dfrac{1}{x^2-1} < \dfrac{1}{x}$,
f) $|x+1| < 0.1$,
g) $|x-2| > 10$,
h) $|x| < |x+1|$,
i) $||x+3| - 1| \leq 2$,
j) $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 3$,
k) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$,
l) $|2x - 1| < |x - 1|$,
m) $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \leq 4$,
n) $\sqrt{x-1} > 2 - \sqrt{x}$.

Exercice 17. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq x < 3$ et $-1 < y \leq 1$. Donner des encadrements de $x + y$, xy, $\frac{1}{x}$, et $\frac{x}{y}$.

Exercice 18. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $E(x)$ désigne la partie entière de x.
a) Montrer que $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.
b) Montrer que $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$.

Exercice 19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

En déduire la valeur de $E\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10000}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ (où $E(.)$ désigne la partie entière).

Exercice 20. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 21. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\dfrac{2x+5}{x+2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est.

Exercice 22. Soient a_1, a_2 dans $\mathbb{R}$ et r_1 et r_2 strictement positifs. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - a_1| \leq r_1$ et $|y - a_2| \leq r_2$. Montrer que $|xy - a_1a_2| \leq r_1r_2 + |a_2|r_1 + |a_2|r_1$.

Exercice 23. Placer les symboles $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ qui conviennent entre les propositions et écrire les contraposées des implications.
a) A : "$x \leq 0$" et B : "$x < 0$".
b) A : "$|x - x_0| < \alpha$" et B : "$x < x_0 + \alpha$".
c) A : "$\forall x$, x vérifie la propriété P" et B : "$\exists x$, x vérifie la propriété P".
d) A : "$C \cap D = C$" et B : "$C \subset D$".
e) A : "$C \cup D = C$" et B : "$D \subset C$".

Exercice 24. On considère un nombre réel $x \geq 0$ et les deux propositions A : "Pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$" et B : "$x = 0$". Montrer que $A \Rightarrow B$.

Exercice 25. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Exercice 26. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres positifs. Montrer que si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ alors $\forall i\ a_i = 0$.

Exercice 27. Montrer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ ou $x^2 < 2$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x \geq 0$.

Exercice 28. Écrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs (on pourra utiliser la notation $a|b$ pour signifier que l'entier a divise l'entier b). Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.
a) Tout entier naturel divisible par 6 est divisible par 3.
b) Tout entier naturel divisible par 2 et 3 est divisible par 6.
c) Tout entier naturel divisible par 2 et 14 est divisible par 28.

Exercice 29. Montrer
a) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [1, 3], |x - 2| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 4| < \epsilon$.
b) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 2| < \alpha \Rightarrow |x^2 - 4| < \epsilon$.

Exercice 30. On considère trois ensembles A, B, C. Montrer que
a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
e) $(A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$.

Exercice 31. Soient $A, B \subset E$, $C, D \subset F$, et f une application de E dans F. Montrer que
a) $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$.
b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
d) $(C \subset D) \Rightarrow (f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D))$.
e) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 32. Soit E un ensemble. Pour A une partie de E, on note 1_A la *fonction indicatrice* (ou caractéristique) de l'ensemble A définie par

$$1_A : E \to \{0,1\}, \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A, \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

a) On prend $E = \mathbb{R}$. Donner le graphe de $1_{[0,1]}$ et $1_{[0,1]\cup[2,3]}$.

b) Montrer que si $A \subset B$ alors $1_A \leq 1_B$.

c) Montrer que $1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B$

d) Déterminer une relation entre $1_{A\cup B}$, 1_A et 1_B

e) Que peut-on dire de $1_{A\cup B\cup C}$?

Exercice 33. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$. Montrer que $E =]0,1]$.

Exercice 34.

a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des entiers pairs.

c) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

d) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

e) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

f) Déterminer une bijection de $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$.

g) Déduire de l'exemple précédent une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.

Exercice 35.

a) Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+5$ est bijective. Calculer f^{-1}.

b) Montrer que $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x,x') \mapsto (x+x', x-x')$ est bijective. Calculer f^{-1}.