Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
L1 MPI - S1

Cours de Mathématiques 1

Table des matières

Chapitre 1

Un peu de formalisme mathématique

1.1 Rudiments de logique

1.1.1 Connecteurs logiques

Une proposition est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux). En mathématique, on part d'un petit nombre de propositions que l'on suppose vraies (les axiomes) et l'on essaie d'étendre le nombre d'énoncés vrais au moyen de démonstrations. Pour cela on utilise des règles de logique.

À partir de deux propositions quelconques A et B, on en fabrique de nouvelles dont on définit la valeur logique en fonction des valeurs logiques de A et de B. Une table de vérité résume cela :

A	B	non A	non B	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V

La phrase ($A \Rightarrow B$) se lit "A implique B", ou encore "Si A, alors B", et la phrase ($A \Leftrightarrow B$) se lit "A est équivalent à B". Ce sont aussi des propositions qui peuvent être vraies ou fausses.

Attention ! L'évaluation des nouvelles propositions en fonction de la valeur des anciennes paraît naturelle sauf pour l'implication : si A est fausse, alors l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, peu importe que B soit vraie ou fausse ! Lorsque l'on dit "Si A alors B", on sous-entend "Si A est vraie, alors B est vraie", mais cela ne dit rien lorsque A est fausse. Par exemple, $(x+1)^2 = x^2 + 2x \Rightarrow 1 = 0$ est vraie. Cela signifie que l'implication est vraie, pas que les propositions $(x+1)^2 = x^2 + 2x$ et $1 = 0$ sont vraies ! De la même façon, l'équivalence $(x+1)^2 = x^2 + 2x \Leftrightarrow 7 = 0$ est vraie...

Exemple 1.1. *On considère les propositions A : "Demain il va pleuvoir", et B : "Demain j'irai au cinéma". La proposition $A \Rightarrow B$ s'écrit alors "Si demain il pleut, alors j'irai au cinéma". Dans quel(s) cas pourrez-vous dire que j'ai menti ? Comparez avec la table de vérité de $A \Rightarrow B$.*

Exercice 1.1. En utilisant des tables de vérité, montrer que
- (non (A ou B)) $\Leftrightarrow$ (non A et non B),
- (non (A et B)) $\Leftrightarrow$ (non A ou non B),
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A))$,
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non A ou B).
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ (non $B \Rightarrow$ non A).

Exercice 1.2. Écrire la négation de $a \leq b \leq c$ et celle de $a = b = c$.

Attention ! Attention aux parenthèses. Les phrases "($A \Rightarrow B$) et C" et "$A \Rightarrow$ (B et C)" ne signifient pas la même chose. La phrase "$A \Rightarrow B$ et C" est ainsi ambigüe.

Exercice 1.3. Vérifiez que $(A \Rightarrow B)$ et C et $A \Rightarrow (B$ et $C)$ ne signifient pas la même chose à l'aide d'une table de vérité.

☠ **Attention !** Le contraire (ou la négation) de $A \Rightarrow B$ est (A et non B), et en aucun cas l'implication $B \Rightarrow A$. Cette dernière s'appelle l'implication *réciproque* de $A \Rightarrow B$.

On utilise en mathématique l'implication pour obtenir de nouveaux résultats. Si l'on sait qu'un résultat A est vrai et si l'on montre que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, alors d'après la table de vérité, on en déduit que la proposition B est vraie, ce qui étend les résultats mathématiques.

1.1.2 Conditions nécessaires et suffisantes

- On dit que B est une *condition nécessaire* de A si "pour que A soit vrai, il *faut* que B soit vrai". Autrement dit, si B est faux alors A est faux : (non $B \Rightarrow$ non A) $\Longleftrightarrow \boxed{A \Rightarrow B}$.
- On dit que B est une *condition suffisante* de A si "pour que A soit vrai, il *suffit* que B soit vrai". Autrement dit, si B est vrai alors A est vrai : $\boxed{B \Rightarrow A}$.
- On dit que B est une *condition nécessaire et suffisante* de A si "pour que A soit vrai, *il faut et il suffit* que B soit vrai". Autrement dit, si B est faux alors A est faux, et si B est vrai alors A est vrai : $\boxed{A \Leftrightarrow B}$.

1.1.3 Quantificateurs

Définition 1.2. *Un* ensemble *E est une collection d'objets appelés* éléments*. On note $x \in E$ si l'objet x est un élément de E.*

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un objet x d'un ensemble E. On note :
- $\forall x \in E,\ P(x)$ lorsque la proposition $P(x)$ est vraie *pour tous les éléments* x de l'ensemble E,
- $\exists x \in E,\ P(x)$ lorsqu'*il existe au moins un élément* x de l'ensemble E pour lequel la proposition est vraie.

Exemple 1.3. *On considère l'ensemble E des habitants du Val d'Oise, et pour un habitant x on appelle $P(x)$ la proposition "l'habitant x habite Cergy". La proposition $(\forall x \in E,\ P(x))$ est fausse mais la proposition $(\exists x \in E,\ P(x))$ est vraie.*

Remarque 1.4. *Lorsqu'on écrit "$\exists x \in E,\ P(x)$", il peut y avoir plusieurs éléments x de l'ensemble E pour lesquels la proposition $P(x)$ est vraie. Si on veut préciser que $P(x)$ n'est vraie que pour un seul élément x de E on utilise alors la notation "$\exists! x \in E,\ P(x)$".*

Il faut savoir nier une proposition dépendant de quantificateurs. La négation de "pour tout x, la proposition $P(x)$ est vraie" est "il existe un x tel que la proposition $P(x)$ soit fausse", c'est-à-dire

$$\boxed{\text{non}(\forall x \in E, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in E, \text{non}P(x).}$$

De même,

$$\boxed{\text{non}(\exists x \in E, P(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in E, \text{non}P(x).}$$

☠ **Attention !** On n'utilise jamais les symboles $\nexists$ et $\not\forall$.

Exercice 1.4. Écrire la négation des propositions suivantes :
1. $\forall x \in E, \exists y \in E, P(x, y)$;
2. $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)$;
3. $\exists r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq r$ et $s \leq r$.

Remarque 1.5.
1. *Pour montrer une proposition de la forme "$\forall x \in E, P(x)$" (quel que soit x dans E, x vérifie la propriété $P(x)$), on commence la démonstration par : "Soit $x \in E$. Montrons que la propriété $P(x)$ est vraie...*
2. *Pour montrer une proposition de la forme "$\exists x \in E, P(x)$" (il existe au moins un élément x vérifiant la propriété $P(x)$), il suffit de donner un élément x vérifiant cette propriété. La démonstration contiendra alors sans doute la phrase : "Posons $x = \ldots$ Vérifions que x convient..."*

3. *Pour montrer qu'une proposition de la forme "$\forall x \in E,\ P(x)$" est fausse (c'est-à-dire que $\exists x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse), il suffit d'exhiber un contre-exemple : Posons $x = \ldots$ Pour cet élément x, $P(x)$ est fausse. (L'utilisation de contre-exemples est revue quelques pages plus loin).*

Attention ! L'ordre des quantificateurs est important ! La proposition "$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \leq m$" est vraie : pour tout nombre entier n on peut trouver un entier m plus grand ou égal à n, par exemple $m = n+1$ convient. Par contre, la proposition "$\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq m$" est fausse : on ne peut pas trouver un entier m qui soit plus grand que tous les entiers. Conclusion :

$$\boxed{\text{On ne peut pas inverser les quantificateurs } \forall \text{ et } \exists}$$

Par contre on peut inverser deux $\forall$ et deux $\exists$:
- $(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)) \Longleftrightarrow (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x,y))$,
- $(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)) \Longleftrightarrow (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y))$.

1.1.4 Différents types de raisonnements

Raisonnements direct et par contraposée

Pour montrer que $A \Rightarrow B$ est vrai, on peut utiliser l'un des deux raisonnements suivants :
– Raisonnement direct : Supposons A vrai, et montrons qu'alors B est vrai ;
– Raisonnement par contraposée : Supposons B faux et montrons qu'alors A est faux.
Cela vient du fait que

$$\boxed{(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A))}$$

La phrase $((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A))$ est la *contraposée* de $(A \Rightarrow B)$.

Attention ! Ne pas confondre contraposée et réciproque. La *réciproque* de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$. De l'une on ne peut **rien** dire sur l'autre.

Exemple 1.6. *Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrons que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier. La négation de la dernière proposition est n n'est pas premier ce qui s'écrit il existe $p, q \in \mathbb{N}$ différents de 1 et n tels que $n = pq$. On a alors, en appliquant (2.1) avec $a = 2^p$, $b = 1$ et $n = q$,*

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(1 + 2^p + \cdots + 2^{p(q-1)}).$$

La dernière égalité vient de la propriété

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a \neq 1,\ a^{m+1} - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^m).$$

Donc $2^p - 1$ divise $2^n - 1$ et il est différent de 1 car $p \neq 1$ et différent de $2^n - 1$ car $p \neq n$. Donc $2^n - 1$ n'est pas premier.

Nous avons montré que la proposition "(n n'est pas premier) $\Rightarrow$ ($2^n - 1$ n'est pas premier)" est vraie. Sa contraposée "($2^n - 1$ est premier) $\Rightarrow$ (n est premier)" est donc également vraie : si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

Exercice 1.5. On considère un nombre réel $x \geq 0$ et les deux propositions :
– A : Pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$;
– B : $x = 0$.
Montrer que $A \Rightarrow B$.

Remarque 1.7. *Pour montrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on procède souvent en deux temps :*

1. *On montre que $A \Rightarrow B$ est vrai ;*
2. *On montre que $B \Rightarrow A$ est vrai.*

Remarque 1.8. *Pour montrer que $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ est vraie, il suffit de montrer (par exemple) que $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow A$ sont vraies. Voir la preuve de la Proposition 3.35 page 36 pour un exemple.*

Raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition B est vraie. On suppose qu'elle est fausse, et on essaie de trouver une proposition A que l'on sait être vraie et pour laquelle on montre "non $B \Rightarrow$ non A" : si B est fausse alors A est fausse, mais on sait que A est vraie, conclusion B ne peut pas être fausse.

Exemple 1.9. *Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (voir Chapitre 2, page 22).*

Raisonnement par récurrence

Un autre raisonnement classique est le raisonnement par récurrence. On l'utilise quand on veut montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La preuve se fait en trois étapes :

1. initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au premier rang, i.e. $P(0)$ est vraie,
2. hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, et on montre que celà implique que $P(n+1)$ est vraie (il y a un raisonnement à faire qui utilise l'hypothèse de récurrence !),
3. conlusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration par récurrence peut s'écrire de la façon suivante :

$$(P(0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\, P(n))\,.$$

Exemple 1.10. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n+1$.*
On commence par identifier la propriété $P(n)$. Ici, $P(n)$ est "$2^n \geq n+1$".

1. *initialisation : soit $n = 0$, alors $2^n = 2^0 = 1$ et $n+1 = 0+1 = 1$. On a bien $1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie.*
2. *hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie, i.e. $2^n \geq n+1$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie, i.e. $2^{n+1} \geq (n+1)+1$. On écrit*

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 2 \times (n+1) && \textit{(car } P(n) \textit{ est vraie et } 2 \geq 0\textit{)} \\ &= (n+2)+n \\ &\geq n+2 = (n+1)+1 && \textit{(car } n \geq 0\textit{).} \end{aligned}$$

   La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

3. *On a montré que $P(0)$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$ est vraie.*

Remarque 1.11. *Il arrive que la preuve de $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ne marche que pour n assez grand, par exemple uniquement pour $n \geq 1$. Dans ce cas, à l'étape d'initialisation il faut montrer non seulement $P(0)$, mais également $P(1)$.*

Exercice 1.6. Montrer (sans utiliser l'exemple précédent) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n$.

Utilisation d'un contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition $\forall x \in E, P(x)$ (tous les éléments de E vérifient P) est fausse, on peut montrer que la négation de la phrase (qui est $\exists x \in E$, non $P(x)$) est vraie. Il suffit pour cela d'exhiber un élément x de E qui ne vérifie pas P ; x s'appelle un *contre-exemple*.

Exemple 1.12. *Montrons que la proposition "$\forall x \in \mathbb{R},\, x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$" est fausse. Sa négation est*

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < 1 \text{ et } x^2 \geq 1.$$

Cette dernière proposition est vraie, par exemple pour $x = -2$. Donc -2 est un contre-exemple à la première proposition.

Raisonnement par disjonction des cas

Un dernier raisonnement dont on va parler est le raisonnement par disjonction des cas. Pour montrer qu'une proposition "$\forall x \in A,\ P(x)$" est vraie, on traite séparément différents cas. Plus précisément, si A peut s'écrire comme une réunion de A_i, alors il suffit de montrer que pour tout i la proposition "$\forall x \in A_i,\ P(x)$" est vraie.

Exemple 1.13. *On veut montrer que si n est un nombre entier alors $n^2 + n$ est un nombre entier pair, autrement dit que la propriété "$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2+n$ est un entier pair". On va traiter séparément deux cas, selon que n lui-même est pair ou impair (ici $A = \mathbb{N}$, A_1 est l'ensemble des entiers pairs et A_2 l'ensemble des entiers impairs).*

– *Si n est pair, il est de la forme $n = 2k$ où k est un nombre entier. On a alors*

$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2 \times (2k^2 + k),$$

et donc $n^2 + n$ est bien un nombre pair.

– *Si n est impair, il est de la forme $n = 2k + 1$ où k est un nombre entier. On a alors*

$$n^2 + n = (2k + 1)^2 + (2k + 1) = (4k^2 + 4k + 1) + (2k + 1) = 2 \times (2k^2 + 3k + 1),$$

et donc $n^2 + n$ est bien un nombre pair.

Dans tous les cas on a bien montré que $n^2 + n$ était un nombre pair.

Résolution d'équation et raisonnement par équivalence

On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $3x + 2 = 0$. Résoudre l'équation signifie trouver toutes les solutions de l'équation, c'est-à-dire tous les $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $3y + 2 = 0$. Autrement dit, il s'agit de déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{E}$ des $y \in \mathbb{R}$ vérifiant $3y + 2 = 0$.

Considérons le raisonnement suivant :

> "Si x vérifie $3x + 2 = 0$ alors, en ajoutant -2 de chaque côté, $3x = -2$ et, en multipliant par $1/3$ de chaque côté, $x = -2/3$."

Ce raisonnement montre que si x est une solution alors forcément il vaut $-2/3$. En fait, il montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation est inclus dans l'ensemble $\{-2/3\}$ (à un seul élément). Ou encore, il montre l'implication : $(3x + 2 = 0) \Rightarrow (x = -2/3)$. Il ne montre pas que $-2/3$ est solution. Il ne montre pas que l'ensemble $\mathcal{E}$ contient $\{-2/3\}$. Il ne montre pas non plus l'implication : $(x = -2/3) \Rightarrow (3x + 2 = 0)$.

Si l'on ajoute au raisonnement précédent la remarque suivante : $3(-2/3) + 2 = -2 + 2 = 0$ alors on montre que $-2/3$ est solution de l'équation ou encore que $\mathcal{E}$ contient $\{-2/3\}$ ou encore l'implication $(x = -2/3) \Rightarrow (3x + 2 = 0)$.

Ces deux étapes montrent que l'équation a exactement une solution à savoir $-2/3$, ou encore l'équivalence $(x = -2/3) \iff (3x + 2 = 0)$.

Résoudre une équation revient à montrer une équivalence ! Dans l'exemple précédent, on montre que la propriété $3x + 2 = 0$ est équivalente à la propriété $x = -2/3$. Cette équivalence peut se faire soit en deux étapes comme ci-dessus, soit par une suite d'équivalences qui permettent de faire les deux étapes en même temps. Dans l'exemple précédent, on peut procéder de la façon suivante.

Rappelons les deux propriétés suivantes de $\mathbb{R}$. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a = b) \Leftrightarrow (a + c = b + c)$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, pour tout $c \in \mathbb{R}^*$, $(a = b) \Leftrightarrow (ac = bc)$. On a alors, en utilisant la première propriété avec $a = 3x + 2$, $b = 0$ et $c = -2$, puis en utilisant la seconde avec $a = 3x$, $b = -2$ et $c = 1/3 \neq 0$,

$$(3x + 2 = 0) \Leftrightarrow (3x = -2) \Leftrightarrow (x = -2/3).$$

Attention ! Lorsque l'on résout une équation, il faut bien faire attention : est-on en train d'utiliser des implications ou des équivalences ? Dans le premier cas il ne faut pas oublier de faire la seconde étape.

Exemple 1.14. *On cherche les solutions de l'équation :*

$$x = \sqrt{2x + 3}.$$

On peut faire le raisonnement suivant. Si x est solution alors $x^2 = 2x + 3$ (on utilise ici la propriété "$(a = b) \Rightarrow (a^2 = b^2)$") et donc $x^2 - 2x - 3 = 0$. On en déduit alors que $x = -1$ ou $x = 3$ (faites-le !). Ce *raisonnement correspond à un raisonnement par implication. Il dit seulement que s'il y a une solution alors c'est* -1 *ou* 3 *(ou les deux). Il ne dit pas que* -1 *est solution ni que* 3 *est solution.*

On termine alors la résolution de l'équation de la façon suivante : pour $x=-1$ *on a* $\sqrt{2x+3}=\sqrt{1}=1\neq x$ *donc* -1 *n'est pas solution, pour* $x=3$ *on a* $\sqrt{2x+3}=\sqrt{9}=3=x$ *donc* 3 *est bien solution. Finalement, l'équation possède exactement une solution : 3.*

1.2 Rudiments de théorie des ensembles

1.2.1 Inclusion

Définition 1.15.
- *Si* E *et* F *sont deux ensembles, on note* $E\subset F$ *lorsque tous les éléments de* E *sont des éléments de* F : $\forall x\in E,\ x\in F$. *On dit que* E *est un* sous-ensemble *de* F.
- *Un ensemble particulier est l'ensemble vide noté* $\emptyset$. *Il ne contient aucun élément, et pour tout ensemble* E, *on a* $\emptyset\subset E$.
- *Si* x *est un élément de* E, *on note* $\{x\}$ *l'ensemble constitué du seul élément* x.

☠ **Attention !** Si x est un élément de E, $x\in E$ et $\{x\}\subset E$.

Exercice 1.7. Écrire la négation de $E\subset F$ (ce que l'on note $E\not\subset F$).

Exercice 1.8. Soit l'ensemble $E=\{\{\emptyset\},1,\mathbb{N},\{0,1,2\}\}$. Mettre le signe $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$ correct entre les objets suivants :
- $\emptyset ... E$;
- $\{\emptyset\} ... E$;
- $\mathbb{N} ... E$;
- $\{\emptyset,\mathbb{N}\} ... E$.

Définition 1.16. *Deux ensembles* E *et* F *sont* égaux, *ce qui est noté* $E=F$, *si et seulement si* $E\subset F$ *et* $F\subset E$

Pour montrer que $E=F$, on utilise le plan suivant :

1. Montrons que $E\subset F$: soit x un élément de E, je veux montrer qu'il appartient à F ...
2. Montrons que $F\subset E$: soit x un élément de F, je veux montrer qu'il appartient à E ...

✎ **Notation.** $\{x\mid$ une propriété de $x\}$ est l'ensemble des éléments x qui vérifie la propriété décrite.

Définition 1.17. *L'*ensemble des parties *d'un ensemble* E, *noté* $\mathcal{P}(E)$, *est*

$$\mathcal{P}(E)=\{A\,|\,A\subset E\}.$$

Remarque 1.18. *1.* $A\in\mathcal{P}(E)\Longleftrightarrow A\subset E$.

2. $\mathcal{P}(E)$ *n'est jamais vide puisqu'il contient toujours l'ensemble vide (!), ainsi que l'ensemble* E *(qui peut-être vide).*

Exercice 1.9. Écrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E=\{a,b\}$.

1.2.2 Intersection, union, complémentaire

Définition 1.19. *Soient* E *et* F *deux ensembles. On définit de nouveaux ensembles :*
- *L'*intersection *de* E *et* F *est l'ensemble noté* $E\cap F$ *dont les éléments sont ceux appartenant à* E *et à* F : $E\cap F=\{x\,|\,x\in E \text{ et } x\in F\}$.
- *L'*union *(ou la* réunion*) de* E *et* F *est l'ensemble noté* $E\cup F$ *dont les éléments sont ceux appartenant à* E *ou à* F : $E\cup F=\{x\,|\,x\in E \text{ ou } x\in F\}$. *La réunion est dite* disjointe *si* $E\cap F=\emptyset$.
- *Si* $E\subset F$, *le* complémentaire *de* E *dans* F *est l'ensemble noté* $F\setminus E$ *dont les éléments sont ceux appartenant à* F *mais pas à* E : $F\setminus E=\{x\,|\,x\in F \text{ et } x\notin E\}$.

Remarque 1.20. *Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble* F, *on note parfois le complémentaire de* E *dans* F *par* E^c *au lieu de* $F\setminus E$.

1.2.3 Produit cartésien

Définition 1.21. *Soient E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des (couples) (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. L'ensemble $E \times F$ s'appelle le* produit cartésien *des ensembles E et F.*

Exemple 1.22. *Le plan $\mathbb{R}^2$ est simplement $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Remarque 1.23. *Deux éléments (x, y) et (x', y') de $E \times F$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.*

Remarque 1.24. *Si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on définit de la même façon le produit cartésien*

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

Un élément de la forme $(x_1, \dots, x_n)$ est appelé un n-uplet.

1.2.4 Lien entre connecteurs logiques et relations ensemblistes

Si E est un ensemble et A un sous-ensemble de E, on peut leur associer une proposition logique $P(x)$ définie pour tout $x \in E$ de la façon suivante : $P(x)$ est vraie si et seulement si $x \in A$ (et donc $P(x)$ est fausse si $x \notin A$). Si B est un autre sous-ensemble de E, et $Q(x)$ la proposition logique vraie si $x \in B$, alors $A \cup B$ est l'ensemble des x qui vérifient ($P(x)$ ou $Q(x)$), et $A \cap B$ est l'ensemble des x qui vérifient ($P(x)$ et $Q(x)$). De même, la propriété $A \subset B$ signifie "si $x \in A$ alors $x \in B$" et se traduit donc par "si $P(x)$ est vraie alors $Q(x)$ est vraie" ou encore "$P(x) \Rightarrow Q(x)$". Ainsi les résultats sur les connecteurs logiques se traduisent en résultats sur les ensembles.

Exemple 1.25. *Soit $E = \mathbb{N}$ et A l'ensemble des entiers pairs. On peut leur associer la proposition logique $P(x)$ suivante : "x est divisible par 2".*

Exemple 1.26. *Soit $P(x)$ la proposition logique associée à A. Donc $x \in A^c$ si et seulement si $P(x)$ est fausse, c'est-à-dire non $P(x)$ est vraie. Autrement dit la proposition logique associée à A^c est "non $P(x)$". Comme non (non P)$\Longleftrightarrow P$, on a $x \in (A^c)^c \Longleftrightarrow x \in A$, c'est-à-dire $(A^c)^c = A$.*

Exercice 1.10. On considère trois ensembles A, B, C. Montrer que
a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
e) ($A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$) $\Rightarrow (B \subset C)$.

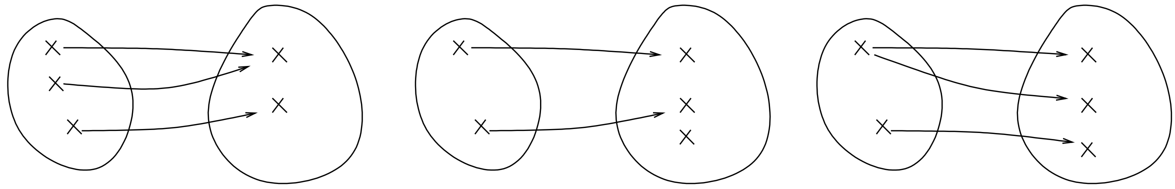
1.2.5 Applications

Définition 1.27. *Soient E et F deux ensembles. Une* application, *ou* fonction, *$f : E \to F$ est la donnée pour tout $x \in E$ d'un* **unique** *élément y, noté $f(x)$, de F. L'élément x est un* antécédent *de $f(x)$, $f(x)$ est* l'image *de x par f. E est* l'ensemble de départ *et F est* l'ensemble d'arrivée. *Ainsi, par une application f tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule :*

$$\forall x \in E, \ \exists! y \in F, \ y = f(x).$$

Remarque 1.28. *Un élément $y \in F$ peut avoir aucun, un, ou plusieurs antécédents.*

Exercice 1.11. Une des correspondences ci-dessous n'est pas une application. Laquelle ? Pourquoi ?



Définition 1.29. *Deux applications f et g sont* égales *(notation : $f = g$) si elles ont les mêmes ensembles de départ E et d'arrivée F et si, $\forall x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

Définition 1.30. *Soit E un ensemble. On appelle* identité *de E l'application*

$$id_E : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$$

Définition 1.31. *Soit f une application de E dans F, et $A \subset E$. On appelle la* restriction de f à A *l'application $g : A \to F$ telle que $g(x) = f(x), \forall x \in A$. On notera $f\lceil_A$ cette restriction.*

Définition 1.32. *Soit f une application de E dans F et A tel que $E \subset A$. Une application $g : A \to F$ telle que $g(x) = f(x), \forall x \in E$ est un* prolongement *de f à A.*

Définition 1.33. *Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, et $A \subset E$. On appelle* image directe*, ou simplement image, de A par f le sous ensemble de F noté $f(A)$ et défini par*

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

On peut écrire

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A,\, y = f(x).$$

Proposition 1.34. *Soient $A, B \subset E$ et f une application de E dans F. On a*

1. $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Démonstration. Montrons la dernière propriété. Soit $y \in f(A\cap B)$. Il existe alors $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A \cap B \subset A$, $f(x) \in f(A)$ et comme $x \in A \cap B \subset B$, $f(x)$ est aussi un élément de $f(B)$. Donc $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$. □

Remarque 1.35. *Pourquoi n'a-t-on pas égalité entre $f(A\cap B)$ et $f(A)\cap f(B)$? Regardons l'inclusion inverse. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Donc il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Malheureusement, on ne sait pas si $x_1 = x_2$!*

Exemple 1.36. *Soient $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$. Enfin soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{b, c\}$. Déterminer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$ et les comparer.*

Exercice 1.12. Prouver les propriétés 1. et 2. de la proposition précédente.

Définition 1.37. *Soit f une application de E dans F et $B \subset F$. On appelle* image réciproque *de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ et défini par*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}.$$

On peut écrire

$$x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B.$$

☠ **Attention !** On a défini l'ensemble $f^{-1}(B)$ en utilisant la notation f^{-1}. Si $y \in F$, la notation $f^{-1}(y)$ ne signifie rien pour l'instant (nous n'avons pas supposé que f est une bijection, voir plus loin).

Proposition 1.38. *Soient A et B deux sous-ensembles de F et f une application de E dans F. On a*

1. $(A \subset B) \Rightarrow (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$,
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 1.13. Démontrer la proposition précédente.

Exercice 1.14. Quel rapport y a -t-il entre $f^{-1}(f(A))$ et A ? Et entre $f(f^{-1}(B))$ et B ?

Définition 1.39. *Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G. La* composée *de f par g est l'application notée $g \circ f$ définie de E vers G par*

$$\forall x \in E,\, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

1.2.6 Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit f une application de E dans F.

Définition 1.40. *On dit que f est une application* injective *si tout élément y de F possède* au plus *un antécédent $x \in E$ par f. De façon équivalente :*

$$\begin{aligned} f \text{ est injective} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall (x, x') \in E \times E, (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')), \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall (x, x') \in E \times E, (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'). \end{aligned}$$

Remarque 1.41. *Les deux dernières formulations dans la définition ci-dessus sont les contraposées l'une de l'autre et sont donc bien entendu équivalentes.*

Exercice 1.15. Montrer que f est injective $\Longleftrightarrow \big(\forall (A, B) \in P(E) \times P(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\big)$.

Définition 1.42. *On dit que f est une application* surjective *si tout élément y de F possède* au moins *un antécédent $x \in E$ par f, i.e. $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$. De façon équivalente :*

$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f(E) = F.$$

Remarque 1.43. *Par définition de l'image (directe), une application f est* toujours surjective *de E sur son image $f(E)$.*

Définition 1.44. *On dit que f est une application* bijective *si tout élément y de F possède* un unique *antécédent $x \in E$ par f, i.e.*

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow \forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

On définit alors une application de F dans E notée f^{-1} par

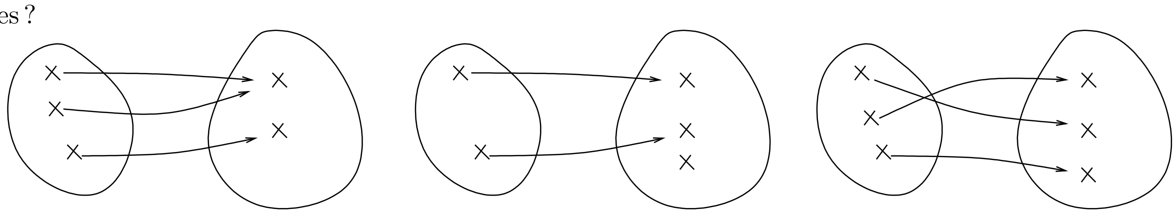
$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ x = f^{-1}(y) \Longleftrightarrow y = f(x).$$

*On l'appelle l'*application réciproque *de f.*

Exercice 1.16. Montrer qu'une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exercice 1.17. Montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$ (on rappelle que id_E est l'application identité de E).

Exercice 1.18. Parmi les applications ci-dessous, quelles sont celles qui sont injectives ? surjectives ? bijectives ?



Remarque 1.45. *Si E et F sont des ensembles ayant un nombre fini d'éléments, on note $|E|$ (resp. $|F|$) le nombre d'éléments de E (resp. F). Soit f une application de E dans F. Alors*

- *si f est injective alors $|E| \leq |F|$,*
- *si f est surjective alors $|E| \geq |F|$,*
- *si f bijective alors $|E| = |F|$.*

Exercice 1.19. Soit f une application bijective de E dans F et $B \subset F$. Montrer que l'image directe $f^{-1}(B)$ de B par l'application f^{-1} coïncide avec l'image réciproque de B par f (voir Définition 1.37). Il n'y a donc pas d'ambiguité dans la notation $f^{-1}(B)$ quand l'application f est bijective.

Proposition 1.46. *Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.*

1. *f est injective si et seulement si pour tout sous-ensemble A de E, on a $f^{-1}(f(A)) = A$.*
2. *f est surjective si et seulement si pour tout sous-ensemble B de F, on a $f(f^{-1}(B)) = B$.*

Démonstration. On montre 1. Le 2. est laissé à titre d'exercice. L'ensemble $f^{-1}(f(A))$ est

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(A)) &= \{x \in E \,|\, f(x) \in f(A)\} \\ &= \{x \in E \,|\, \exists a \in A \text{ et } f(x) = f(a)\}. \end{aligned}$$

On commence par remarquer que l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ est toujours vraie. En effet, si $x \in A$ alors avec $a = x$ cela prouve que $x \in f^{-1}(f(A))$.

Supposons d'abord que f est injective. Soit $A \subset E$, il faut montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Soit donc $x \in f^{-1}(f(A))$. D'après ce qui précède, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Mais f est injective, donc (2nde caractérisation de l'injectivité) $x = a$ et en particulier $x \in A$. On a donc montré que

$$f \text{ injective } \Rightarrow \big(\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A\big).$$

Réciproquement, on suppose que pour tout $A \subset E$ on a $A = f^{-1}(f(A))$. On montre alors que f est injective. On utilise à nouveau la seconde caractérisation. Soient x, x' dans E tels $f(x) = f(x')$. On considère l'ensemble $A = \{x\}$. Puisque $f(x') = f(x)$ on a $x' \in f^{-1}(f(A))$. Mais on sait que $f^{-1}(f(A)) = A$, donc $x' \in A$. Comme A ne possède qu'un seul élément, x, on en déduit que $x' = x$. On a cette fois montré que

$$\big(\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A\big) \Rightarrow f \text{ injective }.$$

□

Proposition 1.47. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.*

1. *si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective,*
2. *si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective,*
3. *si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,*
4. *si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,*
5. *si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

1.3 Exercices

Exercice 1.20. Dans chacun des cas, la proposition B est-elle une CS, CN ou CNS de la proposition A ?
a) A : "$x^2 \geq x$" et B : "$x \geq 1$"
b) A : "n impair" et B : "n^2 impair"
c) A : "$\forall n \in \mathbb{N}, x \geq n$" et B : "$x \geq 10^{10}$"
d) A : "$x \in [1, 3]$" et B : "$x \in [1, 4]$"

Exercice 1.21. Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.
a) $\forall i \in \{1, 2, 3\}, \exists a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1.$
b) $\exists i \in \{1, 2, 3\}, \forall a \in \mathbb{R},\ f_i(a) = 1.$
c) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, 3\},\ f_i(a) = 1.$
d) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, 2, 3\},\ f_i(a) = 1.$

Exercice 1.22. Placer les symboles $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ qui conviennent entre les propositions et écrire les contraposées des implications.
a) A : "$x \leq 0$" et B : "$x < 0$".
b) A : "$|x - x_0| < \alpha$" et B : "$x < x_0 + \alpha$".
c) A : "$\forall x$, x vérifie la propriété P" et B : "$\exists x$, x vérifie la propriété P".
d) A : "$C \cap D = C$" et B : "$C \subset D$".
e) A : "$C \cup D = C$" et B : "$D \subset C$".

Exercice 1.23. Prendre la négation des phrases suivantes :
a) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < n + 1.$
b) $\forall a \in A,\ \exists b \in B, a < b^2$ et $a \leq b^3 + 1.$

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \alpha \Longrightarrow |x^2-1| < \varepsilon$.

Exercice 1.24. Montrer si les phrases suivantes sont vraies ou fausses.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < xy$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1$ ou $x^2 < 2$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x \geq 0$.

Exercice 1.25. Écrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs (on pourra utiliser la notation $a|b$ pour signifier que l'entier a divise l'entier b). Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.

a) Tout entier naturel divisible par 6 est divisible par 3.

b) Tout entier naturel divisible par 2 et 3 est divisible par 6.

c) Tout entier naturel divisible par 2 et 14 est divisible par 28.

Exercice 1.26. Montrer

a) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [1,3], |x-2| < \alpha \Rightarrow |x^2-4| < \epsilon$.

b) $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-2| < \alpha \Rightarrow |x^2-4| < \epsilon$.

Exercice 1.27. Soit E un ensemble. Pour A une partie de E, on note 1_A la *fonction indicatrice* (ou caractéristique) de l'ensemble A définie par

$$1_A : E \to \{0,1\}, \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A, \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

a) On prend $E = \mathbb{R}$. Donner le graphe de $1_{[0,1]}$ et $1_{[0,1]\cup[2,3]}$.

b) Montrer que si $A \subset B$ alors $1_A \leq 1_B$.

c) Montrer que $1_{A\cap B} = 1_A \cdot 1_B$

d) Déterminer une relation entre $1_{A\cup B}$, 1_A et 1_B

e) Que peut-on dire de $1_{A\cup B\cup C}$?

Exercice 1.28.

a) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

b) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des entiers pairs.

c) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

d) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

e) Déterminer une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

f) Déterminer une bijection de $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\}$.

g) Déduire de l'exemple précédent une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.

Exercice 1.29.

a) Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+5$ est bijective. Calculer f^{-1}.

b) Montrer que $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x,x') \mapsto (x+x', x-x')$ est bijective. Calculer f^{-1}.

Partie I. Nombres réels et nombres complexes

Chapitre 2

Nombres réels

2.1 Quelques idées sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

2.1.1 Les ensembles de nombres usuels

L'ensemble des entiers naturels

Il est noté $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Il contient en particulier les entiers pairs et impairs ainsi que les *nombres premiers*, c'est à dire les entiers naturels strictement supérieurs à 1 et seulement divisibles par 1 et par eux-mêmes. La somme de deux entiers naturels est un entier naturel de même que leur produit. Par contre la diffèrence de deux entiers naturels n'est pas nécessairement un entier naturel.

On notera $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

L'ensemble des entiers relatifs

Il est noté $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. La somme de deux entiers relatifs est un entier relatif de même que leur produit et leur différence. Tout entier naturel est un entier relatif, i.e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. On notera $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

L'ensemble des nombres rationnels

Il est noté $\mathbb{Q}$ et est défini par $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. $\mathbb{Q}$ vérifie un certain nombre de propriétés algébriques, qui font qu'on appelle $\mathbb{Q}$ un *corps* :

- $0 \in \mathbb{Q}$;
- Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $-x \in \mathbb{Q}$
- Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $x + y \in \mathbb{Q}$;
- Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $xy \in \mathbb{Q}$;
- Si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \neq 0$, alors $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Q}$.

Un exemple de sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des *nombres décimaux* :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^k} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Comme précédemment, on notera $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Remarque 2.1. *Pour un nombre rationnel r donné, les nombres $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$ ne sont pas uniques. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a également $r = \frac{np}{nq}$. On peut cependant montrer qu'il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ et que les nombres p et q n'ont pas de diviseur entier naturel commun autre que 1 (on dit qu'ils sont* premiers entre eux*).*

L'ensemble des nombres réels

Il est noté $\mathbb{R}$. Un réel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme

$$\pm a_1 a_2 \ldots a_n, a_{n+1} a_{n+2} \ldots$$

où $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont des entiers naturels plus petit strictement que 10. Une telle écriture est appelée *développement décimal.* Tout nombre rationnel est un nombre réel. Il existe des éléments de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$, on les appelle les *irrationnels*. L'ensemble des nombres irrationnels est donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemple 2.2. *On veut montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. On va utiliser un raisonnement par l'absurde, on suppose donc que $\sqrt{2}$ est rationnel. Ainsi il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus, d'après la Remarque 2.1, on peut supposer que p et q sont premiers entre eux. En élevant au carré, on a alors $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair ce qui implique que p est pair (regardez l'Exemple 1.13 si vous n'êtes pas convaincus). Il existe alors $r \in \mathbb{Z}$ tel $p = 2r$. Ainsi, on a $4r^2 = 2q^2$, c'est-à-dire $2r^2 = q^2$. Donc q^2 est pair et ainsi q également. Les nombres p et q sont tous les deux pairs et admettent donc 2 pour diviseur commun ce qui est contraire à l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux. On a ainsi prouvé que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de l'addition et de la multiplication. On rappelle que
- pour tout réel c, $a = b$ est équivalent à $a + c = b + c$,
- pour tout réel c non nul, $a = b$ est équivalent à $ac = bc$.

On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

On notera $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On introduit également les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &= \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \\ \mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}, \\ \mathbb{R}_-^* &= \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}, \\ \mathbb{R}_- &= \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}. \end{aligned}$$

2.1.2 Formule du binôme et identités remarquables

On rappelle la *formule du binôme* (de Newton) : pour tous nombres réels a et b et pour tout entier naturel n on a

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}.$$

On rappelle également la formule suivante parfois appelée *identité remarquable* (au moins dans les cas $n = 2$ et $n = 3$) : pour tous nombres réels a et b et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}. \tag{2.1}$$

Remarque 2.3. *Ces formules sont aussi vraies si a et b sont des nombres complexes (Chapitre 4).*

Remarque 2.4. *Les notations supposées connues sont rappelées dans l'annexe B page 107.*

Exercice 2.1.
1. Écrire les coefficients $\binom{n}{k}$ pour n et k tels que de $0 \leq k \leq n \leq 5$ (triangle de Pascal).
2. Développer $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)^3, (a-b)^3, (a+b)^4, (a+b)^5$.

Exercice 2.2. Démontrer la formule (2.1).

Exercice 2.3.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ on a

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

b) Démontrer la formule du binôme (raisonner par récurrence sur n).

2.2 Ordre dans $\mathbb{R}$ et topologie de $\mathbb{R}$

2.2.1 Ordre dans $\mathbb{R}$

Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est qu'il possède une relation d'ordre, c'est à dire que l'on peut comparer deux réels : $x \leq y$ signifie que x est égal à y ou que x est plus petit que y. On dit que $\mathbb{R}$ est un ensemble *ordonné*, c'est-à-dire que $\leq$ est une relation d'ordre, ce qui signifie que la relation $\leq$ vérifie les propriétés de

- réflexivité : $x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- antisymétrie : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
- transitivité : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

De plus l'ordre est *total* : deux éléments donnés de $\mathbb{R}$ peuvent *toujours* être comparés entre eux (on dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné).

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a les propriétés suivantes :

- $x \leq y \iff x + z \leq y + z$,
- Si $z > 0$ alors $x \leq y \iff zx \leq zy$,
- Si $z < 0$ alors $x \leq y \iff zx \geq zy$.

On peut en déduire par exemple

- $0 < x < y \iff 0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$,
- $x < y < 0 \iff \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x} < 0$,
- Si $0 < x < y$ alors $x^2 < y^2$,
- Si $x < y < 0$ alors $x^2 > y^2$.

☠ **Attention !** Si $x < 0 < y$ alors $\dfrac{1}{x} < 0 < \dfrac{1}{y}$, mais on ne peut a priori *rien dire* sur x^2 et y^2.

2.2.2 Valeur absolue

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit sa valeur absolue par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

On rappelle les propriétés suivantes, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ et tout n dans $\mathbb{N}$:

- $|xy| = |x| \times |y|$,
- $|x^n| = |x|^n$,
- $x^2 \leq y^2$ est équivalent à $|x| \leq |y|$,

Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$,

- $(|x| = \alpha) \iff (x = \alpha \text{ ou } x = -\alpha)$,
- $(|x| \leq \alpha) \iff (-\alpha \leq x \leq \alpha)$,
- $(|x| \geq \alpha) \iff (x \leq -\alpha \text{ ou } x \geq \alpha)$.

Exercice 2.4. Démontrer les propriétés précédentes.

Contrairement à ce qui se passe pour le produit, la valeur absolue d'une somme n'est en général pas égale à la somme des valeurs absolues.

Proposition 2.5 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ on a*

$$\boxed{|x + y| \leq |x| + |y|}.$$

De plus, $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y ont même signe.

Démonstration. Soient x et y dans $\mathbb{R}$. On écrit

$$(|x + y|)^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2 = |x|^2 + 2|x| \times |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Puisque $|x + y|$ et $|x| + |y|$ sont tous les deux positifs on en déduit le résultat.

De plus, ces deux nombres sont égaux si et seulement toutes les inégalités dans le calcul ci-dessus sont des égalités. C'est-à-dire si et seulement si

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|xy| + y^2 \iff xy = |xy|,$$

ce qui est le cas si et seulement si $xy \geq 0$ et donc x et y ont même signe. □

On donne ci-dessous différentes inégalités qui sont des conséquences directes de l'inégalité trinagulaire.

Corollaire 2.6. *Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ on a*

1. $|x-y| \leq |x| + |y|$.
2. $||x| - |y|| \leq |x-y|$ *(inégalité triangulaire inversée).*
3. $||x| - |y|| \leq |x+y|$.

Démonstration. 1. On applique l'inégalité triangulaire avec x et $-y$ en remarquant que $|-y| = |y|$.

2. On applique l'inégalité triangulaire avec x et $y-x$: $|y| = |x + (y-x)| \leq |x| + |y-x|$ et donc $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$. En intervertissant les rôles de x et y on a de même $|x| - |y| \leq |x-y|$. Comme $||x| - |y||$ vaut soit $|x| - |y|$ soit $|y| - |x|$, on en déduit le résultat.

3. On applique 2. avec x et $-y$. □

Remarque 2.7. *Une preuve de l'inégalité triangulaire est aussi donnée dans le cas complexe au Lemme 4.7 page 46.*

2.2.3 Notion d'intervalles

Soient a et b deux réels, les ensembles suivants sont appelés des intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll}
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}, & \text{intervalle ouvert,} \\
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}, & \text{intervalle fermé,} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}, & \text{intervalle semi-ouvert et semi-fermé,} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}, & \text{intervalle semi-ouvert et semi-fermé,} \\
[a,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}, & \text{intervalle fermé,} \\
]a,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R}, x > a\}, & \text{intervalle ouvert,} \\
]-\infty,a[& = & \{x \in \mathbb{R}, x < a\}, & \text{intervalle ouvert,} \\
]-\infty,a] & = & \{x \in \mathbb{R}, x \leq a\} & \text{intervalle fermé.}
\end{array}$$

2.2.4 Distance

On définit sur $\mathbb{R}$ une *distance* $d(x,y)$ entre deux réels x et y par :

$$d(x,y) = |x-y|.$$

Ainsi, pour $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'ensemble des réels x tels que

$$|x-a| \leq \alpha$$

est l'ensemble des nombres réels x qui sont à une distance au plus α du nombre a, i.e l'intervalle fermé de centre a et de rayon α : $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq \alpha\} = [a-\alpha, a+\alpha]$.

2.2.5 Majorants, minorants

Définition 2.8. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un*

- majorant *de A si, pour tout $a \in A$, $a \leq x$,*
- minorant *de A si, pour tout $a \in A$, $a \geq x$,*
- plus grand élément *de A si x est un majorant de A et $x \in A$,*
- plus petit élément *de A si x est un minorant de A et $x \in A$.*

Exercice 2.5. Montrer que le plus grand élément d'un ensemble, s'il existe, est unique.

On dit que A est

- majoré *si A admet un majorant,*
- minoré *si A admet un minorant,*
- borné *si A est majoré et minoré.*

Exemple 2.9. *$A =]0,1[$ admet -1, 0 comme minorants. D'autre part, 10, 4 et 1 sont des majorants. En outre, A est borné.*

$B =]-\infty, b]$ n'a pas de minorant mais des majorants, notamment b, et B n'est pas borné.

Exercice 2.6. Montrer qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est borné si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leq x$.

2.2.6 Partie entière

Proposition 2.10 (Propriété d'Archimède)**.** *(Admis) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n tel que $nx > y$. On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ est* archimédien.

Remarque 2.11. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est également archimédien.*

La *partie entière* d'un réel x est l'unique entier relatif $E(x)$ qui vérifie

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

La définition de la partie entière utilise le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien. Une définition équivalente de la partie entière sera donnée page 59.

2.2.7 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème 2.12. *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est* dense *dans $\mathbb{R}$. Cela signifie que pour tous réels x et y avec $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$ (c'est-à-dire $r \in]x, y[$).*

Démonstration. On veut montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x < p/q < y$, ce qui s'écrit $qx < p < qy$. Par la propriété d'Archimède on sait qu'on peut choisir un entier q tel que $q(y - x) > 1$, c'est-à-dire $qy > 1 + qx$. Prenons $p = E(1 + qx)$. On a $qy > p$ et par définition de la partie entière, $p > 1 + qx - 1 = qx$, ce qui donne le résultat. □

Remarque 2.13. *Dans l'exercice 2.25 on montrera que les irrationels sont aussi denses dans $\mathbb{R}$.*

2.3 Exercices

Exercice 2.7. Montrer les identités suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 2.8. Pour $n \geq 1$ montrer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{1}{k})^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Rappel : $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Exercice 2.9 (Triangle de Pascal)**.** Montrer la formule

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}.$$

Rappel : $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exercice 2.10. Montrer les inégalités suivantes, pour tout x, y, z réels :

a) Pour $x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$,

b) $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$,

c) $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$,

d) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Exercice 2.11. Pour x et y dans $\mathbb{R}_+$ et n dans $\mathbb{N}^*$, montrer
a) $(x+y)^{1/n} \leq x^{1/n} + y^{1/n}$.
b) $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 2.12. On suppose que $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ vérifient $|x-a| < |a|$. Montrer qu'alors x est non nul et de même signe que a.

Exercice 2.13. Résoudre les inégalités suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

a) $|x+1| < 0,1$
b) $|x-2| > 10$
c) $|x| < |x+1|$
d) $\big||x+3| - 1\big| \leq 2$
e) $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 3$
f) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$
g) $|2x-1| < |x-1|$

Exercice 2.14. Soit $x \geq 0$. Montrer que $\dfrac{2x+5}{x+2}$ est plus près de $\sqrt{5}$ que x ne l'est.

Exercice 2.15. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$. Montrer que $E =]0,1]$.

Exercice 2.16. Soit a_1, a_2 dans $\mathbb{R}$ et r_1 et r_2 strictement positifs. Soit $x, y \in \mathbb{R}, |x-a_1| \leq r_1$ et $|y-a_2| \leq r_2$. Montrer que

$$|xy - a_1a_2| \leq r_1r_2 + |a_2|r_1 + |a_2|r_1.$$

Exercice 2.17. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq x < 3$ et $-1 < y \leq 1$. Donner des encadrements de $x+y$, xy, $\frac{1}{x}$, et $\frac{x}{y}$.

Exercice 2.18. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Exercice 2.19. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 2.20. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $3x^2 + 4x + 3 = 4x^2 - 3x + 4$.
b) $\frac{3x+4}{4x+2} = x$.
c) $\frac{2x+1}{3x-4} = \frac{x+1}{x-1}$.
d) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3}$.

Exercice 2.21. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2x^2 - 3x + 4 < 4x^2 + 2x + 9$.
b) $\frac{2x+1}{3x+2} < 0$.
c) $2x^3 - 5x^2 + 3x \leq 0$.
d) $\frac{1}{x} > x$.
e) $\frac{1}{x^2-1} < \frac{1}{x}$.
f) $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+1} \leq 4$.
g) $|x+1| < 0.1$.
h) $|x-2| > 10$.
i) $||x+3| - 1| \leq 2$.
j) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \leq x - 1$.
k) $\sqrt{x-1} > 2 - \sqrt{x}$.
l) $|2x-1| < |x-1|$.

Exercice 2.22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$. Montrer : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 2.23. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{2\sqrt{n}} < (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}),$$

puis en déduire la valeur de $E\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ (où $E(.)$ désigne la partie entière).

Exercice 2.24. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle vérifiant

$$(1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,$$

$$(2) \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

a) Montrer que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.

c) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}^+, f(r) = r$.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$.

e) Montrer que f est croissante.

f) Montrer par l'absurde que $f(x) = x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ (on introduira un rationnel r tel que $x < r < f(x)$ ou $f(x) < r < x$).

Exercice 2.25.

a) Montrer que si x, y sont deux rationnels différents, alors $\dfrac{x + y\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ est irrationnel.

b) Soit a et b tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $r \in]a, b[$. (Indication : utiliser le Théorème 2.12 page 25.)

Exercice 2.26. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres positifs. Montrer que si $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ alors $\forall i \ a_i = 0$.

Exercice 2.27. Montrer par récurrence :

a) Pour tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)2}{4}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (1 \times 2) + (2 \times 3) + \cdots + (n \times (n+1)) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 9$ divise $10^n - 1$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{n^3-n}{3} \in \mathbb{N}$.

f) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \ |sin(nx)| \leq n|sin(x)|$.

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.1 Généralités sur les suites

3.1.1 Définitions

Définition 3.1. *Une* suite *(numérique ou réelle) est une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, l'image* $u(n)$ *de* n *par* u *est notée traditionnellement* u_n*, qu'on appelle le terme de rang* n *de la suite. Souvent une suite est identifiée avec son image :* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. On dit aussi que* u *est la suite de terme général* u_n*.*

Exemple 3.2. *Suites arithmétiques. La suite de terme général* u_n *est dite* arithmétique *s'il existe* $r \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$*. Le nombre* r *s'appelle la* raison *de la suite. On a alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = u_0 + nr$*. D'autre part la somme* $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ *des* $n + 1$ *premiers termes de la suite vaut* $S_n = (n + 1)(u_0 + u_n)/2$*.*

Exemple 3.3. *Suites géométriques. La suite de terme général* u_n *est dite* géométrique *s'il existe* $q \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$*. Le nombre* q *s'appelle la* raison *de la suite. On a alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = u_0 q^n$*. D'autre part la somme* $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ *des* $n + 1$ *premiers termes de la suite vaut* $S_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *si* $q \neq 1$ *et* $S_n = (n + 1)u_0$ *si* $q = 1$*.*

Remarque 3.4. *Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particulier de suites récurrentes, voir la Section 6.1.4 page 73.*

Définition 3.5. *Soient* u *et* v *deux suites et* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

- *La somme* $u + v$ *est la suite de terme général* $u_n + v_n$*. On définit de même le produit de* u *et* v*, et si* v *ne s'annule pas, c'est-à-dire si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $v_n \neq 0$*, le quotient* $\dfrac{u}{v}$*.*
- *La suite* λu *note la suite de terme général* λu_n*.*

Définition 3.6. *On dit qu'une propriété* $P(n)$ *est* vraie à partir d'un certain rang *si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$ *est vraie.*

3.1.2 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 3.7.

- *On dit que la suite* $(u_n)_n$ *est* croissante *si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}.$$

- *On dit que la suite* $(u_n)_n$ *est* strictement croissante *si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

- *On dit que la suite* $(u_n)_n$ *est* décroissante *(resp.* strictement décroissante*) si la suite* $(-u_n)_n$ *est croissante (resp. strictement croissante), c'est-à-dire si*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1} \quad (\textit{resp. } u_n > u_{n+1}).$$

- $(u_n)_n$ *est dite* monotone *(resp.* strictement monotone*) si* $(u_n)_n$ *est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).*

Définition 3.8. • *Une suite u est* constante *si* $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c.$
- *Une suite u est* stationnaire *si* $\exists c \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n = c.$

Exercice 3.1. Écrire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes :
a) La suite u est positive à partir d'un certain rang.
b) La suite u est constante à partir d'un certain rang. Comment s'appelle une telle suite ?
c) La suite u est croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 3.2. Une suite arithmétique de raison r est-elle croissante ? décroissante ? constante ?
Mêmes questions pour une suite géométrique de raison r.

3.1.3 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 3.9. • *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est* majorée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leq M$. Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ est majorée si l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs est majoré (voir Définition 2.8). Un tel M est appelé un majorant de la suite.*
- *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est* minorée *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \geq m$. Autrement dit, la suite $(u_n)_n$ est minorée si l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ de ses valeurs est minoré. Un tel m est appelé un minorant de la suite.*
- *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est* bornée *si elle est majorée* et *minorée.*

Remarque 3.10. *Si la suite u est croissante (resp. décroissante) alors elle est minorée (resp. majorée) par son premier terme u_0.*

Remarque 3.11. *Une suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leq M$.*

Exercice 3.3. Soient u et v deux suites bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $u + v$ et λu sont bornées.

Exercice 3.4. Montrer qu'une suite u est majorée, resp. minorée, si et seulement si elle est majorée, resp. minorée, à partir d'un certain rang.

Exercice 3.5. Une suite arithmétique de raison r est-elle majorée ? minorée ? bornée ?
Mêmes questions pour une suite géométrique de raison r.

Exercice 3.6. Donner un exemple de suite :
a) Croissante et majorée.
b) Ni croissante, ni décroissante.
c) Ni majorée, ni minorée.
d) Croissante, ni strictement croissante à partir d'un certain rang ni stationnaire.

3.2 Limites de suites

3.2.1 Suites convergentes

Définition 3.12. *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ a pour* limite *$l \in \mathbb{R}$, et on note $u_n \to l$, si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.}$$

On dit aussi que la suite u converge*, ou tend, vers l.*

On dit qu'une suite u est convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que u converge vers l. On dit que la suite est divergente *si elle n'est pas convergente c'est à dire :*

$$\forall l \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

Remarque 3.13. *Dans la définition 3.12 on peut remplacer $< \varepsilon$ par $\leq \varepsilon$.*

Remarque 3.14. *La convergence de u vers l est la même chose que la convergence de $u - l$ vers 0.*

Remarque 3.15. *Dans la définition, l'entier N dépend de ε (voir l'exemple ci-dessous).*

Pour montrer que $u_n \to l$, on peut utiliser le plan suivant :

1. Soit $\varepsilon > 0$
2. Posons $N = \cdots$
3. Vérifions : Soit $n \geq N$, ..., on a bien $|u_n - l| < \varepsilon$
4. Donc $u_n \to l$.

Exemple 3.16. *Montrons avec la définition que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, converge vers 0. C'est-à-dire : $\frac{1}{n} \to 0$.*

Soit $\varepsilon > 0$. La question à résoudre est la suivante : existe-t-il un entier N tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq N \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$? Or $|u_n| < \varepsilon$ signifie que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ c'est à dire $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi on peut dire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$ implique que $|u_n| < \varepsilon$. On doit donc choisir un entier $N > \frac{1}{\varepsilon}$. On peut prendre, par exemple, $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$ et on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N, \Rightarrow |u_n| < \varepsilon,$$

ce qui est précisément la définition de "la suite $(u_n)_n$ tend vers 0".

Exercice 3.7. Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$ tend vers $3/2$ en utilisant la définition.

Exercice 3.8. Montrer en utilisant la définition que si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $u_n \to a$, alors $a \geq 0$ et $\sqrt{u_n} \to \sqrt{a}$.

Proposition 3.17. *Si une suite converge, sa limite est unique.*

Démonstration. Faisons un raisonnement par l'absurde : supposons que $(u_n)_n$ converge à la fois vers l_1 et l_2 avec $l_1 \neq l_2$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}|l_1 - l_2|$. D'après la définition de la convergence, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$, et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors $|u_N - l_1| < \varepsilon$ et $|u_N - l_2| < \varepsilon$. D'où,

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - u_N| + |u_N - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|.$$

Ce qui est absurde, donc l'hypothèse de départ est fausse. □

Définition 3.18. *On dit qu'une suite u* tend vers $+\infty$*, noté $u_n \to +\infty$, si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

On dit que la suite tend vers $-\infty$*, noté $u_n \to -\infty$, si*

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq B.$$

Attention ! Une suite qui tend vers $+\infty$ est une suite divergente. En particulier une suite ne converge pas vers l'infini...

Remarque 3.19. *Toute suite divergente ne tend pas vers l'infini, par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.*

Pour montrer que $u_n \to +\infty$, on peut utiliser le plan suivant :

1. Soit $A \in \mathbb{R}$
2. Posons $N = \cdots$
3. Vérifions : Soit $n \geq N$, ..., on a bien $u_n \geq A$.
4. Donc $u_n \to +\infty$.

Exercice 3.9. Montrer en utilisant la définition que $(\sqrt{n})_n$ tend vers $+\infty$.

Proposition 3.20. *1) Toute suite convergente est bornée.*
2) Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est minorée.
3) Toute suite réelle qui tend vers $-\infty$ est majorée.

Démonstration. 1) Supposons que $u_n \to l$. Soit $\varepsilon = 1 > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < 1.$$

En utilisant l'inégaltié triangulaire, on a pour tout $n \geq N$, $|u_n| < |l| + 1$. Si on pose

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |l| + 1),$$

on a $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc la suite est bien bornée. (On aurait aussi pu conclure en disant que la suite était bornée à partir d'un certain rang et donc bornée.)

2) Supposons que $u_n \to +\infty$. Soit $A = 1$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq 1.$$

Donc la suite est minorée par $m = \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, 1)$.

3) On applique 2) à $-u_n$. □

Exercice 3.10. Montrer qu'une suite arithmétique de raison r tend vers $+\infty$ si $r > 0$ et vers $-\infty$ si $r < 0$.

3.2.2 Opérations sur les limites

Proposition 3.21. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, u, v deux suites et $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. On a*

1. *Si $u_n \to l$ alors $|u_n| \to |l|$.*
2. *$u_n \to 0$ si et seulement si $|u_n| \to 0$.*
3. *Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ alors $u_n + v_n \to l + l'$.*
4. *Si $u_n \to l$ alors $\lambda u_n \to \lambda l$.*
5. *Si $u_n \to 0$ et v est bornée alors $u_n v_n \to 0$.*
6. *Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ alors $u_n v_n \to ll'$.*
7. *Si $u_n \to l$, $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $l \neq 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{l}$.*
8. *Si $u_n \to l$, $v_n \to l'$, $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $l' \neq 0$ alors $\frac{u_n}{v_n} \to \frac{l}{l'}$.*
9. *Si $u_n \to +\infty$, resp. $u_n \to -\infty$, et v est bornée (en particulier si $v_n \to l'$) alors $u_n + v_n \to +\infty$, resp. $u_n + v_n \to -\infty$.*
10. *Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to l' > 0$, resp. $l' < 0$, alors $u_n v_n \to +\infty$, resp. $u_n v_n \to -\infty$.*
11. *Si $u_n \to +\infty$ et $v_n \to +\infty$, resp. $-\infty$, alors $u_n v_n \to +\infty$, resp. $u_n v_n \to -\infty$.*
12. *Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et si $u_n \to +\infty$ ou $u_n \to -\infty$, alors $\frac{1}{u_n} \to 0$.*

Démonstration. Les démonstrations se font à partir de la définition.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. Or on a $\big||u_n| - |l|\big| \leq |u_n - l|$. Donc $n \geq N \Rightarrow \big||u_n| - |l|\big| < \varepsilon$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\big||u_n| - 0\big| = |u_n| = |u_n - 0|$, et donc quelque soit $\varepsilon > 0$ on a $\big||u_n| - 0\big| < \varepsilon \iff |u_n - 0| < \varepsilon$. D'où l'équivalence.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon/2$ (on applique la Définition 3.12 avec $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$) et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \varepsilon/2$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$ on a $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, donc
$$|u_n + v_n - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < \varepsilon.$$
4. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{\varepsilon}{|\lambda|+1} > 0$, donc par définition de $u_n \to l$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$
Pour tout $n \geq N$ on a donc $|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda| \times |u_n - l| < \dfrac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda| + 1} < \varepsilon$.

5. La suite v est bornée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\frac{\varepsilon}{|M|+1} > 0$ donc, par définition de $u_n \to l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n| < \frac{\varepsilon}{|M|+1}$. On a alors, pour tout $n \geq N$, $|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| < \frac{|M|\varepsilon}{|M|+1} < \varepsilon$.
6. On écrit $u_n v_n = (u_n - l)v_n + l v_n$. D'après 4. on a $l v_n \to l l'$. D'autre part, on a $u_n - l \to 0$ et v_n est bornée car convergente donc d'après 5. $(u_n - l)v_n \to 0$. On en déduit, d'après 3., que $u_n v_n \to l l'$.
7. D'après 1. $u_n \to l \ \Rightarrow |u_n| \to |l|$. D'autre part, comme $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$,
$$\big||u_n| - |l|\big| < \frac{|l|}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{|l|}{2} < |u_n| - |l| < \frac{|l|}{2}.$$
En particulier, pour tout $n \geq N_1$ on a $|u_n| > \dfrac{|l|}{2}$ et donc $\dfrac{1}{|u_n|} < \dfrac{2}{|l|}$. Ainsi la suite de terme général $\dfrac{1}{u_n}$ est bornée à partir d'un certain rang et est donc bornée. Par ailleurs, pour tout n, $\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{l} = (l - u_n)\dfrac{1}{l u_n}$. La suite $l - u$ tend vers 0 et la suite $\frac{1}{lu}$ est bornée, on peut donc appliquer 5. ce qui prouve le résultat.
8. $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$ or $u_n \to l$ et $\dfrac{1}{v_n} \to \dfrac{1}{l'}$ d'où le résultat.
9. On traite le cas $u_n \to +\infty$. v est bornée, en particulier minorée donc il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $v_n \geq m$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n \geq A - m$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $u_n + v_n \geq (A - m) + m = A$.
10. On traite le cas $l' > 0$. $v_n \to l'$ et $\dfrac{l'}{2} > 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$,
$$|v_n - l'| < \frac{l'}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{l'}{2} < v_n - l' < \frac{l'}{2}.$$
En particulier, on obtient, pour tout $n \geq N_1$, $v_n > \frac{l'}{2} > 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $u_n \to +\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow u_n \geq \dfrac{2|A|}{l'} \geq 0$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $u_n v_n \geq |A| \geq A$.
11. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, resp. $N_2 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N_1 \Rightarrow u_n \geq \sqrt{|A|}$, resp. $n \geq N_2 \Rightarrow v_n \geq \sqrt{|A|}$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $u_n v_n \geq |A| \geq A$.
12. On traite le cas $u_n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Pour tout $n \geq N$ on a alors $|\dfrac{1}{u_n}| = \dfrac{1}{u_n} \leq \varepsilon$.

□

Remarque 3.22. *Au 7. si $l = 0$ on ne peut rien dire.*
Exemple : $u_n = (-1)^n/n \to 0$ mais $\frac{1}{u_n} = n/(-1)^n$ n'a pas de limite (ni finie ni infinie).

Remarque 3.23. *Les quatre formes indéterminées sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.*
Exemple 1 : $u_n = n^2 \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to +\infty$.
Exemple 2 : $u_n = n + 1 \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ et $u_n + v_n \to 1$.
Exemple 3 : $u_n = n + (-1)^n \to +\infty$, $v_n = -n \to -\infty$ mais $u_n + v_n$ n'a pas de limite.
Exemple 4 : $u_n = (-1)^n/n \to 0$, $v_n = n \to +\infty$ mais $u_n v_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Exercice 3.11. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et si $u_n \to 0$ alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.

3.2.3 Limites usuelles

Fractions rationnelles

Soients $p, q \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_p$, $b_0, \ldots, b_q$ des réels tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ On considère
$$u_n = \frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k n^k}{\displaystyle\sum_{j=0}^{q} b_j n^j}.$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}$ (les plus grandes puissances). Pour le voir il suffit de mettre $\frac{a_p n^p}{b_q n^q}$ en facteur dans l'expression de u_n et d'utiliser la Proposition 3.21.

Logarithme et exponentielle

Dans ce cours, on admet les résultats suivants :

- $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$.
- $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.
- L'exponentielle "croit plus vite" que n'importe quelle puissance. C'est-à-dire, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^a} = +\infty \iff \lim_{n\to+\infty} n^a \mathrm{e}^{-n} = 0.$$

- N'importe quelle puissance positive de n "croit plus vite" que le logarithme. C'est-à-dire, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0.$$

Avec $\alpha = 1$ on obtient le cas particulier important

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

Factorielle

On a $\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$.

On admet le résultat suivant (voir Exercice 3.33) : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

3.2.4 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Proposition 3.24. *Soit une suite u qui converge vers l et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*
1) si $a < l$ alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, $u_n > a$.
2) si $l < b$, il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, $u_n < b$.
3) si $a < l < b$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $a < u_n < b$.

Démonstration. 1) On a $\varepsilon = l - a > 0$ donc, par définition de la limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < l - a$. Or $|u_n - l| < l - a \Rightarrow u_n - l > -(l - a)$. D'où $u_n > a$ pour tout $n \geq N_1$.

2) On applique 1) à $v = -u$ et $a = -b$.

3) est une conséquence de 1) et 2). □

Proposition 3.25. *[Passage à la limite dans une inégalité] On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \geq a$ (ou $u_n > a$). Si u_n a pour limite l alors $l \geq a$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons $l < a$. D'après la proposition précédente, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow u_n < a$. Soit $n = \max(N, N_1)$. On a alors $u_n < a$ mais par hypothèse $u_n \geq a$. C'est absurde. □

☠ **Attention !** Si pour tout $n \geq N$ on a $u_n > a$ et $u_n \to l$ alors on ne peut **pas** en déduire que $l > a$. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1/n > 0$ et $1/n$ tend vers 0, mais on n'a pas $0 > 0$! Moralité : les inégalités strictes se transforment en inégalités larges par passage à la limite.

Théorème 3.26. *[Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)] Soient u, v et w trois suites réelles telles que*

$$\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n, \\ u_n \to l \text{ et } w_n \to l. \end{cases}$$

Alors $v_n \to l$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$ et $n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon$. Soit $N_0 = \max(N, N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N_0$, on a

- $u_n \leq v_n \leq w_n$,
- $|u_n - l| < \varepsilon \;\Rightarrow\; -\varepsilon < u_n - l$,
- $|w_n - l| < \varepsilon \;\Rightarrow\; w_n - l < \varepsilon$.

Ainsi $\forall n \geq N_0$ on a $-\varepsilon < u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l < \varepsilon \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon$. □

Exemple 3.27. *Soit $v_n = \dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$. On va montrer le résultat sur les croissances comparées, à savoir $v_n \to 0$. On sait que $\mathrm{e} > 1$. Soit $h = \mathrm{e} - 1 > 0$. On écrit alors, pour tout $n \geq 2$ et en utilisant la formule du binôme de Newton,*

$$\mathrm{e}^n = (h+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2,$$

où on a utilisé le fait que $h > 0$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq v_n \leq \frac{2}{(n-1)h^2}$. On peut alors appliquer le théorème des gendarmes avec les suites $u_n = 0$ et $w_n = \frac{2}{(n-1)h^2}$ ce qui prouve bien que $v_n \to 0$.

Corollaire 3.28. *Soit u une suite et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \alpha_n,$$

et telle que $\alpha_n \to 0$. Alors $u_n \to l$.

Démonstration. Pour tout $n \geq N$ on a

$$-\alpha_n \leq u_n - l \leq \alpha_n.$$

Comme $-\alpha_n \to 0$ et $\alpha_n \to 0$, on a d'après le théorèmes des gendarmes $u_n - l \to 0 \Leftrightarrow u_n \to l$. □

Proposition 3.29. *Soient u et v deux suites réelles telles que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n$.*

1. *Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$.*
2. *Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$.*
3. *Si $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ alors $l \leq l'$.*

Démonstration. 1. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_1 \;\Rightarrow u_n \geq A$. Soit $N_2 = \max(N, N_1)$. Pour tout $n \geq N_2$ on a $u_n \leq v_n$ et $u_n \geq A$, donc $v_n \geq A$. On a montré que pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existait $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2 \Rightarrow v_n \geq A$, c'est précisément la définition de $v_n \to +\infty$.

2. On applique 1. aux suites $-u$ et $-v$.

3. D'après la Proposition 3.21 on a $v_n - u_n \to l' - l$. De plus, pour tout $n \geq N$ on a $v_n - u_n \geq 0$. On en déduit d'après la Proposition 3.25 que $l' - l \geq 0$. □

Exemple 3.30. *Si u est une suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison r, on a les cas suivants :*

1. *si $|r| < 1$ la suite u converge vers 0.*
2. *si $r = 1$ la suite u converge vers u_0.*
3. *si $r = -1$ la suite diverge.*
4. *si $|r| > 1$ la suite u diverge. Elle tend vers $+\infty$ si $r > 1$ et $u_0 > 0$, et vers $-\infty$ si $r > 1$ et $u_0 < 0$.*

En effet, si $r > 1$, on peut écrire $r = 1 + h$ avec $h > 0$. On a alors, en utilisant la formule du binôme de Newton,

$$r^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq 1 + nh \to +\infty.$$

Si $|r| < 1$ et $r \neq 0$ (si $r = 0$ le résultat est évident), on a $\frac{1}{|r|} > 1$, donc $(\frac{1}{|r|})^n \to +\infty$ (suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{|r|}$), ce qui implique que $|r|^n \to 0$ et donc $r^n \to 0$. Si $r = -1$ la suite n'a pas de limite (voir paragraphe sur les suites extraites).

3.3 Suites monotones, suites adjacentes

3.3.1 Borne supérieure, borne inférieure dans $\mathbb{R}$

Théorème 3.31. (Théorème de la borne supérieure)

1. *Soit A un sous-ensemble majoré non-vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément que l'on appelle la* borne supérieure *de A, notée* $\sup A$.
2. *Soit A un sous-ensemble minoré non-vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément que l'on appelle la* borne inférieure *de A, notée* $\inf A$.

Démonstration. Admis. □

Remarque 3.32. *Majorants et minorants ont été définis à la Section 2.2.5 page 24.*

Remarque 3.33. *Le théorème ci-dessus est faux si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$. Par exemple le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$ est majoré non-vide, mais n'admet pas de borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$!).*

☠ **Attention !** La borne supérieure d'un ensemble n'est pas forcément le plus grand élément de celui-ci, car par définition le plus grand élément d'un ensemble doit appartenir à l'ensemble. De même la borne inférieure d'un ensemble n'est pas forcément le plus petit élément de celui-ci.

Exemple 3.34. *L'ensemble $A =]0, 1[$ admet -1, 0 comme minorants. Sa borne inférieure est 0 mais elle n'appartient pas à A : l'ensemble A n'a pas de plus petit élément. D'autre part, 10, 4 et 1 sont des majorants de A et sa borne supérieure est 1.*

L'ensemble $A =]-\infty, 2]$ n'a pas de minorant donc n'a pas de borne inférieure et a une borne supérieure 2 qui est dans A qu'on appelle aussi maximum ou plus grand élément.

Exercice 3.12. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$.

La proposition suivante permet de caractériser la borne supérieure d'un ensemble.

Proposition 3.35. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $M = \sup A$.
2. *M est un majorant de A et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a \leq M$.*
3. *M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $a_n \to M$.*

Démonstration. On va montrer 1. ⇒ 2. ⇒ 3. ⇒ 1.

1. ⇒ 2. Par définition M est un majorant. Soit $\varepsilon > 0$, comme M est le plus petit majorant, $M - \varepsilon < M$ n'est pas un majorant donc il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$. (On a bien sur $a \leq M$ puisque M est un majorant.)

2. ⇒ 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{1}{n} > 0$, par hypothèse, il existe $a_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$. Montrons que la suite $(a_n)_n$ ainsi construite convient. Les suites de terme général $u_n = M - \frac{1}{n}$ et $w_n = M$ tendent toutes les deux vers M. Puisque pour tout n on a $u_n \leq a_n \leq w_n$ le résultat est une simple application du Théorème des gendarmes.

3. ⇒ 1. Il faut montrer que M est le plus petit majorant de A. On sait déjà que M est un majorant de A. Soit maintenant $M' < M$, on montre que M' n'est pas un majorant de A. Par hypothèse il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A qui tend vers M. Soit $\varepsilon = M - M' > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |a_n - M| < \varepsilon$. En particulier on a $a_N - M > -\varepsilon = M' - M$ et donc $a_N > M'$ ce qui prouve bien que M' n'est pas un majorant de A. □

Exercice 3.13. Ecrire une proposition similaire pour caractériser la borne inférieure d'un ensemble.

Exercice 3.14. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on définit $A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$.

a) Soient $A = [0, 1[$ et $B = \{1\}$. Déterminer $A \cup B =$ et $A + B =$.

b) On suppose que A et B admettent chacun un plus grand élément. Montrer que $A + B$ admet un plus grand élément et que $\max(A + B) = \max A + \max B$.

On suppose que A et B sont majorées.

c) Montrer que $A \cup B$ et $A + B$ sont majorées.
d) Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
e) Déterminer $\sup(A \cup B)$.
f) Est-ce que $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$?

3.3.2 Théorème des suites monotones

Théorème 3.36. *1. Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.*
2. Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Démonstration. 1. Supposons que $(u_n)_n$ est croissante et majorée. L'ensemble $A = \{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et, par hypothèse, majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure M d'après le Théorème 3.31. On va montrer que $u_n \to M$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition 3.35, on sait alors qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $M - \varepsilon < u_N \leq M$. Comme la suite $(u_n)_n$ est croissante, $\forall n \geq N$, $u_n \geq u_N$ donc on a $\forall n \geq N$, $M - \varepsilon < u_n \leq M < M + \varepsilon \Longrightarrow |u_n - M| < \varepsilon$ ce qui prouve que la suite $(u_n)_n$ converge (vers M).

2. Il suffit d'appliquer 1. à la suite $-u$. □

Théorème 3.37. *1. Toute suite réelle croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
2. Toute suite réelle décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration. 1. Soit $A \in \mathbb{R}$, puisque la suite n'est pas majorée $\exists N \in \mathbb{N}$, $u_N \geq A$. Comme la suite est croissante, $\forall n \geq N$, $u_n \geq u_N \geq A$. On a donc montré que pour tout $A \in \mathbb{R}$ il existait $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$, c'est précisément la définition de $u_n \to +\infty$.

Le 2. se fait de la même façon. □

Exemple 3.38. *On va montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.*

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. La suite est donc (strictement) croissante.*
- *Montrons qu'elle est majorée. Soit $k \geq 2$. On a $k^2 \geq k(k-1) > 0$ donc $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. On en déduit que*

$$u_n \;=\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \;\leq\; 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \;=\; 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \;\leq\; 2.$$

La suite $(u_n)_n$ est donc bien majorée, par 2.

Finalement, la suite est croissante et majorée donc elle converge.
Remarque : on sait qu'elle converge vers la borne supérieure de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et que celle-ci est inférieure ou égale à 2, mais rien ne dit qu'elle vaut 2 (c'est d'ailleurs faux).

3.3.3 Suites adjacentes

Définition 3.39. *Deux suites u et v sont dites* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si la suite $u - v$ converge vers 0.*

Théorème 3.40 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Si deux suites u et v sont adjacentes, alors elles sont convergentes et ont même limite.*

Remarque 3.41. *Le théorème reste vrai si les suites u et v ne sont croissante/décroissante qu'à partir d'un certain rang.*

Lemme 3.42. *Si u est une suite décroissante et qui tend vers 0 alors $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N < 0$. Comme u est décroissante, on a $n \geq N \Rightarrow u_n \leq u_N < 0$. Soit $\varepsilon = |u_N| = -u_N$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$. Soit $N' = \max(N, N_1)$. On a $u_{N'} \leq u_N$ et $|u_{N'}| < -u_N \Rightarrow u_N < -|u_{N'}| = u_{N'}$ ce qui est absurde. □

Démonstration du Théorème. Supposons que u est croissante et v est décroissante. Soit $w = v - u$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}). \tag{3.1}$$

Comme v est décroissante, $v_{n+1} - v_n \leq 0$, et comme u est croissante, $u_n - u_{n+1} \leq 0$. On déduit alors de (3.1) que la suite w est décroissante. De plus elle tend vers 0, donc d'après le lemme précédent on a $w_n \geq 0$ pour tout n. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$. La suite u est donc croissante et majorée par v_0. Donc elle converge vers un certain l. De même v est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers un certain l'. On a alors $u_n - v_n \to l - l'$ mais par hypothèse $u_n - v_n \to 0$. Par unicité de la limite on obtient $l = l'$. On remarque aussi que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n.$$

□

Remarque 3.43. *Si les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont respectivement* strictement *croissante et* strictement *décroissante, on peut remplacer $u_n \leq l \leq v_n$ par $u_n < l < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 3.44. *Soient u et v les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$. On va montrer que ces deux suites sont adjacentes.*

- *On montre que la suite u est (strictement) croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

- *On montre que la suite v est (strictement) croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n \times n!}\right) \\
&= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\
&= \frac{n+2}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\
&= \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} \\
&= -\frac{1}{n(n+1) \times (n+1)!} \ < \ 0.
\end{aligned}$$

- *On montre que la suite $u - v$ tend vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n - v_n = -\dfrac{1}{n \times n!} \to 0$.*

Les deux suites u et v sont bien adjacentes, elles convergent donc vers une même limite l.
N.B. On peut montrer que cette limite vaut e.

Théorème 3.45 (Théorème des segments emboités)**.** *Soient a et b deux suites telles que*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \\ b_n - a_n \to 0. \end{cases}$$

alors il existe un (unique) réel l tel que $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$.

Attention ! Le théorème n'est vrai qu'avec des intervalles fermés.

Démonstration. Les suites a et b sont adjacentes ($[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ implique que $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$ donc les suites a et b sont respectivement croissante et décroissante) et ont donc une limite commune l. De plus on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$. Ainsi $\{l\} \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Réciproquement, soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ (l'intersection est non-vide puisqu'elle contient l). Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leq x \leq b_n$, et par passage à la limite on obtient $l \leq x \leq l$, donc $x = l$, ce qui signifie que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \subset \{l\}$. □

3.4 Suites extraites (Sous-suites)

3.4.1 Suites extraites et convergence

Définition 3.46. *On appelle* extractrice *toute application* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Définition 3.47. *Étant donnée une suite* $(u_n)_n$*, on appelle* suite extraite*, ou* sous-suite*, de* $(u_n)_n$ *toute suite* $(u_{\varphi(n)})$ *avec* φ *une extractrice.*

Exemple 3.48. *Les suites* $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, \ldots)$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_3, u_5, \ldots)$ *sont des suites extraites de la suite* $(u_n)_n$*. Elles correspondent respectivement aux extractrices* $\varphi(n) = 2n$ *et* $\varphi(n) = 2n + 1$.

Attention ! L'extractrice φ doit être *strictement* croissante. Par exemple $(u_{n^2-n})_n$ n'est pas une suite extraite de $(u_n)_n$ car $\varphi(n) = n^2 - n$ n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{N}$ (on a $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$).

Remarque 3.49. *Si* φ *est un extractrice, alors* $\varphi(n) \geq n$ *pour tout* n*. Si* $\varphi(n) = n$ *alors* φ *est l'identité et la suite extraite correspondante est la suite entière.*

Exercice 3.15. Montrer que si φ est une extractrice alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n.

Proposition 3.50. *Si la suite* u *converge vers* l*, alors toute suite extraite de* u *converge vers* l*.*

Démonstration. Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de u. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. On a alors pour tout $n \geq N$, $\varphi(n) \geq \varphi(N) \geq N$ et donc $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$. Ce qui prouve que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ tend vers l. □

Corollaire 3.51 (Pour montrer qu'une suite est divergente)**.** *Soit* u *une suite. On suppose qu'il existe deux suites extraites* v *et* w *de* u *telles que*

1. $v_n \to a$,
2. $w_n \to b$,
3. $a \neq b$.

Alors la suite u *est divergente.*

Exemple 3.52. *Montrons que si* $r = -1$ *et* $u_0 \neq 0$*, la suite géométrique de raison* r *et de premier terme* u_0 *diverge. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $u_n = u_0 \times (-1)^n$*. Ainsi, pour tout* n *on a* $u_{2n} = u_0$ *et* $u_{2n+1} = -u_0$*. Les deux suites extraites* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *convergent respectivement vers* u_0 *et* $-u_0$*. Comme* $u_0 \neq 0$*, ces deux sous-suites ont des limites distinctes, et donc la suite* u *diverge.*

Exercice 3.16. Montrer que, si une suite u a ses deux suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui convergent et ont la même limite l, alors la suite u converge vers l.
Solution : Supposons que $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - l| < \varepsilon$ et $p \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - l| < \varepsilon$. Soit $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Pour tout $n \geq N$, soit n est pair et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, soit n est impair et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Si n est pair, $n \geq N \geq 2N_1$ entraine que $p \geq N_1$ et donc $|u_n - l| = |u_{2p} - l| < \varepsilon$. Si n est impair, $n \geq N \geq 2N_2 + 1$ entraine que $p \geq N_2$ et donc $|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| < \varepsilon$. On a donc, pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que la suite u tend vers l.

3.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 3.53. *[Théorème de Bolzano-Weierstrass] Toute suite réelle bornée possède une suite extraite convergente.*

Démonstration. Soit $(u_n)_n$ une suite bornée, on va construire par récurrence deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ adjacentes puis une extractrice φ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$. On pourra alors conclure à l'aide du Théorème des gendarmes.

Etape 1 : on construit deux suites a et b telles que

– a est croissante et b décroissante,

– pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) \geq 0$,

– pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u.

On va procéder par *dichotomie*. Comme $(u_n)_n$ est bornée il existe $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 \leq u_n \leq b_0$. On construit alors les a_n et b_n par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont construits et vérifient les trois propriétés ci-dessus. Considérons le milieu $m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ de $[a_n, b_n]$. On a alors

$$a_n \leq m_n \leq b_n \text{ et } b_n - m_n = m_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0).$$

Puisque $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite u, au moins l'un des deux intervalles $[a_n, m_n]$ ou $[m_n, b_n]$ en contient également une infinité. Si c'est le cas pour $[a_n, m_n]$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$, sinon on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans les deux cas, les trois propriétés ci-dessus sont bien vérifiées.

Etape 2 : construction de la suite extraite. On définit une extractrice φ par récurrence de la façon suivante :

– On pose $\varphi(0) = 0$.

– Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $\varphi(n+1)$ comme le plus petit entier m strictement supérieur à $\varphi(n)$ tel que $u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Un tel entier existe toujours puisque l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de la suite u.

Etape 3 : on conclut. Par construction les deux suites a et b sont adjacentes donc convergent vers une même limite l. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$. D'après le Théorème des gendarmes, la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ tend aussi vers l. □

3.5 Suites de Cauchy

Définition 3.54. *Une suite u est dite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall p \geq N,\ |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

Exercice 3.17. Écrire la négation de la définition d'une suite de Cauchy.

Théorème 3.55. *Une suite de nombres réels est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Au programme : si une suite est convergente alors elle est de Cauchy. La réciproque est admise.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon/2$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, $\forall n \geq N, \forall p \geq N$, on a $|u_n - u_p| = |(u_n - l) + (l - u_p) \leq |u_n - l| + |u_p - l| < \varepsilon$. □

Remarque 3.56. *Pour montrer qu'une suite diverge, il suffit de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy.*

Exercice 3.18. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente. Indication : montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.19. Soit k un réel tel que $0 \leq k < 1$ et soit $(u_n)_n$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k|u_{n+1} - u_n|.$$

a) Démontrer que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ pour tout entier $n \geq 0$.

b) Démontrer que si p et q sont deux entiers tels que $p \geq q \geq 0$ alors

$$|u_p - u_q| \leq k^q \frac{|u_1 - u_0|}{1-k}.$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy (et donc qu'elle converge).

3.6 Exercices

Exercice 3.20. Écrire la définition de “la suite u est divergente”.

Exercice 3.21. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivantes.

- **a)** $(-1)^n \dfrac{n+1}{n}$
- **b)** $\dfrac{n}{n+1}$
- **c)** $\dfrac{1}{n^2+1}$
- **d)** $\dfrac{n}{n^2+1}$
- **e)** $n - \sqrt{n^2 - n}$
- **f)** $\sqrt{n(n+1)} - n$,
- **g)** $\dfrac{n}{2} \sin \dfrac{n\pi}{2}$
- **h)** $\dfrac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$
- **i)** $\sin(\dfrac{2n\pi}{3})$
- **j)** $\dfrac{E(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$,
- **k)** $\dfrac{\cos(n\theta)}{n}$,
- **l)** $\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$,
- **m)** ne^{-n},
- **n)** $\dfrac{2^n - 3^{n+1}}{5^{2n}}$,
- **o)** $\ln(\dfrac{1+n}{n^2})$,
- **p)** $\dfrac{n^2 + (-1)^n \sqrt{n}}{2n+1}$.

Rappel : $\sin(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$; $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

Exercice 3.22. Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On définit les suites u et v par $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. En déduire que ces deux suites convergent et ont la même limite.

Exercice 3.23. Montrer que

$$\bigcap_{n \geq 1} \left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right] = [1, 2].$$

Exercice 3.24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Montrer que la suite u est convergente et calculer sa limite. (Indication : trouver un encadrement et utiliser le théorème des gendarmes.)

Exercice 3.25. Soit $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{1}{2^k} = \cos \frac{1}{2} \times \cdots \times \cos \frac{1}{2^n}$. Etudier la convergence de cette suite et calculer sa limite éventuelle. (Indication : utiliser la relation $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.)

Exercice 3.26. Soient a et b les suites définies par $0 < a_0 < b_0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < a_n < b_n$.

b) Montrer que a est croissante et b est décroissante.

c) En déduire que les suites a et b convergent.

d) Montrer que les suites a et b ont même limite.

Exercice 3.27. Soit $A = \left\{ \dfrac{1+\cos n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

a) Soit u la suite de terme général $\dfrac{1+\cos n}{n}$, $n \geq 1$. Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

b) Montrer que A admet un max.

c) Calculer $\inf A$. A admet-il un min ?

Exercice 3.28. Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. (Justifier la réponse.)

a) Une suite convergente dont tous les termes sont des entiers est constante à partir d'un certain rang.
b) Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, u_{2p} est positif et u_{2p+1} est négatif, alors la suite u diverge.
c) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$ alors la suite u converge.
d) Si la suite $(nu_n)_n$ est bornée alors la suite u converge.
e) Si u est croissante, alors u tend vers $+\infty$.
f) Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
g) Si $u_n \to \frac{1}{2}$ alors la suite u est positive partir d'un certain rang.
h) Toute suite monotone est convergente.
i) Toute suite croissante et majorée est bornée.
j) Si la suite u est décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \geq 0$, alors $u_n \to 0$.
k) Une suite à termes positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
l) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$ et $v_n \to 0$ alors $u_n \to 0$.
m) Si la suite $u_n \to l$ alors $u_{n+1} - u_n \to 0$.
n) Si la suite $(|u_n|)_n$ converge alors la suite $(u_n)_n$ converge.
o) Si les suites u et v divergent alors la suite $u + v$ diverge.
p) Si les suites u et v divergent alors la suite uv diverge.
q) Si la suite u converge et la suite v diverge alors la suite $u + v$ diverge.
r) Si la suite u converge et la suite v diverge alors la suite uv diverge.
s) Pour toute suite v, si $u_n \to 0$ alors $u_n v_n \to 0$.
t) Si $u_n v_n \to 0$ alors soit $u_n \to 0$ soit $v_n \to 0$. (*Indication* : considérer l'exemple $u_n = (1 + (-1)^n)/2$, $v_n = (1 - (-1)^n)/2$.)
u) Si $u_n \to l$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ alors $l > 0$.
v) Si u est une suite croissante et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq 7$ alors $u_n \to 7$.
w) On ne modifie pas le fait qu'une suite converge ou diverge en modifiant un nombre fini de ses termes.

Exercice 3.29. Soit a_n une suite de réels *positifs* telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n.$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{np} \leq na_p$.
On rappelle que pour deux entiers naturels non nuls n et p quelconques, il existe deux entiers naturels q et r tels que $n = pq + r$ et $0 \leq r \leq p - 1$.
b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists q \in \mathbb{N}, \quad \exists r \in \{0, \dots, p-1\}, \quad a_n \leq qa_p + a_r.$$

c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \exists r \in \{0, \dots, p-1\}, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{a_r}{n},$$

et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p} + \frac{\max\{a_0, \dots, a_{p-1}\}}{n}.$$

d) Justifier que l'ensemble $\left\{\frac{a_k}{k} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure qu'on notera λ.
Dans les deux questions qui suivent, ε désigne un réel strictement positif fixé.
e) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{a_p}{p} < \lambda + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
f) En déduire que, pour ce p, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda \leq \frac{a_n}{n} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\max\{a_0, \dots, a_{p-1}\}}{n}.$$

g) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = \lambda$.

Exercice 3.30. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que $(u_n)_n$ converge. (Indication : faire intervenir les suites extraites $(u_{6n})_n$ et $(u_{6n+3})_n$.)

Exercice 3.31. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers l. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$ (v est la moyenne de Césaro de u). Montrer que la suite v converge vers l.
Indications : traduire la convergence de la suite u_n vers l : "$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \dots$", puis découper la somme qui définit v_n avec l'entier n_0 introduit dans la définition en deux sommes et enfin étudier la limite de chacune des 2 sommes.

Exercice 3.32. Soit $A \subset \mathbb{R}$. On rappelle que A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ avec $x < y$ il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$. Montrer qu'un ensemble A est dense si et seulement si tout élément de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite d'éléments de A, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$.

Exercice 3.33. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, l'objectif de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. On note $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

a) Montrer que, si $x \neq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Pourquoi a-t-on supposé $x \neq 0$?

b) En déduire que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|u_n|$.

c) Montrer que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_n| \leq \dfrac{2^{n_0}}{2^n}|u_{n_0}|$.

d) Conclure.

Exercice 3.34. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la suite u de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On va montrer que u converge.

a) On suppose dans cette question que $x \geq 0$.
  i) Montrer que la suite u est croissante.
  ii) En écrivant u_n comme $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ (pour $n \geq n_0$) et en utilisant le **c)** de l'Exercice 3.33, montrer que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq u_{n_0} + 2u_{n_0}\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0+1}\right)$. En déduire que la suite u est majorée.
  iii) Conclure.

b) On suppose cette fois que $x < 0$. On note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
  i) Montrer que la suite v est décroissante à partir d'un certain rang.
  ii) Montrer que la suite w est croissante à partir d'un certain rang.
  iii) Montrer que les suites v et w convergent vers une même limite.
  iv) Conclure (on pourra utiliser l'Exercice 3.16).

N.B. On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}^x$.

Chapitre 4

Nombres complexes

4.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

4.1.1 Définitions

Les nombres complexes sont, par définition, les éléments $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels on définit

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y'),\\ (x, y) \times (x', y') &= (xx' - yy', xy' + yx').\end{aligned}$$

On note aussi

$$-(x, y) = (-x, -y).$$

L'ensemble des nombres complexes (c'est-à-dire $\mathbb{R}^2$ muni de ces opérations) est noté $\mathbb{C}$. On va considérer les éléments de $\mathbb{C}$ comme des "nombres" z plutôt que comme des couples (x, y). On notera :

$$0 = (0, 0) \quad \text{et} \quad 1 = (1, 0).$$

Tout comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a une structure de corps commutatif, c'est-à-dire qu'il vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 4.1. *Si z, z', z'' sont trois nombres complexes, alors*

i) $z + 0 = 0 + z = z$,
ii) $z + z' = z' + z$,
iii) $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$,
iv) $z + (-z) = (-z) + z = 0$,
v) $z \times 1 = 1 \times z = z$,
vi) $z \times z' = z' \times z$,
vii) $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$,
viii) $z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$,
ix) Si $z \neq 0$ alors il existe un unique nombre complexe, noté $\frac{1}{z}$, tel que $z \times \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} \times z = 1$.

Exercice 4.1. Si $z = (x, y)$, montrer que $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$.

On note i le nombre complexe

$$i = (0, 1),$$

et on a donc

$$i \times i = (0, 1) \times (0, 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0),$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

La multiplication et l'addition de $(x, 0)$ et $(x', 0)$ coïncident avec celles pour x et x', c'est-à-dire que

$$(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0) \text{ et } (x, 0) \times (x', 0) = (xx', 0).$$

On peut donc identifier $\mathbb{R}$ avec l'ensemble des nombres complexes de la forme $(x, 0)$, et on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Les nombres complexes de la forme $(0, y)$ sont appelés les *imaginaires purs*. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

4.1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Proposition 4.2 (Forme algébrique des nombres complexes)**.** *Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme*

$$z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. On a $z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \times (y, 0)$, d'où le résultat d'après les conventions de notation ci-dessus. □

On appelle z l'*affixe* du nombre complexe, x est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et y est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{I}m(z)$.

Remarque 4.3. *i) $Re(z)$ et $Im(z)$ sont des nombres réels.*

ii) Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même *partie réelle et* même *partie imaginaire.*

iii) La multiplication devient $z \times z' = (x + iy) \times (x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$.

Définition 4.4. *Le nombre $\overline{z} = x - iy$ s'appelle le* conjugué *de $z = x + iy$.*

On vérifie facilement que
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$,
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$,
- $-\overline{z} = \overline{-z}$,
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\overline{\overline{z}} = z$,
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$,
- $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Définition 4.5. *Le* module *de z est le réel positif noté $|z|$ et défini par*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Remarque 4.6. *Si x est un réel, le module de x est la valeur absolue de x.*

Attention ! On ne peut pas comparer deux nombres complexes avec $<, >, \leq, \geq$ (en particulier un nombre complexe n'est ni positif ni négatif). Mais on peut comparer le module de deux nombres complexes.

Exercice 4.2. Vérifier que pour tous complexes z, z' on a

a) $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\mathrm{Re}(z\overline{z})$.

b) $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$ et $|z| \geq |\mathrm{I}m(z)| \geq \mathrm{I}m(z)$.

Lemme 4.7 (Inégalité triangulaire)**.** *Soient z, z' deux nombres complexes. On a*

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$,
2. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{z'}| + |z'|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2. \end{aligned}$$

2. On écrit $|z| = |(z - z') + z'| \leq |z - z'| + |z'|$ d'où $|z| - |z'| \leq |z - z'|$. De même on a $|z'| - |z| \leq |z' - z|$. En combinant les deux on obtient le résultat.

□

Exercice 4.3. Donner une interprétation géométrique de $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{I}m(z)$, $|z|$, $\overline{z}$, $z \mapsto z + a$ où $a \in \mathbb{C}$ est donné.

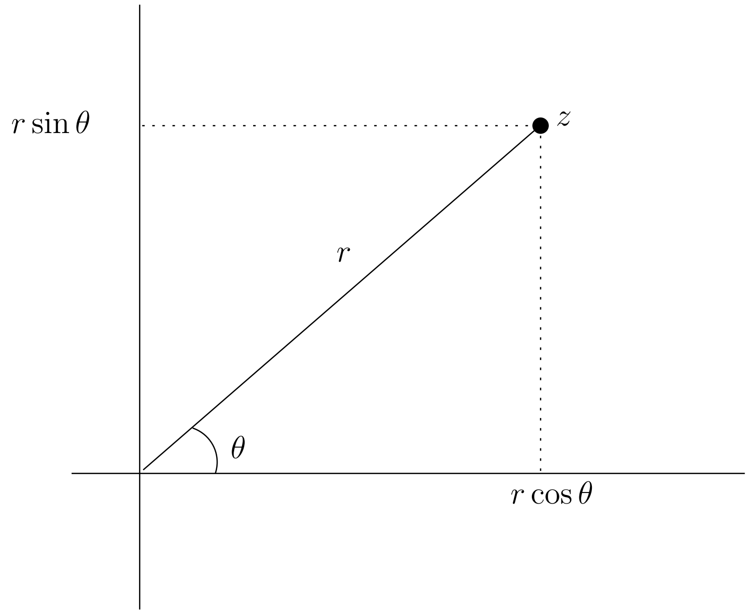
4.1.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 4.8 (Forme trigonométrique d'un nombre complexe)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul. Il existe $r > 0$ (en particulier r est réel) et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que*

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)). \tag{4.1}$$

Le nombre θ s'appelle un argument du nombre complexe z et on le note $arg(z)$.

Idée de démonstration. Un nombre complexe est un point du plan de coordonnées (x, y). Or tout point du plan est aussi uniquement défini par sa distance à l'origine (qui est le nombre r) et l'angle entre le demi-axe $0x$ et le vecteur $0z$. □



Remarque 4.9. *On a $r = |z|$.*

Exercice 4.4. Mettre $z = 2 + 2i$ sous forme trigonométrique.

Exercice 4.5. Deux complexes $z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 4.10. *L'exercice précédent montre que l'argument d'un nombre complexe n'est pas unique.*

Proposition 4.11. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. z admet un unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Celui-ci est appelé argument principal de z et est noté $\mathrm{Arg}(z)$.*

Proposition 4.12. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et θ, θ' des arguments de z et z' respectivement. Alors $\theta + \theta'$ est un argument de zz'.*

Exercice 4.6. Démontrer la proposition précédente.

Proposition 4.13 (Formule de De Moivre)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, elle se fait par récurrence en utilisant le lemme précédant. Pour n négatif, on note que $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$ et on applique ce qui précède à $-\theta$ et $-n \in \mathbb{N}$. □

4.1.4 Remarque sur les suites de nombres complexes

Une *suite complexe* est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit qu'une suite complexe $(u_n)_n$ *converge* vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

l s'appelle la *limite* de la suite, et on note $u_n \to l$. La partie réelle et la partie imaginaire d'une suite complexe sont des suites réelles. On utilisera le résultat suivant.

Proposition 4.14. *Une suite complexe converge vers $l \in \mathbb{C}$ si et seulement si $(Re(u_n))_n$ converge vers $Re(l)$ et $(Im(u_n))_n$ converge vers $Im(l)$.*

4.2 Exponentielle complexe

4.2.1 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition 4.15. *Si $z = x + iy$ est un nombre complexe, on définit l'exponentielle de z, notée $\exp z$ ou e^z par*

$$\exp z = \mathrm{e}^x(\cos(y) + i\sin(y)),$$

où e^x est l'exponentielle usuelle (voir page 59) du nombre réel x.

L'une des raisons de cette définition est qu'elle préserve les "propriétés algébriques" de l'exponentielle usuelle.

Proposition 4.16. *Soient z, z' deux nombres complexes. Alors*

1. $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$.
2. *pour tout $n \in \mathbb{Z}$,* $(\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$.
3. $\mathrm{e}^z \neq 0$ *et* $\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$.

Exercice 4.7. Démontrer la proposition précédente.

Exercice 4.8. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que
a) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{R}e(z)}$.
b) $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.

Remarque 4.17. *On a défini l'exponentielle complexe à l'aide de* cos *et* sin*, qui peuvent être définies de façon géométrique. De même les identités pour* $\cos(a + b)$ *et* $\sin(a + b)$ *peuvent être montrées de façon géométrique, et on peut retrouver toutes les formules à partir de celles-ci.*

Il existe une définition de l'exponentielle complexe sous la forme de "série entière" :

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

qui sera étudiée dans un cours d'analyse plus avancé (voir aussi l'Exercice 3.34, page 43). La cosinus et le sinus sont alors définis à partir de cette dernière comme la partie réelle et la partie imaginaire de l'exponentielle complexe du nombre $i\theta$.

4.2.2 Exponentielle complexe et forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans le cas où $z = i\theta$ est imaginaire pur, la Définition 4.15 donne

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Ceci permet de réécrire un nombre complexe sous forme trigonométrique comme

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta}.}$$

Remarque 4.18. *Deux complexes $r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $r'\mathrm{e}^{i\theta'}$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.*

Cas particuliers importants :

$$\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{2i\pi} = 1}.$$

☠ **Attention !** Ne pas confondre e^x lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$!

Exercice 4.9. Montrer que $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.

Proposition 4.19. *[Formules d'Euler] Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

4.2.3 Linéarisation et opération inverse

On donne ici deux applications des formule d'Euler de De Moivre.
Linéarisation : il s'agit d'écrire $\cos^n(\theta)$ ou $\sin^p(\theta)$ comme une somme de termes de la forme $\sin(k\theta)$ ou $\cos(k\theta)$, avec k entier. On utilise pour cela la formule d'Euler et la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Il s'agit ensuite de regrouper deux à deux les termes dont les puissances sont opposées l'une de l'autre. Cette procédure sera très utile dans le cours d'intégration.

Exemple 4.20. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned}
\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\Big((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta}) + 3(e^{i\theta})(e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3\Big) \\
&= \frac{1}{8}\Big(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\Big) \\
&= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{8}\cos(\theta).
\end{aligned}$$

Opération inverse : on veut cette fois exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(p\theta)$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$. On utilise cette fois la formule de De Moivre.

Exemple 4.21. *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a*

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= Re\big(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)\big) \\
&= Re\big((\cos\theta + i\sin\theta)^3\big) \\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta).
\end{aligned}$$

4.3 Équations à coefficients complexes

4.3.1 Equation du second degré

L'une des raisons pour lesquelles on a souhaité introduire les nombres complexes est que certaines équations du second degré n'avaient pas de solutions réelles, par exemple l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Elle en a cependant deux dans $\mathbb{C}$: i et $-i$. Qu'en est-il d'une équation du second degré générale dont les coefficients sont eux aussi des nombres complexes :

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0?$$

La méthode est essentiellement la même que dans $\mathbb{R}$.

Lemme 4.22. *Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. L'équation $z^2 = Z$ possède exactement deux solutions qui sont appelées racines carrées du nombre Z. Si z_0 est l'une d'entre elles alors l'autre est $-z_0$.*

☠ **Attention !** Lorsque x est un réel positif le nombre $\sqrt{x}$ désigne l'unique racine carrée positive de x. Pour un nombre complexe Z ses deux racines carrées seront des nombres complexes et n'auront donc pas de signe. La notation $\sqrt{Z}$ serait donc ambiguë et on ne l'utilisera jamais ! !

Démonstration. Soit $Z \in \mathbb{C}^*$. On écrit Z sous forme trigonométrique, $Z = R\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $R > 0$ et on cherche une solution de l'équation $z^2 = Z$ sous la forme $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}$. Si z est solution alors

$$R\mathrm{e}^{i\theta} = r^2\mathrm{e}^{2i\alpha},$$

avec $r^2 > 0$. On en déduit donc, cf Remarque 4.18, que $R = r^2$ et $2\alpha = \theta + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi $r = \sqrt{R}$ et $\alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, et donc

$$z = \sqrt{R}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\mathrm{e}^{ik\pi} = (-1)^k\sqrt{R}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} = \pm\sqrt{R}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Réciproquement, on vérifie que ces deux nombres sont bien solutions de l'équation $z^2 = Z$. □

Proposition 4.23. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède exactement deux solutions lorsque $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ et une seule solution lorsque $\Delta = 0$. Si δ est une racine carrée de Δ alors les solutions sont*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

Tout comme pour les équations à coefficients réels Δ est appelé le *discriminant* de l'équation.

Démonstration. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à l'équation

$$a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

En notant δ une racine carrée de Δ on en déduit que z est solution si et seulement si $z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\delta}{2a}$ et donc si et seulement si $z = z_1$ ou $z = z_2$. □

Exemple 4.24. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 - 8z + 4 - i = 0$.*

On calcule $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (4 - i) = 16i = 16\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$. Une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{16}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}(1+i)$. Les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{8 - 2\sqrt{2}(1+i)}{2 \times 4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}$$

et

$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{8 + 2\sqrt{2}(1+i)}{2 \times 4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

4.3.2 Calcul des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique

Dans la pratique, la méthode utilisée dans la section précédente pour la recherche d'une racine carrée nécessite de savoir mettre un nombre complexe donné (le discriminant) sous forme trigonométrique.

Exemple 4.25. *On souhaite résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 - i = 0$. On calcule*

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (3 - i) = -3 + 4i.$$

Si on veut mettre Δ sous forme trigonométrique, on calcule $|\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ et il faut ensuite trouver θ tel que $\cos(\theta) = -\frac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = \frac{4}{5}$...

On va chercher à calculer une racine carrée d'un nombre complexe directement sous forme algébrique. Soit $Z = a + ib \in \mathbb{C}$ on cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$. En développant $(x + iy)^2$ et en identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient les deux équations suivantes :

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{et} \quad 2xy = b.$$

Ces deux équations suffisent pour trouver x et y mais il est plus commode d'ajouter une troisième équation en remarquant que si $Z = z^2$ alors $|Z| = |z|^2$, ce qui se réécrit

$$\sqrt{a^2 + b^2} = x^2 + y^2.$$

On va résoudre ces équations pour l'exemple ci-dessus.

Exemple 4.26. *On cherche une racine carrée de $\Delta = -3 + 4i$. Les équations ci-dessus deviennent ainsi*

$$x^2 - y^2 = -3, \quad 2xy = 4 \quad \textit{et} \quad x^2 + y^2 = 5.$$

En utilisant la première et la dernière équation on trouve facilement

$$x^2 = 1 \quad \textit{et} \quad y^2 = 4,$$

d'où $x = \pm 1$ et $y = \pm 2$. Enfin, en utilisant la deuxième équation on en déduit que x et y doivent avoir le même signe ($xy = 2 > 0$!). On trouve ainsi les deux racines carrées de Δ : $1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

On prend ensuite, par exemple, $\delta = 1 + 2i$ (que se passerait-il si on choisissait $\delta = -1 - 2i$?) et on trouve que les deux racines de l'équation $z^2 - 3z + 3 - i = 0$ sont

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} = 1 - i \quad \textit{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} = 2 + i.$$

4.3.3 Théorème fondamental de l'algèbre

On admet le résultat suivant

Théorème 4.27. *Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ admet une racine complexe.*

Cet énoncé signifie qu'une équation de la forme

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$, admet toujours une solution complexe. C'est faux si on reste dans les réels : $z^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution réelle. On a vu précédemment que le théorème est vrai pour les polynômes de degré 2.

Corollaire 4.28. *Si P est un polynôme complexe de degré $n \geq 1$, alors il s'écrit*

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k),$$

où les z_k sont les racines de P.

4.3.4 Racines n-ième d'un nombre complexe

Parmi les équations de degré n, il est facile de trouver les solutions de celles de la forme $z^n = Z$ où Z est un nombre complexe fixé.

Définition 4.29. *Soit $Z \in \mathbb{C}$. Les nombres complexes z tels que $z^n = Z$ sont appelés* racines n-ièmes *de Z.*

Pour les calculer, la méthode consiste à écrire Z sous forme trigonométrique $Z = R\mathrm{e}^{i\theta}$, on cherche alors z également sous forme trigonométrique : $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}$. Le nombre z vérifie $z^n = Z$ si et seulement si

$$(r\mathrm{e}^{i\alpha})^n = R\mathrm{e}^{i\theta},$$

ce qui est équivalent à

$$r^n = R \text{ et } n\alpha = \theta + 2k\pi.$$

Ainsi, on a

$$r = R^{\frac{1}{n}} \text{ et } \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \ \ \forall k = 0, \ldots, n-1$$

(pour $k = n$ on retrouve le même résultat que pour $k = 0$, pour $k = n + 1$ le même que pour $k = 1$,. . .).

Définition 4.30. *Les* racines n-ièmes de l'unité *sont les nombres complexes tels que* $z^n = 1$.

En appliquant ce qui précède à $Z = 1$, on en déduit que les racines n-ièmes de l'unité sont les n nombres complexes

$$z_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Géométriquement, ce sont les sommets du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre l'origine et de rayon 1 (cercle trigonométrique) et ayant le point d'affixe 1 pour sommet. Par exemple, les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = \overline{j}$.

Exercice 4.10. Résoudre $z^3 = 4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$.

Exercice 4.11. Montrer que la somme des n racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

4.4 Exercices

Exercice 4.12.

a) Montrer que $A = (1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$ est réel.

b) On donne $z = 3 - 2i$. Déterminer les parties réelle et imaginaire de l'inverse de z.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $(1 + 2i)z - 3 + 5i = 0$, $2z + 3\overline{z} = 5$, $\overline{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 4.13.

a) Calculer le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$, $2i(1 + i)(1 + i\sqrt{3})$, $\frac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i}$.

b) Montrer que $(-1 + i)^{10} = -32i$.

c) Calculer le module et un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$. En déduire z^6.

d) Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\overline{z} = 1/z$.

Exercice 4.14. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$i\mathrm{e}^{i\theta}, \; 1 + \mathrm{e}^{i\theta}, \; \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{i\alpha}, \quad (\theta, \, \alpha \in [0, 2\pi]).$$

Exercice 4.15.

a) Exprimer en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\cos(2\theta), \; \sin(2\theta), \; \cos(3\theta), \; \sin(6\theta).$$

b) Linéariser

$$\cos^2\theta, \; \sin^3\theta, \; \sin^4\theta, \; (\sin^2\theta)(cos^3\theta).$$

Exercice 4.16. Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

a) Calculer les modules et arguments de z_1 et z_2.

b) Donner la forme algébrique et trigonométrique de z_1z_2.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4.17. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants :

a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3\}$.

b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, arg(z) = \pi/4 + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - \overline{z} = 2\}$.

d) $A_4 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{|z-1|}{|z-i|} = 1\}$.

e) $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \,|\; z + \overline{z} = 2|z - 1|\}$.

Exercice 4.18. Calculer les racines sixièmes de l'unité.

Exercice 4.19. Calculer les racines 4-ièmes de -1 et les racines 5-ièmes de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 4.20.

a) Calculer les racines carrés de -7, $8i$, $-2i$, $1 - i$, $-3 + 4i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

i) $z^2 - 2z + 5 = 0$.

ii) $z^2 + (4 - 6i)z - 5 - 14i = 0$.
iii) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$.

Exercice 4.21. Soient $\phi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\phi)z + 1 = 0$.
b) En déduire les solutions de l'équation $z^{2n} - 2\cos(\phi)z^n + 1 = 0$.

Exercice 4.22.
a) Montrer que l'équation

$$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0, \qquad (E)$$

admet une solution réelle et une solution imaginaire pur, puis résoudre (E).
b) Montrer que les points dont les affixes sont les solutions de (E) sont alignés.

Exercice 4.23.
a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué.
b) Déterminer les nombres complexes non nuls z tel que z, $1/z$ et $1 - z$ aient le même module.

Exercice 4.24. Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1 et $S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$.
b) En déduire que $S = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k$.
c) Calculer ωS et en déduire la valeur de S.

Exercice 4.25.
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^5 - 1 = 0$ et représenter les solutions dans le plan complexe.
On pose $u = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
b) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$.
c) Vérifier que

$$u + u^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } u^2 + u^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

d) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, puis calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Partie II. Fonctions réelles d'une variable réelle

Chapitre 5

Fonctions et limites

5.1 Généralités

On a vu au Chapitre 1, qu'étant donnés deux ensembles E et F, une fonction f de E dans F est la donnée pour tout élément $x \in E$ d'un unique élément $y \in F$ que l'on note $f(x)$. Lorsque l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction réelle. Lorsque l'ensemble de départ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction d'une variable réelle. L'ensemble de départ est alors appelé domaine de définition de la fonction f et est noté parfois D_f. Par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}^*$.

L'objet de ce chapitre et des suivants est l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle. Dans toute la suite on parlera simplement de fonction pour fonction réelle d'une variable réelle.

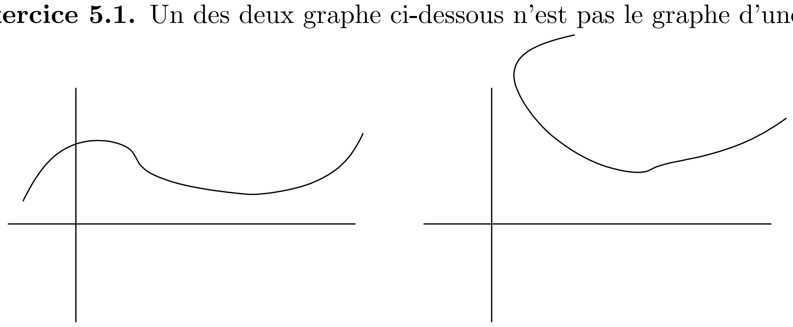
5.1.1 Définitions

Définition 5.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Le* graphe *de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}.$$

L'ensemble $f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f,\ y = f(x)\}$ est appelé l'image de f. On le note parfois $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5.1. Un des deux graphe ci-dessous n'est pas le graphe d'une fonction. Lequel ? Pourquoi ?



Définition 5.2. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que f est*

1. croissante *si $\forall (x, x') \in D_f \times D_f,\ x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$,*
2. strictement croissante *si $\forall (x, x') \in D_f \times D_f,\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$,*
3. décroissante *si $\forall (x, x') \in D_f \times D_f,\ x \geq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$,*
4. strictement décroissante *si $\forall (x, x') \in D_f \times D_f,\ x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$,*
5. monotone *si elle est croissante ou décroissante,*
6. strictement monotone *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Définition 5.3. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que f est*

1. majorée *si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$. De façon équivalente, f est majorée si son image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$.*
2. minorée *si $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ f(x) \geq m$. De façon équivalente, f est minorée si son image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble minoré de $\mathbb{R}$.*

3. bornée *si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire* $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in D_f$, $m \leq f(x) \leq M$.

Exercice 5.2. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$f \text{ est bornée} \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ |f(x)| \leq K.$$

Définition 5.4. *Soit* $f : D_f \to \mathbb{R}$. *On dit que*

1. f *admet un* minimum *si* $\exists x_0 \in D_f$, $\forall x \in D_f$, $f(x_0) \leq f(x)$. *On note alors* $f(x_0) = \min\limits_{x \in D_f} f(x)$.

2. f *admet un* maximum *si* $\exists x_0 \in D_f$, $\forall x \in D_f$, $f(x_0) \geq f(x)$. *On note alors* $f(x_0) = \max\limits_{x \in D_f} f(x)$.

3. f *admet un* extremum *si* f *admet un maximum ou un minimum.*

Exercice 5.3. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
a) "la fonction f s'annule".
b) "f est la fonction nulle".
c) "f n'est pas constante".
d) "f ne prend jamais deux fois la même valeur".
e) "f prend des valeurs arbitrairement grandes" ou "f n'est pas majorée".
f) "f ne peut s'annuler qu'une seule fois".

Définition 5.5. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un même ensemble* E, *i.e.* $f : E \to \mathbb{R}$ *et* $g : E \to \mathbb{R}$. *On dit que* $f \leq g$, *resp* $f < g$, *si* $\forall x \in E$, $f(x) \leq g(x)$, *resp.* $f(x) < g(x)$.

Définition 5.6. *Soit* $f : D_f \to \mathbb{R}$. *On dit que*

1. f *est* paire *si* D_f *est symétrique par rapport à* 0, *c'est-à-dire* $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$, *et si pour tout* $x \in D_f$ *on a* $f(x) = f(-x)$. *Le graphe de* f *est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

2. f *est* impaire *si* D_f *est symétrique par rapport à* 0 *et si pour tout* $x \in D_f$ *on a* $f(x) = -f(-x)$. *Le graphe de* f *est alors symétrique par rapport à l'origine.*

3. f *est* périodique *s'il existe* $T > 0$ *tel que* $x \in D_f$ *si et seulement si* $x + T \in D_f$ *et, pour tout* $x \in D_f$, $f(x + T) = f(x)$. *Le réel* T *est appelé une période de* f *et on dira que* f *est périodique de période* T *ou que* f *est* T *périodique.*

Exercice 5.4. Donner des exemples de fonctions paires, impaires et périodiques.

5.1.2 Opérations sur les fonctions

Définition 5.7. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un même ensemble* E *et* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on définit*
- *leur somme* $f + g$. *C'est la fonction de* $E \to \mathbb{R}$ *définie par, pour tout* $x \in E$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- *leur produit* fg. *C'est la fonction de* $E \to \mathbb{R}$ *définie par, pour tout* $x \in E$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$,
- *la fonction* $\alpha f : E \to \mathbb{R}$ *par, pour tout* $x \in E$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

Définition 5.8. *Soient* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *et* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *deux fonctions. Si* $f(D_f) \subset D_g$ *alors on définit la fonction* $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ *par, pour tout* $x \in D_f$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. *La fonction* $g \circ f$ *s'appelle la composée de* f *avec* g.

☠ **Attention !** Même lorsque les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, i.e. lorsque $f(D_f) \subset D_g$ et $g(D_g) \subset D_f$, elles sont en générales différentes !

Exemple 5.9. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x + 1$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = x^2$. *Les deux fonctions* $g \circ f$ *et* $f \circ g$ *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *et on a* $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ *alors que* $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$.

5.1.3 Fonctions usuelles

Valeur absolue et partie entière

On a déjà rencontré ces deux fonctions dans le Chapitre 2. La *partie entière* est la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$E(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \leq x\}.$$

La partie entière de x peut aussi être définie en disant que c'est l'unique entier relatif m qui vérifie $m \leq x < m + 1$.

La *valeur absolue* été étudiée dans la partie 2.2, voire page 23. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 5.5. Les fonctions valeur absolue et partie entière sont-elles majorées ? minorées ? bornées ? paires ? impaires ? croissantes ? décroissantes ? Dessiner leur graphe.

Logarithme et exponentielle

La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est une fontion de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Elle est définie comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1 (résultat admis dans ce cours), c'est-à-dire que, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$. On a les propriétés suivantes :

- $\ln(1) = 0$,
- la fonction ln est strictement croissante,
- pour tous $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- pour tous $x, y > 0$, $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$,
- pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Exercice 5.6. Démontrer les propriétés précédentes.

La fonction *exponentielle*, notée exp, est définie comme la réciproque (voir la Section 6.3 du Chapitre 6) du logarithme népérien : c'est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie

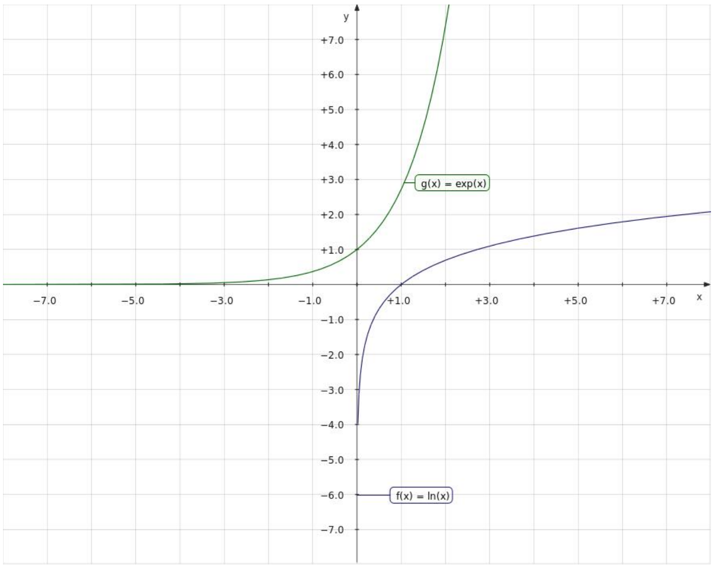
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x, \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(x)) = x.$$

On utilise également la notation e^x pour $\exp(x)$.

Remarque 5.10. *La fonction* exp *est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.*

On a les propriétés suivantes :

- $\mathrm{e}^0 = 1$,
- pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$,
- pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/\mathrm{e}^y$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$.



Exercice 5.7. Démontrer les propriétés précédentes.

Fonctions puissance

Etant donné $a \in \mathbb{R}$, la fonction *puissance a-ème* est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

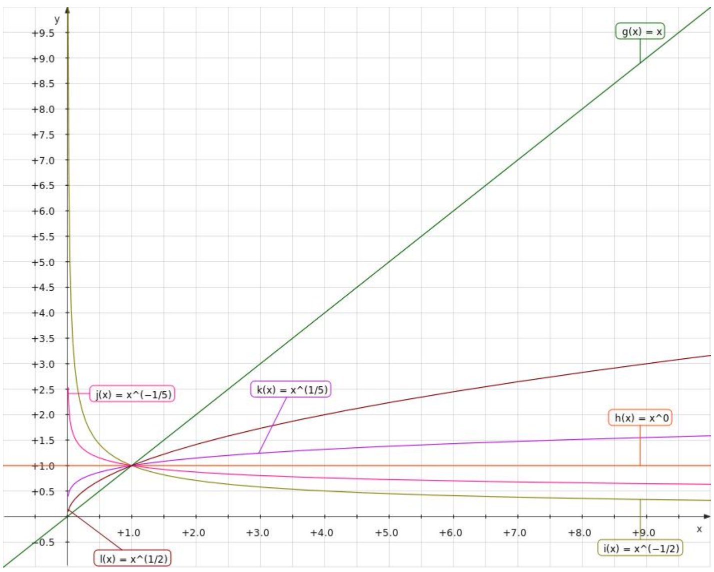
$$x \longmapsto \mathrm{e}^{a\ln(x)}.$$

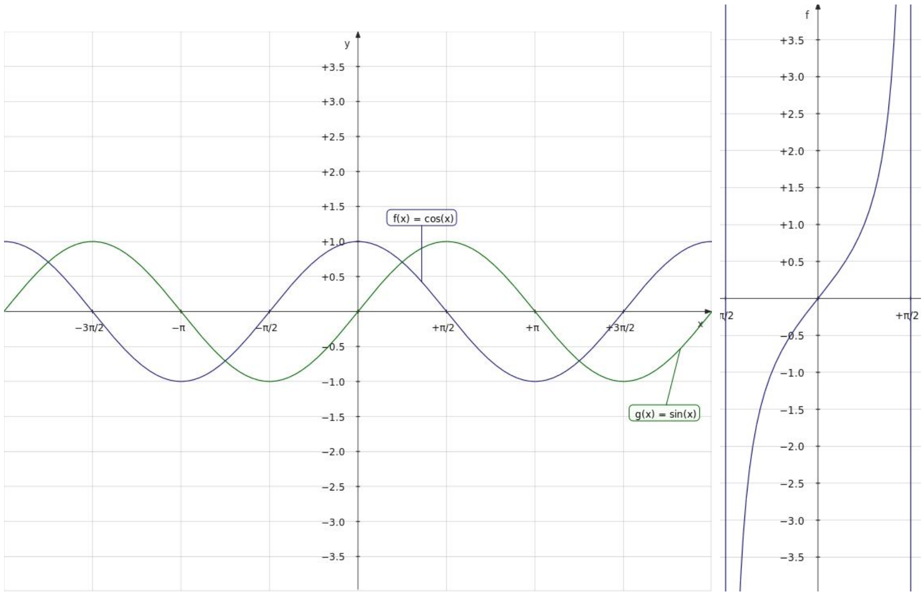
Exercice 5.8. Si $a \in \mathbb{Z}$ montrer que $\mathrm{e}^{a\ln(x)} = x^a$.

Par la suite, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on notera x^a pour $\mathrm{e}^{a\ln(x)}$. Les fonctions puissances vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout $x > 0$, $x^0 = 1$ et $x^1 = x$,
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $1^a = 1$,
- pour tous $x, y > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $x^a y^a = (xy)^a$,
- pour tout $x > 0$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$, $x^a x^b = x^{a+b}$,
- pour tout $x > 0$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(x^a)^b = x^{ab}$,
- pour tout $x > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

Exercice 5.9. Démontrer les propriétés précédentes.





Fonctions trigonométriques circulaires

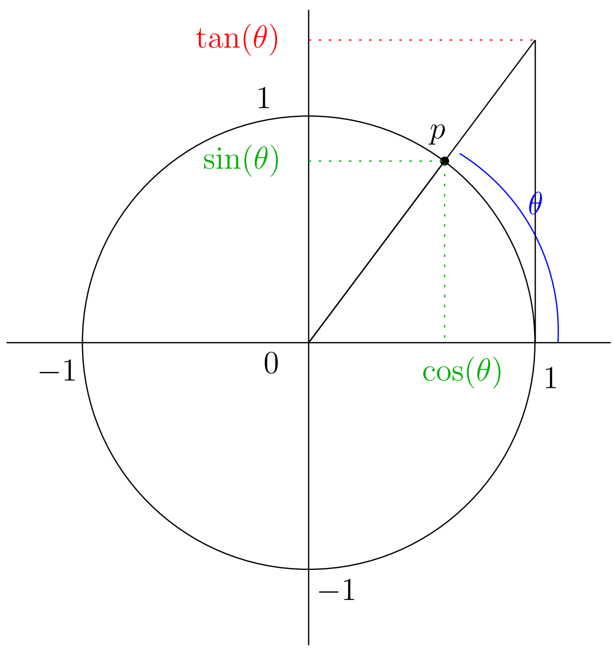
On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$, le cosinus et le sinus sont définis respectivement comme l'abscisse et l'ordonnée de l'unique point p sur le cercle de rayon 1 et centré en l'origine qui est tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{Op})$ soit égal à θ. Le cosinus et le sinus sont étendus à tout $\mathbb{R}$ par périodicité :

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta), \ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Les fonctions cos et sin sont donc définies sur $\mathbb{R}$ et leur image à chacune est $[-1, 1]$.

La fonction tangente, notée tan, est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Voir l'annexe C page 109 pour certaines propriétés de ces fonctions.



5.2 Limite d'une fonction

Dans toute la suite du cours, on supposera que l'ensemble de définition D d'une fonction est un intervalle ou une union au plus dénombrable d'intervalles disjoints. On supposera également que chacun de ces intervalles n'est pas réduit à un singleton.

✎ **Notation.** On notera $\overline{D}$ l'ensemble D auquel on a rajouté les extrémités des intervalles le constituant.

5.2.1 Définitions

Définition 5.11. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.}$$

Exercice 5.10. Écrire la négation de "f admet l pour limite en a".

Remarque 5.12. *Dans certains livres, la définition de limite est légèrement différente. On remplace*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D,\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

La seule différence est que si $a \in D$, pour tout $\eta > 0$ on a $a \in D$ et $|a - a| < \eta$. On en déduit alors que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|f(a) - l| < \varepsilon$ et donc que $l = f(a)$. Ainsi avec cette autre définition, si $a \in D$, la limite de f en a, si elle existe, vaut forcément $f(a)$.

Exercice 5.11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. La fonction f a-t-elle une limite en 0 au sens de la Définition 5.11 ? Que vaut cette limite ?

Que se passe-t-il si on utilise (5.1) comme définition de la limite ?

Définition 5.13. *1. Soit D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $[a, +\infty[\subset D$, et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.}$$

2. Soit D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $]-\infty, a] \subset D$, et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ x \leq A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.}$$

Remarque 5.14. *Comparez cette définition avec celle de la limite d'une suite (Définition 3.12).*

Proposition 5.15 (Unicité de la limite)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. Si f admet l et l' pour limites en a alors $l = l'$.*

Démonstration. La démonstration est la même que dans le cas des suites (proposition 3.17 page 31). □

✎ **Notation.** On rappelle (voir page 14) que, si $f : D \to \mathbb{R}$ et $A \subset D$, on note $f\lceil_A$ la fonction f restreinte à l'ensemble A, c'est-à-dire $f\lceil_A : A \to \mathbb{R}$ et $f\lceil_A(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

Définition 5.16. *1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que f vérifie la propriété P* au voisinage de *a s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f\lceil_{I\cap D}$ vérifie P.*

2. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété P au voisinage de $+\infty$, resp. $-\infty$ *s'il existe un intervalle $I =]A, +\infty[$, resp. $I =]-\infty, A[$, tel que $f\lceil_{I\cap D}$ vérifie P.*

Exemple 5.17. *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est positive au voisinage de* 0*. En effet, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est un intervalle ouvert contenant* 0 *et, pour tout $x \in I$, on a bien* $\cos(x) \geq 0$*, i.e.* $\cos\lceil_I \geq 0$.

Proposition 5.18. *1. Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite finie l en $a \in \overline{D}$ alors f est bornée au voisinage de a, i.e. il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que f soit bornée sur $I \cap D$.*

2. Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite finie l en $+\infty$, resp. $-\infty$, alors f est bornée au voisinage de $+\infty$, resp. $-\infty$, i.e. il existe un intervalle $I =]A, +\infty[$, resp. $I =]-\infty, A[$, tel que f soit bornée sur $I \cap D$.

Démonstration. On montre 1. Soit $\epsilon = 1$. Par définition il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in D$,

$$(0 < |x-a| < \eta \implies |f(x) - l| < 1) \iff (a - \eta < x < a + \eta \text{ et } x \neq a \implies l - 1 < f(x) < l + 1)\,.$$

On pose $I =]a - \eta, a + \eta[$. Sur $D \cap I$, la fonction f est majorée par $\max(l + 1, f(a))$ et minorée par $\min(l - 1, f(a))$, elle est donc bornée. $\square$

Exercice 5.12. Montrer 2.

Définition 5.19. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ pour limite en a, et on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, si*

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D,\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) \geq A).}$$

On dit que f admet pour limite $-\infty$ pour limite en a, et on note $\lim_{x \to a} = -\infty$, si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D,\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) \leq A).}$$

Définition 5.20. *1. Soit D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $[a, +\infty[\subset D$, et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si*

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A.}$$

2. Soit D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $]-\infty, a] \subset D$, et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$, et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A.}$$

Exercice 5.13. Ecrire une définition de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

5.2.2 Opérations sur les limites

Les propriétés sont similaires à celles pour les suites, voir Proposition 3.21.

Proposition 5.21. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$, $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a*

1. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} |f(x)| = |l|$.*
2. *$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ si et seulement si $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$.*
3. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ alors $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = l + l'$.*
4. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda l$.*
5. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et g est bornée alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = 0$.*
6. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = ll'$.*
7. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, $\forall x \in D\ f(x) \neq 0$ et $l \neq 0$ alors $\lim_{x \to a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{l}$.*
8. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, $\lim_{x \to a} g(x) = l'$, $\forall x \in D\ g(x) \neq 0$ et $l' \neq 0$ alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}$.*
9. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, et g est bornée (en particulier si $\lim_{x \to a} g(x) = l'$) alors $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = -\infty$.*

10. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = l' > 0$*, resp.* $l' < 0$*, alors* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$*, resp* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = -\infty$.

11. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$*, resp.* $-\infty$*, alors* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$*, resp.* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = -\infty$.

12. Si, pour tout $x \in D$*,* $f(x) \neq 0$ *et si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$*, alors* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = 0$.

Exercice 5.14. Démontrer la proposition ci-dessus. (Indication : voir la preuve de la Proposition 3.21.)

Proposition 5.22. *Les résultats de la proposition précédente restent vrais si* a *est remplacé par* $+\infty$ *ou* $-\infty$*.*

Exercice 5.15. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = l'$. Montrer que $\lim_{x\to 0} \max(f(x), g(x)) = \max(l, l')$.

5.2.3 Composition de limites

Proposition 5.23. *Soient* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *et* $g : D_g \to \mathbb{R}$ *telles que* $f(D_f) \subset D_g$*, et* $a \in \overline{D}_f$*,* $b \in \overline{D}_g$*. On suppose que* $\lim_{x\to a} f(x) = b$*,* $\lim_{x\to b} g(x) = l$ *et, si* $b \in D_g$*, alors* $g(b) = l$*. Alors* $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = l$*.*

Démonstration. Les hypothèses sur les limites de f et g s'écrivent

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D_f,\ 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon, \tag{5.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in D_g,\ 0 < |y - b| < \eta \Rightarrow |g(y) - l| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après (5.3), il existe $\eta > 0$ tel que si $y \in D_g$ et $0 < |y - b| < \eta$ alors $|g(y) - l| < \varepsilon$. Par ailleurs, si $b \in D_g$ on a $g(b) = l$ donc on peut remplacer $0 < |y - b| < \eta$ par $|y - b| < \eta$. Pour ce $\eta > 0$, d'après (5.2), il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in D_f$ et $0 < |x - a| < \delta$ alors $|f(x) - b| < \eta$.

Etant donné $x \in D_f$, si $0 < |x - a| < \delta$ on a $|f(x) - b| < \eta$. Par ailleurs $f(x) \in D_g$ puisque $f(D_f) \subset D_g$. Donc on peut appliquer (5.3) à $y = f(x)$ et on obtient $|g \circ f(x) - l| < \varepsilon$.

On a montré "étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in D_f$ et $0 < |x-a| < \delta$ alors $|g\circ f(x) - l| < \varepsilon$". C'est précisément la définition de $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = l$. □

Remarque 5.24. *Le résultat reste vrai si on remplace l'hypothèse "si* $b \in D_g$ *alors* $g(b) = l$*" par "au voisinage de* a*,* $f(x) \neq b$ *si* $x \neq a$*".*

☠ **Attention !** Si on suppose juste $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = l$, on ne peut a priori rien dire. Prenons les fonctions f définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, et g définie par $g(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$. Montrer que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Que se passe-t-il pour $g \circ f$?

Proposition 5.25. *La proposition 5.23 reste vraie si on remplace* a *ou* b *par* $+\infty$ *ou* $-\infty$*.*

Exercice 5.16. Prouvez la proposition ci-dessus.

5.2.4 Ordre et limite

Proposition 5.26. *Soit* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $a \in \overline{D}$*,* $l \in \mathbb{R}$ *et* $(c, d) \in \mathbb{R}^2$*. On suppose que* f *admet* l *pour limite en* a*, resp.* $\pm\infty$*.*

i) Si $c < l$ *alors* $c < f(x)$ *au voisinage de* a *sauf peut-être en* a*, resp.* $\pm\infty$*.*

ii) Si $l < d$ *alors* $f(x) < d$ *au voisinage de* a *sauf peut-être en* a*, resp.* $\pm\infty$*.*

iii) Si $c < l < d$ *alors* $c < f(x) < d$ *au voisinage de* a *sauf peut-être en* a*, resp.* $\pm\infty$*.*

Démonstration. i) Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et que $\varepsilon = l - c > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$0 < |x - a| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < l - c \ \Leftrightarrow\ c - l < f(x) - l < l - c \ \Rightarrow\ f(x) > c,$$

i.e. si on pose $I =]a - \eta, a + \eta[$ on a $f(x) > c$ pour tout $x \in I \cap D$ tel que $x \neq a$.

ii) Puisque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et que $\varepsilon = d - l > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$|x - a| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < d - l \ \Leftrightarrow \ l - d < f(x) - l < d - l \ \Rightarrow \ f(x) < d,$$

i.e. si on pose $I =]a - \eta, a + \eta[$ on a $f(x) < d$ pour tout $x \in I \cap D$ tel que $x \neq a$.

iii) D'après i) et ii) il existe $\eta, \eta' > 0$ tels que

$$|x - a| < \eta \ \Rightarrow \ f(x) > c \quad \text{et} \quad |x - a| < \eta' \ \Rightarrow \ f(x) < d.$$

On pose $\eta'' = \min(\eta, \eta')$ et $I =]a - \eta'', a + \eta''[$. On a bien $c < f(x) < d$ pour tout $x \in I \cap D$ tel que $x \neq a$.

□

☠ **Attention !** Le résultat est faux si on remplace $<$ ou $>$ par $\leq$ ou $\geq$. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, i.e. on a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \geq 0$. Cependant f n'est positive sur aucun intervalle ouvert I contenant 0.

Proposition 5.27. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$, $l \in \mathbb{R}$ et $(c, d) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f admet l pour limite en a, resp. $\pm\infty$.*

i) Si $c \leq f(x)$ au voisinage de a alors $c \leq l$.

ii) Si $f(x) \leq d$ au voisinage de a alors $l \leq d$.

iii) Si $c < f(x) < d$ au voisinage de a alors $c \leq l \leq d$.

Démonstration. i) Soit I un intervalle ouvert contenant a tel que $f(x) \geq c$ pour tout $x \in I \cap D$. En particulier il existe δ tel que $]a - \delta, a + \delta[\subset I$ donc on a pour tout $x \in D$

$$|x - a| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) \geq c.$$

Par ailleurs, soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, si $|x - a| < \eta$ alors

$$||f(x) - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon.$$

Soit $x \in D$ tel que $|x - a| < \min(\delta, \eta)$ on a alors $c \leq f(x) < l + \varepsilon$.

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $c < l + \varepsilon$. On conclut que $c \leq l$ en raisonnant par l'absurde. En effet, si $c > l$, en prenant $\varepsilon = c - l > 0$ on aurait $c < l + \varepsilon = c$. □

Exercice 5.17. Démontrez ii) et iii).

☠ **Attention !** A nouveau, il ne faut pas mélanger $<$ ou $>$ avec $\leq$ ou $\geq$!

Par exemple, la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifie $f(x) > 0$ au voisinage de $+\infty$ (c'est même toujours vrai). Cependant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ qui n'est pas strictement positif.

Corollaire 5.28. *Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, et si f et g admettent l et l' pour limite respective en a, alors $l \leq l'$.*

☠ **Attention !** On n'a **pas** $\big(f(x) < g(x)$ au voisinage de $a\big) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

On résume souvent la situation en disant que :

"Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges".

Théorème 5.29. *[Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)] Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On suppose que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$. Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$. Ce résultat est toujours vrai si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.*

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du Théorème 3.26 . □

Exercice 5.18. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$, où E représente la fonction partie entière.

5.2.5 Limites à droite et à gauche

Définition 5.30. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$.*

1. *On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]a, a+\delta[\subset D$. On dit que f* admet l comme limite à droite en a, *et on note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$, ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ (0 < x - a < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

2. *On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta, a[\subset D$. On dit que f* admet l comme limite à gauche en *a, et on note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$, ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ (-\eta < x - a < 0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

On vérifie facilement que

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = l\right)$$

En particulier, si une fonction f admet des limites différentes à gauche et à droite en a, alors f n'a pas de limite en a.

Exercice 5.19. Calculer les limites à gauche et à droite en 0 de $x \mapsto E(x)$.

Remarque 5.31. *Sur le même principe, on peut définir les notions de f admet pour limite $+\infty$, resp. $-\infty$, à droite (ou à gauche) en a.*

5.2.6 Fonctions monotones et limites

Théorème 5.32. *Soient $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$, tel que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante.*

1. *Si f est majorée alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.*
2. *Si f n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.*
3. *Si f est minorée alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.*
4. *Si f n'est pas minorée alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$*

Démonstration.

1. On suppose $b \in \mathbb{R}$. $f(]a, b[)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré. Donc il admet une borne supérieure l dans $\mathbb{R}$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, $l - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $f(]a, b[)$ dans $\mathbb{R}$, donc il existe $y \in f(]a, b[)$ tel que $l - \varepsilon < y \leq l$. Comme $y \in f(]a, b[)$, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $y = f(\xi)$. On a donc $l - \varepsilon < f(\xi) \leq l$. Soit $x \in]a, b[$ tel que $x \geq \xi$. Comme f est croissante $f(x) \geq f(\xi) > l - \varepsilon$. Par ailleurs, par définition de l on a $f(x) \leq l$. En notant $\eta = b - \xi$ on a donc, pour tout $x \in]a, b[$, si $0 < b - x < \eta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$, i.e. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = l$.
2. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas majorée, il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $f(\xi) \geq A$. Comme f est croissante, pour tout $x \in]a, b[$, si $\xi \leq x$ on a $A \leq f(\xi) \leq f(x)$. En notant $\eta = b - \xi$ on a, pour tout $x \in]a, b[$, si $0 < b - x < \eta$ alors $f(x) \geq A$, i.e. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.
3. Appliquer 1. à la fonction $g(x) = f(a + b - x)$ sur $]a, b[$.
4. Appliquer 2. à la fonction $g(x) = f(a + b - x)$ sur $]a, b[$.

□

Proposition 5.33. *Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ croissante. Alors f admet en tout point x_0 de $]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite. De plus, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, et pour tout $x \in I$ si $x < x_0$ alors $f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ et si $x > x_0$ alors $f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.*

Démonstration. Sur $]a, x_0[$ la fonction f est croissante et majorée par $f(x_0)$. D'après le 1. du théorème précédent, f a une limite à gauche en x_0 qui est $\sup_{x\in]a,x_0[} f(x) \leq f(x_0)$. De même, sur $]x_0, b[$ la fonction f est croissante et minorée par $f(x_0)$. D'après le 3. du théorème précédent, f a une limite à droite en x_0 qui est $\inf_{x\in]x_0,b[} f(x) \geq f(x_0)$.

Soit maintenant $x < x_0$. D'après le théorème précédent appliqué sur $]a, x_0[$ on a $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in]a,x_0[} f(x)$. En particulier $f(x) \leq \sup_{x\in]a,x_0[} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$. Le cas $x > x_0$ se traite de la même façon. □

Remarque 5.34. *On montrerait de la même façon que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est croissante alors f admet une limite (à droite) en a et une limite (à gauche) en b. De plus $f(a) \leq \lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to b} f(x) \leq f(b)$.*

5.2.7 Limites usuelles

Fractions rationnelles

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq m \leq n$ et $0 \leq p \leq q$, $a_m \neq 0, a_n \neq 0, b_p \neq 0, b_q \neq 0$, on considère

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_m x^m}{b_q x^q + \cdots + b_p x^p} = \frac{\sum_{k=m}^{n} a_k x^k}{\sum_{j=p}^{q} b_j x^j}.$$

Alors

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_q x^q}$ (les plus grandes puissances). Pour le voir il suffit de mettre $\frac{a_n x^n}{b_q x^q}$ en facteur dans l'expression de f et d'utiliser la Proposition 5.21 page 63.
- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{a_m x^m}{b_p x^p}$ (les plus petite puissances). L'argument est analogue à celui d'au-dessus.

Logarithme et exponentielle

Dans ce cours, on admet les résultats suivants :

- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
- En $+\infty$, l'exponentielle "croit plus vite" que n'importe quelle puissance, c'est-à-dire, pour tout $a \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^a} = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0.$$
- En $+\infty$, n'importe quelle puissance positive de x "croit plus vite" que le logarithme, c'est-à-dire, pour $\alpha > 0$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0.$$
En appliquant la Proposition 5.23 avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ le résultat précédent donne
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0.$$
Avec $\alpha = 1$ on obtient les deux cas particuliers importants
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.}$$
- Avec le chapitre sur les dérivées, on verra :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.}$$

Sinus et cosinus

Proposition 5.35. *1.* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Démonstration. 1. Prenons d'abord $x \in]0, \pi/2[$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit P le point $(1, 0)$, M le point sur le cercle unité correspondant à l'angle x, et I l'intersection de la droite (OM) avec la droite verticale passant par P.

Le triangle OPM est strictement inclus dans le secteur angulaire OPM qui est lui-même strictement inclus dans le triangle OPI. En calculant les aires correspondantes (aire d'un triangle = la moitié de la base × la hauteur, aire d'un secteur angulaire = la moitié de l'angle × le carré du rayon), on obtient

$$\boxed{\sin(x) < x < \tan(x)}$$

ce qui donne $1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$ et donc

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Comme $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, par le théorème des gendarmes (théorème 5.29 page 65), on obtient que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. De plus cette fonction est paire sur $\mathbb{R}^*$, donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. D'où finalement $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. C'est une conséquence de 1. en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \\ &= \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{1}{1+\cos(x)} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2, \end{aligned}$$

et en appliquant la Proposition 5.21.

□

Exemple 5.36. *Pour calculer la limite en* 0 *de* $\frac{\sin(3x)}{x}$*, on écrit* $\frac{\sin(3x)}{x} = 3\frac{\sin(3x)}{3x}$*. Le résultat sur les compositions de limites (proposition 5.23 page 64) et la proposition précédente donnent alors* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$*, d'où* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$

5.3 Exercices

Exercice 5.20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de symboles logiques les propositions suivantes :

a) La fonction f n'est pas constante.

b) 2 n'est pas l'image d'un réel par f.

c) f prend toujours la même valeur pour des nombres opposés.

d) Aucun réel positif n'est égal à son image.

Exercice 5.21. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des assertions suivantes exprimer "en français" ce qu'elle signifie et écrire sa négation. Par exemple

$$\forall x \in I,\ -x \in I \text{ et } f(-x) = f(x)$$

signifie "f est paire" et sa négation est

$$\exists x \in I,\ -x \notin I \text{ ou } f(-x) \neq f(x).$$

a) $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.
b) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I, f(x) = y$.
c) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)| \geq M$.
d) $\forall (x, y) \in I^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
e) $\forall (x, y) \in I^2,\ x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
f) $\forall x \in I,\ f(x) = 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Exercice 5.22. Tracer la fonction $f(x) = E\,(x + 1/2)$. Est-elle paire ?

Exercice 5.23. Montrer que la fonction $\dfrac{\sin(x)}{4} + \cos(10x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Même question pour la fonction $\dfrac{\cos(x) + 4\sin(x)}{1 + \mathrm{e}^x}$.

Exercice 5.24. Calculer les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 5x - 7}{3x^3 - 2x^2 + 5}$.
b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{2x^3 + x - 4}$.
c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 3x^2 + x}{2x^3 + x^2}$.
d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^2 \ln(x^4)$.
e) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x + x^2)}{x}$.
f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x)\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 5.25. Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^3}{1 - x^7}$.
b) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x^2 - 4}$.
c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x + 3x^2}$.
d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^4(x)}{x^3 \ln(1 + x)}$.
e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} - x$.
f) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$.
g) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1}$.
h) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x - \frac{1}{2}}{4\cos^2 x - 3}$.
i) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{2}}$.
j) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1 - e^x)\sin x}{x^2 + x^3}$.
k) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 \frac{x}{2}}$.
l) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^4)}{x(\tan x - \sin x)}$.
m) $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}}{\sin x}$.
n) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
o) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^{2x} + x^2)}{x}$.

Exercice 5.26. Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

a) Limite éventuelle en 1, $+\infty$ et $-\infty$ de $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$.
b) Limite éventuelle en 0, $+\infty$ et $-\infty$ de $x \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$.
c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Limite éventuelle en 0 de $\dfrac{(1 - \cos x)\sin x}{x^m}$ (on discutera selon les valeurs de m).
d) Limite éventuelle en π de $\dfrac{\sin x}{x(x - \pi)}$.
e) Soit $m \in \mathbb{R}$. Limite éventuelle en 0 de $(1 + mx)^{\frac{1}{x}}$ (on discutera selon les valeurs de m).

Exercice 5.27. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est *lipschitzienne* de rapport M si et seulement si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = 3x + 4$ est lipschitzienne de rapport à préciser.
b) Soit f une fonction lipschitzienne de rapport M. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M|x| + |f(0)|.$$

En déduire que la fonction $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.28. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{E(1/x) + x}{E(1/x) - x}$, où E représente la fonction partie entière.

Exercice 5.29. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Ecrire à l'aide de symboles logiques “la fonction f n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$. Déterminer deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que $f(u_n) \to 0$ et $f(v_n) \to 1$. En déduire que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

c) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *périodique* s'il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $f(x+T) = f(x)$. Quelles sont les fonctions périodiques qui ont une limite en $+\infty$?

Exercice 5.30. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{|x|} = +\infty$.

a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe $x_\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq x_\alpha,\ f(x) \geq |\alpha x| + |x|.$$

b) En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x = +\infty$.

Exercice 5.31. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et il existe $l \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \iff \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) Montrer que si $l > 0$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Chapitre 6

Continuité et fonctions réciproques

Dans tout ce chapitre, et sauf précision contraire, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

6.1 Fonctions continues

6.1.1 Continuité en un point

Définition 6.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est* continue en a *si f admet une limite finie en a qui vaut $f(a)$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ou encore*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exercice 6.1. Donner des exemples de fonctions non continues en 0.

La proposition 5.18 entraine immédiatement que

Proposition 6.2. *Si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de a.*

Définition 6.3. *On dit que f est* continue à droite en a*, resp.* continue à gauche en a*, si a n'est pas le plus grand élément de I et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, resp. a n'est pas le plus petit élément de I et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.*

Bien sûr, f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Proposition 6.4. *Les fonctions constantes et la fonction $f(x) = x$ définies sur $\mathbb{R}$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.*

Exercice 6.2. Prouver la proposition ci-dessus.

Les deux propositions suivantes sont des conséquences immédiates des Propositions 5.21 et 5.23.

Proposition 6.5. *Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est continue en a, alors $|f|$ est continue en a.*
2. *Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a.*
3. *Si f est continue en a, alors λf est continue en a.*
4. *Si f et g sont continues en a, alors fg est continue en a.*
5. *Si g est continue en a et $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est définie dans un voisinage de a et est continue en a.*
6. *Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie dans un voisinage de a et est continue en a.*

Proposition 6.6. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, avec $f(I) \subset J$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

Corollaire 6.7. *1. Les fonctions polynômes sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.*

2. Les fractions rationnelles, c'est-à-dire les fonctions de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, sont continues en tout point a tel que $Q(a) \neq 0$.

Démonstration. 1. On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Cela se fait par récurrence en utilisant la Proposition 6.4 et le 4. de la Poposition 6.5. Les détails sont laissés au lecteur.

Soit P une fonction polynôme, elle peut donc s'écrire $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où les $a_k \in \mathbb{R}$. Le résultat découle alors de la continuité des fonctions $x \mapsto x^n$ ainsi que des 2. et 3. de la Proposition 6.5.

2. Ca découle directement du 1. et de la propriété 6. de la Proposition 6.5. □

6.1.2 Continuité sur un intervalle

Définition 6.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est* continue sur I *si f est continue en tout point de I, i.e.*

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in I,\ |y - x| < \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exercice 6.3. Montrer que les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les propriétés de continuité en un point s'étendent immédiatement à la continuité sur un intervalle.

Théorème 6.9. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.*
2. *Si f et g sont continues sur I alors $f + g$ est continue sur I.*
3. *Si f est continue sur I alors λf est continue sur I.*
4. *Si f et g sont continues sur I alors fg est continue sur I.*
5. *Si g est continue sur I et, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est définie et continue sur I.*
6. *Si f et g sont continues sur I et, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est définie et continue sur I.*

Proposition 6.10. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.*

Exercice 6.4. Soit $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière.
a) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction E est-elle continue ?
b) En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction E est-continue à droite ?
c) Pour chacun des intervalles I suivants, on considère maintenant la fonction E définie sur I. Est-elle continue sur cet intervalle ?

$$I = [0, 1], \quad I =]0, 1[, \quad I = [0, 1[, \quad I =]0, 1].$$

6.1.3 Continuité et suites

Le théorème qui suit fournit un critère très utile pour caractériser les fonctions continues. On l'utilise en particulier pour montrer qu'une fonction n'est pas continue.

Théorème 6.11. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f est continue en a si et seulement si* ***pour toute*** *suite $(x_n)_n$ qui converge vers a la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) On suppose que f est continue en a. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Soit $(x_n)_n$ une suite tendant vers a et soit $\varepsilon > 0$. On choisit η tel que (6.1) soit vraie. Comme $(x_n)_n$ tend vers a, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|x_n - a| < \eta$. On peut ainsi appliquer (6.1) à x_n avec $n \geq N$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow |x_n - a| < \eta \implies |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ on a trouvé $N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Longrightarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ ce qui signifie précisément que la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $f(a)$.

($\Leftarrow$) On raisonne par contraposition. On suppose que f n'admet pas $f(a)$ comme limite en a :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in I,\ |x-a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon, \tag{6.2}$$

et on montre qu'il existe une suite $(x_n)_n$ qui tend vers a mais telle que la suite $(f(x_n))_n$ ne tende pas vers $f(a)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\eta = \frac{1}{n} > 0$ dans (6.2), il existe $x_n \in I$ tel que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$. D'après le Corollaire 3.28 la suite $(x_n)_n$ tend vers a. Par contre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$ donc la suite $(f(x_n))_n$ ne tend pas vers $f(a)$. On a construit une suite $(x_n)_n$ qui tend vers a et telle que la suite $(f(x_n))_n$ ne tende pas vers $f(a)$. □

Remarque 6.12. *Pour montrer que f n'est* **pas** *continue en a, il suffit de trouver* **une** *suite $(x_n)_n$ qui tend vers a et telle que la suite de terme général $f(x_n)$ ne tende pas vers $f(a)$.*

Remarque 6.13. *L'exercice 3.8 de la page 31 montre la continuité de la fonction racine carrée.*

Exercice 6.5. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0. Indication : considérer la suite de terme général $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

6.1.4 Suites récurrentes

Proposition 6.14. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in I$ est donné et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.*

1. limites éventuelles : *Si $u_n \to l$ avec $l \in I$ et f est continue en l alors l vérifie $f(l) = l$.*
2. *Si f est croissante alors $(u_n)_n$ est monotone : si $u_0 \leq u_1$ la suite est croissante sinon elle est décroissante.*

Démonstration. 1. La suite $(u_n)_n$ tend vers $l \in I$ et f est continue en l. Donc d'après le Théorème 6.11, la suite $(f(u_n))_n$ tend vers $f(l)$. Par ailleurs, comme $(u_n)_n$ tend vers l, la suite $(u_{n+1})_n$ tend aussi vers l. Or pour tout n on a $f(u_n) = u_{n+1}$. Par unicité de la limite on a bien $f(l) = l$.

2. On suppose que $u_0 \leq u_1$, montrons par récurrence que la suite u est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit P_n la propriété "$u_n \leq u_{n+1}$".
- P_0 est vraie par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$. Comme f est croissante on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$. Mais, par définition de la suite $(u_n)_n$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Donc P_{n+1} est vraie.
- Le principe de récurrence permet d'affirmer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq u_{n+1}$, donc la suite est croissante.

On montre de la même façon que si $u_0 \geq u_1$ alors la suite est décroissante. □

Attention ! Ne pas confondre "la fonction f est croissante" et "la suite u est croissante".

Exemple 6.15. *On considère la suite u définie par récurrence par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Ici, on a $f(x) = \sqrt{6+x}$. La fonction f est définie sur $I = [-6, +\infty[$ et pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq 0$, en particulier $f(I) \subset I$. De plus f est continue sur I.*

La fonction f est croissante (strictement) sur I donc la suite u est monotone. De plus on a $u_1 = \sqrt{6+10} = 4 < u_0$ donc la suite u est décroissante. Elle est également minorée (par 0), donc elle converge d'après le Théorème 3.36.

On note l sa limite. Comme f est continue sur I, l vérifie $l = f(l)$. On résout l'équation

$$f(x) = x \iff x = \sqrt{6+x} \implies x^2 = 6 + x.$$

On résout l'équation $x^2 - x - 6 = 0$. Les solutions de cette équation sont -2 et 3. Attention!! Cela ne veut pas dire que -2 et 3 sont solutions de $f(x) = x$. En effet, on a raisonné par implication et non par équivalence! Ce que l'on peut dire à ce niveau c'est que les seules solutions possibles de l'équation $f(x) = x$ sont -2 et 3. On vérifie pour chacune de ces deux valeurs si elle est bien solution de $f(x) = x$. C'est le cas pour 3 mais pas pour -2. Conclusion : l'équation $f(x) = x$ admet 3 pour unique solution, et donc $l = 3$. La suite $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 3.

Exemple 6.16. *On reprend l'exercice précédent mais cette fois avec* $u_0 = -5$. *On a alors cette fois* $u_1 = \sqrt{6+(-5)} = 1 > u_0$ *donc la suite* u *est croissante. Soit elle est majorée et elle converge vers la seule solution de l'équation* $f(x) = x$, *c'est-à-dire vers* $l = 3$, *soit elle n'est pas majorée et alors elle tend vers* $+\infty$.

On va montrer qu'elle est majorée par l. *On raisonne par récurrence. Soit* P_n *la propriété "*$u_n \leq l$*".*

- P_0 *est vraie car* $u_0 = -5 < l = 3$. *De même* P_1 *est vraie.*
- *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *on suppose que* P_n *est vraie, c'est-à-dire* $u_n \leq l$. *Comme* f *est croissante on a* $f(u_n) \leq f(l)$ *mais* $f(u_n) = u_{n+1}$ *et* $f(l) = l$, *donc* $u_{n+1} \leq l$. *Autrement dit* P_{n+1} *est vraie.*
- *Le principe de récurrence permet d'affirmer que* P_n *est vraie pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

On a montré que la suite $(u_n)_n$ *était croissante et majorée (par* l*) donc elle converge vers la seule limite possible c'est-à-dire vers* $l = 3$.

6.1.5 Prolongement par continuité

Définition 6.17. *Soit* I *un intervalle,* $a \in I$ *et* $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On dit que* f *est* prolongeable par continuité en a *si* f *admet une limite finie* l *en* a. *La fonction* $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in I \setminus \{a\} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(a) = l,$$

est appelé le prolongement par continuité de f. *En particulier,* $\tilde{f}$ *est continue en* a, *et donc sur* I.

Exemple 6.18. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. *On cherche si elle est prolongeable par continuité en* 0

La fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$. *De plus, on sait que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. *Donc* f *est prolongeable par continuité en* 0 *et* $\tilde{f}(0) = 1$.

6.1.6 Continuité par morceaux

Définition 6.19. *Soient* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est* continue par morceaux *sur* $[a,b]$ *s'il existe* $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$ *tels que*

1. $c_0 = a$ *et* $c_n = b$,
2. f *est continue sur chaque intervalle* $]c_k, c_{k+1}[$, *et les limites* $\lim\limits_{x\to c_k^-} f(x)$, $k = 1, \ldots, n$, *et* $\lim\limits_{x\to c_k^+} f(x)$, $k = 0, \ldots, n-1$, *existent et sont finies.*

Remarque 6.20. *La condition 2. est équivalente à dire que pour tout intervalle* $[c_k, c_{k+1}]$ *il existe une fonction continue* $f_k : [c_k, c_{k+1}] \to \mathbb{R}$ *qui coïncide avec* f *sur* $]c_k, c_{k+1}[$.

Définition 6.21. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est continue par morceaux sur* I *si pour tout* $[a,b] \subset I$ *la fonction* f *est continue par morceaux sur* $[a,b]$.

Exemple 6.22. *La fonction "partie entière" est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$. *En effet, soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. *On pose* $c_0 = a$, $c_1 = E(a)+1$, $c_2 = E(a)+2, \ldots$, $c_{n-1} = E(b)$ *et* $c_n = b$. *La fonction* $f_k : [c_k, c_{k+1}] \to \mathbb{R}$ *définie par* $f_k(x) = c_k$ *si* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *et par* $f_k(x) = E(a)$ *pour* $k = 0$, *est bien continue et coïncide avec* E *sur* $]c_k, c_{k+1}[$.

6.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème suivant précise l'image d'un intervalle par une application continue. Rappelons une propriété caractéristique d'un intervalle : I est un intervalle si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2, [x,y] \subset I$.

Théorème 6.23 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient* I *un* <u>intervalle</u> *de* $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $(a,b) \in I^2$ *tels que* $a \leq b$. *Alors pour tout réel* γ *compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = \gamma$.

Remarque 6.24. *Intuitivement, derrière l'idée de continuité il y a l'idée que l'on ne peut pas passer "instantanément" d'une valeur à une autre, il faut passer par les valeurs qui sont entre les deux. Autrement dit le graphe d'une fonction continue, sur un intervalle, se trace sans lever le crayon. C'est précisément ce que dit ce théorème.*

Corollaire 6.25. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Démonstration. La démonstration proposée utilise le théorème des suites adjacentes. Pour construire les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ en question, dont la limite commune sera le point c recherché, on va utiliser le procédé de *dichotomie* (divisions successives par deux).

On suppose que $f(a) \leq f(b)$ (le cas $f(a) \geq f(b)$ se traite de la même façon). Soit γ tel que $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$. L'idée est de construire deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que

1. $a_0 = a$ et $b_0 = b$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ (autrement dit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$),
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ (à chaque étape on divise la taille de l'intervalle par deux),
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq \gamma \leq f(b_n)$ (à chaque étape on a $\gamma \in [f(a_n), f(b_n)]$).

L'idée est, à chaque étape, de diviser l'intervalle en 2 de façon à ce que le nombre γ soit toujours compris entre les valeurs de f aux bornes du nouvel intervalle.

Admettons que l'on sache construire deux telles suites. D'après 2. la suite $(a_n)_n$ est croissante et la suite $(b_n)_n$ est décroissante, et d'après 3. la suite $(b_n - a_n)_n$ est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc elle tend vers 0. On en déduit que les deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite c, et d'après 1. on a bien $c \in [a, b]$. Finalement comme f est continue on a, d'après le Théorème 6.11, $f(a_n) \to f(c)$ et $f(b_n) \to f(c)$, et en utilisant la Proposition 3.25 et 4. on a $f(c) \leq \gamma \leq f(c)$, c'est-à-dire $f(c) = \gamma$.

Il reste donc à construire les suites a et b vérifiant les propriétés 1. à 4. ci-dessus. On le fait par récurrence. On prend $a_0 = a$ et $b_0 = b$ (ainsi 1. est vérifié). Supposons $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ construits vérifiant 1. à 4. Soit $m_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ le "milieu" de $[a_n, b_n]$. On compare $f(m_n)$ et γ :

- Si $f(m_n) < \gamma$ on pose $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
- Sinon on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$.

On vérifie facilement que les propriétés 2., 3. et 4. sont vérifiées jusqu'au rang $n+1$. L'idée est qu'on a divisé l'intervalle $[a_n, b_n]$ en deux et "gardé" la moitié (droite ou gauche) telle que γ soit toujours compris entre les images des deux bornes. □

Exercice 6.6. Illustrer à l'aide d'un dessin le procédé de constructions des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

Exercice 6.7. Le but de cet exercice est de donner une autre démonstration du Théorème 6.23. Soit $F = \{x \in [a, b],\ f(x) \leq \gamma\}$.

a) Montrer que F est majoré et non-vide.
On note $c = \sup F$.

b) Montrer que $\gamma = f(c)$.

Un cas particulier du Thèorème des valeurs intermédiaires que l'on utilise souvent est le cas où $\gamma = 0$:

Corollaire 6.26. *Si une fonction continue sur un intervalle I prend des valeurs positives et négatives, alors elle s'annule en un point.*

Exercice 6.8. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, i.e. pour tout $x \in [0, 1]$ on a $f(x) \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

Théorème 6.27. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Remarque 6.28. *" f est bornée et atteint ses bornes" signifie que*

1. *f admet une borne inférieure m et une borne supérieure M,*
2. *$\exists (x_m, x_M) \in [a, b]^2$, $f(x_m) = m$ et $f(x_M) = M$.*

Combiné avec le Corollaire 6.25, le théorème précédent précise ainsi l'image de f lorsque l'intervalle de départ est un segment :

Corollaire 6.29. *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Démonstration du Théorème 6.27. Montrons par l'absurde que f est majorée : supposons que f n'est pas majorée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \in [a,b]$ donc la suite $(x_n)_n$ est bornée. D'après le Théorème de Bolzano-Weiertrass (page 40), il existe une extractrice φ et un réel $c \in [a,b]$ tel que $x_{\varphi(n)} \to c$. De plus la fonction f est continue donc $f(x_{\varphi(n)}) \to f(c)$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n$ donc $f(x_{\varphi(n)}) \to +\infty$. D'où la contradiction.

Montrons maintenant que f atteint sa borne supérieure. Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ (M existe puisque f est bornée). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M - 1/n$ n'est pas un majorant de f donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $M - 1/n < f(x_n) \leq M$. On applique à nouveau le Théorème de Bolzano-Weiertrass : la suite $(x_n)_n$ est bornée donc il existe une extractrice φ et un élément $d \in [a,b]$ tel que $x_{\varphi(n)} \to d$. La fonction f est continue donc $f(x_{\varphi(n)}) \to f(d)$. D'autre part, pour tout n on a $M - \frac{1}{n} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)} < f(x_{\varphi(n)}) \leq M$, et donc d'après le théorème des gendarmes $f(x_{\varphi(n)}) \to M$. Par unicité de la limite, on en déduit que $M = f(d)$.

En appliquant le résultat à $-f$, on montre que $-f$ est majorée et atteint sa borne supérieure et donc que f est minorée et atteint sa borne inférieure. □

Exercice 6.9. Donner un exemple de fonction f continue et définie sur $[0,1[$ telle que

a) f ne soit pas majorée.

b) f ne soit pas minorée.

c) f soit majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure.

d) f soit minorée mais n'atteint pas sa borne inférieure.

Exercice 6.10. Donner un exemple de fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

a) f ne soit pas majorée.

b) f ne soit pas minorée.

c) f soit majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure.

d) f soit minorée mais n'atteint pas sa borne inférieure.

Exercice 6.11. Dans cet exercice on donne une autre démonstration du Théorème 6.27. Soit donc $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Soit E l'ensemble des $x \in [a,b]$ tel que f soit majorée sur $[a,x]$, i.e. $E = \{x \in [a,b],\ \exists M \in \mathbb{R},\ \forall y \in [a,x],\ f(y) \leq M\}$.

i) Montrer que E est borné et non-vide.

ii) Montrer que si $x \in E$ et $x' \in [a,x]$ alors $x' \in E$. En déduire que soit $E = [a, \sup E[$ soit $E = [a, \sup E]$.

iii) En utilisant la continuité de f au point $c = \sup E$, montrer que $E = [a, \sup E]$ puis, en raisonnant par l'absurde, que $\sup E = b$.

b) La question précédente prouve que f est majorée. Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

i) En utilisant un procédé de dichotomie, construire deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que

1. $a_0 = a$ et $b_0 = b$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ (autrement dit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$),
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ (à chaque étape on divise la taille de l'intervalle par deux),
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $M = \sup\limits_{x\in[a_n,b_n]} f(x)$.

ii) Vérifier que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes. On note x_M leur limite commune.

iii) Montrer que $f(x_M) \leq M$.

iv) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $y_n \in [a_n, b_n]$ tel que $f(y_n) \geq M - \frac{1}{n}$. En déduire que $f(x_M) \geq M$.

v) Conclure.

6.3 Fonctions réciproques

6.3.1 Bijectivité et monotonie

On rappelle qu'une fonction $f : E \to F$ est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Si f est bijective, sa réciproque est la fonction $f^{-1} : F \to E$ telle que

$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$. Autrement dit, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f. Pour les fonctions numériques d'une variable réelle on peut facilement relier le caractère bijectif (ou injectif) d'une fonction à son sens de variation.

Lemme 6.30. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est strictement monotone alors elle est injective. En particulier elle est bijective de I dans $f(I)$.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$. On peut toujours supposer que $x_1 < x_2$.

Si f est strictement croissante on a $f(x_1) < f(x_2)$, et si f est strictement décroissante on a $f(x_1) > f(x_2)$. Dans tous les cas $f(x_1) \neq f(x_2)$ donc f est injective.

Par ailleurs une fonction f est toujours surjective de I sur $f(I)$, voir Remarque 1.43, et donc f est bien bijective de I dans $f(I)$. □

Remarque 6.31. *De façon légèrement abusive, on note en général également f l'application de I dans $f(I)$ qui à x associe $f(x)$.*

Lemme 6.32. *Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une application bijective. Si f est strictement croissante, resp. strictement décroissante, alors sa réciproque f^{-1} est strictement croissante, resp. strictement décroissante.*

Démonstration. On traite le cas où f est strictement croissante. Soient $y_1, y_2 \in J$ tels que $y_1 < y_2$. Notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. On raisonne par l'absurde. Si $x_1 \geq x_2$ comme f est croissante on a $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire $y_1 \geq y_2$, ce qui contredit $y_1 < y_2$. Donc on a $x_1 < x_2$, soit $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Conclusion : f^{-1} est bien strictement croissante. □

Remarque 6.33. *Il n'y a aucune hypothèse de continuité sur f dans les lemmes précédents.*

Lemme 6.34. *Soient I un <u>intervalle</u> et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u>. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.*

Démonstration. $\Leftarrow$: c'est le Lemme 6.30.

$\Rightarrow$: On va montrer la contraposée, c'est-à-dire "si f n'est pas strictement monotone alors f n'est pas injective". Remarquons que "f n'est pas strictement monotone" est équivalent à "f n'est pas strictement croissante <u>et</u> f n'est pas strictement décroissante", ce qui s'écrit

$$\underbrace{(\exists (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \text{ et } f(x_1) \geq f(x_2))}_{(*)} \text{ et } \underbrace{(\exists (y_1, y_2) \in I^2,\ y_1 < y_2 \text{ et } f(y_1) \leq f(y_2))}_{(**)}.$$

On définit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par, pour tout $h \in [0,1]$,

$$g(h) = f((1-h)x_1 + hy_1) - f((1-h)x_2 + hy_2).$$

Comme x_1, y_1 sont dans I et que I est un intervalle, on a bien $(1-h)x_1 + hy_1 \in I$ pour tout $h \in [0,1]$ et donc $f((1-h)x_1 + hy_1)$ est bien définie. De même, $f((1-h)x_2 + hy_2)$ est bien définie, ainsi la fonction g est bien définie.

La fonction f est continue donc g est continue. De plus, d'après $(*)$, $g(0) = f(x_1) - f(x_2) \geq 0$ et, d'après $(**)$, $g(1) = f(y_1) - f(y_2) \leq 0$. Donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $h_0 \in [0,1]$ tel que $g(h_0) = 0$, ce qui équivaut à

$$f((1-h_0)x_1 + h_0 y_1) = f((1-h_0)x_2 + h_0 y_2).$$

Par ailleurs, $(1-h_0)x_1 + h_0 y_1 \neq (1-h_0)x_2 + h_0 y_2)$ (car $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $(1-h_0) \geq 0$ et $h_0 \geq 0$), donc f n'est pas injective (on a trouvé deux valeurs $x \neq x'$ tels que $f(x) = f(x')$). □

Corollaire 6.35. *Une application continue et bijective est strictement monotone.*

Exercice 6.12. Trouver un contre-exemple à l'énoncé du lemme si

a) On ne suppose pas que f est continue.

b) On ne suppose pas que I est un intervalle.

Proposition 6.36. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle si et seulement si f est continue.*

Démonstration. $\Leftarrow$: c'est le Corollaire 6.25 (ici on n'a pas besoin de l'hypothèse f monotone).

$\Rightarrow$: On suppose que f est croissante, la preuve est similaire dans le cas décroissant. Soit $x_0 \in I$, tel que x_0 ne soit pas le plus grand élément de I (si $I = [a, b]$ cela signifie $x_0 \neq b$). Comme f est croissante, d'après la Proposition 5.33 et la Remarque 5.34, elle admet en x_0 une limite à droite $l \geq f(x_0)$.

Supposons que $l > f(x_0)$. Alors, pour tout $x \in I$, soit $x > x_0$ et on a, d'après la Proposition 5.33, $f(x) \geq l$, soit $x \leq x_0$ et alors $f(x) \leq f(x_0)$. En particulier, f ne prend aucune valeur entre $f(x_0)$ et l, i.e. $f(I) \cap]f(x_0), l[= \emptyset$.

Par ailleurs comme x_0 n'est pas le plus grand élément de I, il existe $x_1 \in I$ tel que $x_0 < x_1$ et on a $f(x_0) \leq l \leq f(x_1)$. Comme $f(I)$ est un intervalle, on a $]f(x_0), l[\subset [f(x_0), f(x_1)] \subset f(I)$ ce qui contredit $f(I) \cap]f(x_0), l[= \emptyset$.

Ainsi $f(x_0) = l$ et f est continue à droite en x_0. On montre de la même façon que f est continue à gauche en tout point $x_0 \in I$ qui n'est pas le plus petit élément de I. Finalement f est bien continue en tout point de I. $\square$

Théorème 6.37. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone, alors*

1. *$f(I)$ est un intervalle,*
2. *f est une bijection de I sur $f(I)$,*
3. *f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Démonstration. 1. et 2. ont déjà été prouvés (Corollaire 6.25 et Lemme 6.30 respectivement). Il reste à montrer 3. Par définition f^{-1} est une bijection et d'après le Lemme 6.32 elle est strictement monotone de l'intervalle $f(I)$ sur l'intervalle I, donc elle est continue par la proposition précédente. $\square$

Corollaire 6.38. *Si f est continue et bijective <u>sur un intervalle</u> I, alors f^{-1} est continue.*

☠ **Attention !** Dans le corollaire ci-dessus il est important que I soit un intervalle. Par exemple, la fonction f définie sur $I = [0, 1] \cup]2, 3]$ par $f(x) = x$ si $x \in [0, 1]$ et $f(x) = x - 1$ si $x \in]2, 3]$ est bien continue et bijective. Sa réciproque f^{-1} est la fonction définie sur $I = [0, 2]$ par $f^{-1}(x) = x$ si $x \in [0, 1]$ et $f^{-1}(x) = x + 1$ si $x \in]1, 2]$. En particulier, elle n'est pas continue en 1.

6.3.2 Fonctions trigonométriques circulaires réciproques

La fonction arc sinus

Par définition, la fonction sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est donc bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.

Définition 6.39. *La bijection réciproque de la fonction* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *est la fonction* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, appelée* arc sinus. *Elle vérifie*

$$\forall y \in [-1, 1],\ \sin(\arcsin(y)) = y \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(x)) = x.$$

Son graphe est donné à la figure 6.1.

Remarque 6.40. *Un angle est représenté sur le cercle unité par un arc de cercle. La fonction réciproque de la fonction sinus donne la valeur* $\arcsin(x)$ *de l'angle, et donc la longueur de l'arc, dont le sinus vaut x, d'où le nom arcsinus.*

Proposition 6.41. *La fonction arcsinus est continue sur* $[-1, 1]$.

Démonstration. C'est une application directe du Théorème 6.37. $\square$

☠ **Attention !** Si $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la quantité $\arcsin(\sin(x))$ est bien définie mais ne vaut pas x. Par exemple, $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0$.

La fonction arc cosinus

Par définition la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle est donc bijective de $[0, \pi]$ dans $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Définition 6.42. *La bijection réciproque de la fonction* $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ *est la fonction* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$*, appelée* arc cosinus. *Elle vérifie*

$$\forall y \in [-1,1],\ \cos(\arccos(y)) = y \quad et \quad \forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos(x)) = x.$$

Son graphe est donné à la figure 6.1.

Proposition 6.43. *La fonction arccosinus est continue sur* $[-1,1]$.

Démonstration. C'est à nouveau une application directe du Théorème 6.37. □

☠ **Attention !** Si $x \notin [0,\pi]$, la quantité $\arccos(\cos(x))$ est bien définie mais ne vaut pas x. Par exemple, $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0$.

Proposition 6.44. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *on a* $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a $\cos(\frac{\pi}{2} - u) = \sin(u)$. Soit $x \in [-1,1]$, on a donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \sin(\arcsin(x)) = x. \tag{6.3}$$

Or $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$, donc $0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \leq \pi$. On a alors

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x).$$

Mais d'après (6.3) on a $\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)\right) = \arccos(x)$, d'où $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. □

La fonction arc tangente

La fonction tangente est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 6.13. Montrer l'affirmation ci-dessus sans calculer la dérivée de tangente.

Elle est donc bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, +\infty[$.

Définition 6.45. *La bijection réciproque de la fonction* $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *est la fonction* $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*, appelée* arc tangente. *Elle vérifie*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(y)) = y \quad et \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan(x)) = x.$$

Son graphe est donné à la figure 6.1.

Proposition 6.46. *La fonction arctangente est continue sur* $\mathbb{R}$.

☠ **Attention !** Si $x \in D_{\tan} \setminus]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (on rappelle que $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$) la quantité $\arctan(\tan(x))$ est bien définie mais ne vaut pas x. Par exemple $\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(0) = 0$.

Exercice 6.14. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$ où $\mathrm{sgn}(x)$ est le signe de x, i.e. $\mathrm{sgn}(x)$ vaut 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.

Solution. On traite le cas $x > 0$. Dans ce cas $\arctan(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc $\sin(\arctan(x))$ et $\cos(\arctan(x))$ sont non nuls. On peut donc écrire

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)} = \frac{\cos(\arctan(x))}{\sin(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}} = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{x}.$$

Comme $u = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\arctan(\tan(u)) = u$ et donc

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

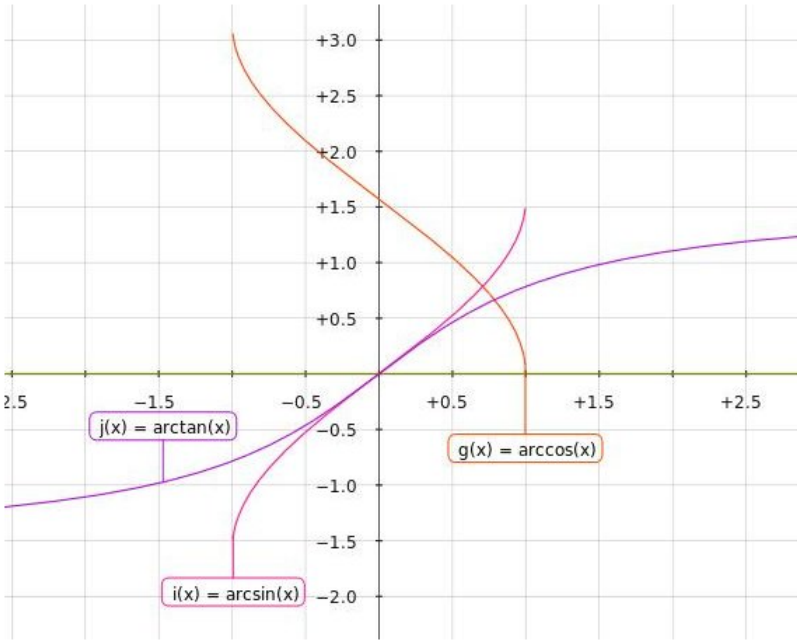


FIG. 6.1 – Fonctions trigonométriques réciproques

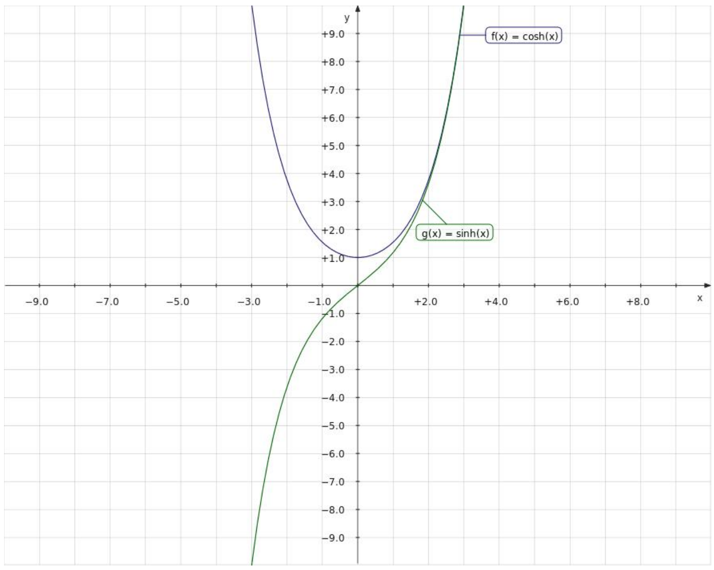


FIG. 6.2 – Fonctions sinh et cosh

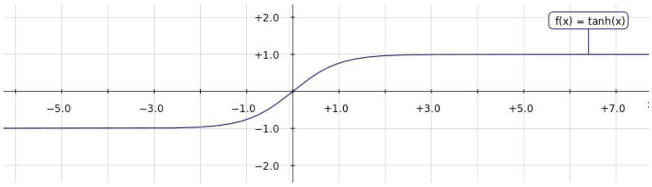


FIG. 6.3 – Fonction tanh

6.3.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques et leur réciproque

On définit les fonctions *sinus hyperbolique*, notée sinh ou Sh, et *cosinus hyperbolique*, notée cosh ou Ch, par

$$\sinh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) \end{array}, \quad \text{et} \quad \cosh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) \end{array}.$$

Leur graphe est donné à la figure 6.2.

Proposition 6.47. *Les fonctions* sinh *et* cosh *sont continues sur* $\mathbb{R}$. *La fonction* sinh *est impaire, strictement croissante et bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *La fonction* cosh *est paire, strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$ *et bijective de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[1, +\infty[$.

Exercice 6.15. Démontrer la proposition ci-dessus.

La fonction *tangente hyperbolique*, notée tanh ou Th, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \end{array}.$$

Remarque 6.48. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $\cosh(x) \geq 1$, *en particulier* $\cosh(x) \neq 0$, *donc la fonction* tanh *est bien définie. Son graphe est donnée à la figure 6.3*

Proposition 6.49. *La fonction* tanh *est continue sur* $\mathbb{R}$, *impaire, strictement croissante et bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-1, 1[$.

Exercice 6.16. Démontrer la proposition ci-dessus.

Exercice 6.17. Montrer que

a) $\mathrm{e}^{x} = \cosh(x) + \sinh(x)$.

b) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

c) $\tanh(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Remarque 6.50. *L'ensemble des points* (x, y) *du plan tels que* $x^2 - y^2 = 1$ *est une hyperbole, d'où le nom de trigonométrie hyperbolique. En effet, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $x = \cosh(t)$ *et* $y = \sinh(t)$ *vérifient cette équation (de la même manière que* $x = \cos(t)$ *et* $y = \sin(t)$ *vérifient* $x^2 + y^2 = 1$ *qui est l'équation d'un cercle, d'où le nom de trigonométrie circulaire).*

Exercice 6.18. Montrer que

a) $\cosh(a + b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$.

b) $\sinh(a + b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$.

c) $\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a) = \frac{1+\tanh^2(a)}{1-\tanh^2(a)}$.

d) $\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a) = \frac{2\tanh(a)}{1-\tanh^2(a)}$.

e) $\tanh(a + b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$.

f) $\tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1+\tanh^2(a)}$.

g) $\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh(\frac{a+b}{2})\cosh(\frac{a-b}{2})$.

h) $\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh(\frac{a+b}{2})\sinh(\frac{a-b}{2})$

i) $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh(\frac{a+b}{2})\cosh(\frac{a-b}{2})$

j) $\sinh(a) - \sinh(b) = 2\sinh(\frac{a-b}{2})\cosh(\frac{a+b}{2})$.

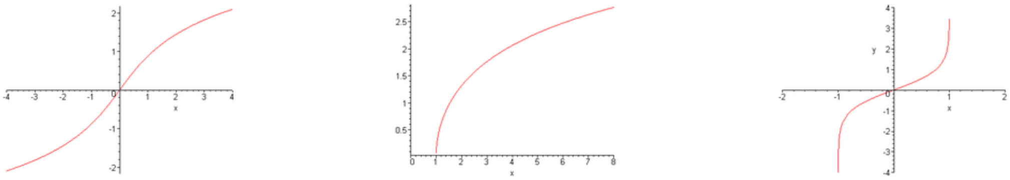


FIG. 6.4 – Fonctions Argsinh, Argcosh et Argtanh

Remarque 6.51. *Les formules obtenues dans l'exercice précédent sont appelées formules de trigonométrie hyperbolique. Elles ressemblent fortement à celle de trigonométrie circulaire, par exemple* $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

A la vue des formules d'Euler, Proposition 4.19, et de la définition des fonctions sinh *et* cosh *on peut formellement écrire* $i\sin(x) = \sinh(ix)$ *et* $\cos(x) = \cosh(ix)$. *La similitude entre les formules de trigonométrie circulaire et de trigonométrie hyperbolique n'est donc pas si surprenante que ça.*

De la même manière que pour les fonctions trigonométriques circulaires, on introduit les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

Définition 6.52. *1. La fonction réciproque de la fonction* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est la fonction* Argsinh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *notée aussi* ArgSh *et appelée* argument sinus hyperbolique. *Elle vérifie*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \sinh(\text{Argsinh}(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argsinh}(\sinh(x)) = x.$$

2. La fonction réciproque de la fonction $\cosh : \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[$ *est la fonction* Argcosh: $[1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$, *notée aussi* ArgCh *et appelée* argument cosinus hyperbolique. *Elle vérifie*

$$\forall y \in [1,+\infty[\,,\ \cosh(\text{Argcosh}(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \text{Argcosh}(\cosh(x)) = x.$$

3. La fonction réciproque de la fonction $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ *est la fonction* Argtanh: $]-1,1[\to \mathbb{R}$, *notée aussi* ArgTh *et appelée* argument tangente hyperbolique. *Elle vérifie*

$$\forall y \in]-1,1[\,,\ \tanh(\text{Argtanh}(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \text{Argtanh}(\tanh(x)) = x.$$

Le graphe de ces fonctions est donné à la figure 6.4

Proposition 6.53. *Les trois fonctions Argsinh, Argcosh et Argtanh sont continues sur leur ensemble de définition.*

Contrairement au cas des fonctions trigonométriques circulaires réciproques, on peut calculer explicitement les fonctions Argsinh, Argcosh et Argtanh à l'aide des fonctions "usuelles".

Exercice 6.19. Montrer que

a) Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\text{Argcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

c) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\text{Argtanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

6.4 Exercices

Exercice 6.20.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ \dfrac{x^2+2x+3}{x^3+1} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

b) Soit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad x = 1, \\ \dfrac{x+1}{3x-1} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

La fonction g est-elle continue en 1 ?

Exercice 6.21. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = a$ et $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

b) Montrer que f n'est pas continue en 0.

On considère maintenant la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = a$ et $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$.

c) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$.

d) Pour quelle(s) valeur(s) de a est-elle continue en 0.

Exercice 6.22. On note $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction partie entière.

a) Sur quel ensemble la fonction E est-elle continue ?

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$. Sur quel ensemble la fonction f est-elle continue ?

Exercice 6.23.

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout couple de réels (x, y) appartenant à $[a, +\infty[$, on a

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{a^2}|x - y|.$$

b) En déduire que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon.$$

c) Écrire une formulation de la propriété précédente en termes de limite.

d) En déduire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6.24. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si} \quad x < 0, \\ \dfrac{\ln(1+3x)}{2x} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

est-elle prolongeable par continuité en 0. On précisera alors la valeur du prolongement de f en 0.

Exercice 6.25. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 6.26. Soit $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{1 - \cos(\sin x)}$.

a) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle définie, continue ?

b) En quels points peut-on prolonger f par continuité ?

Exercice 6.27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f est dite *uniformément continue sur* $\mathbb{R}$ si elle vérifie la propriété (P) suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x - y| < \alpha \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

a) Quelle est la différence entre cette définition et celle de "f est continue sur $\mathbb{R}$" ?

b) Donner la négation de (P).

c) Montrer que $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra choisir dans la négation de (P) : $\varepsilon = 1$, $x = \frac{1}{\alpha}$ et $y = x + \frac{\alpha}{2}$).

d) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$. En déduire que la fonction sinus est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.28. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq |x|$.

a) Interpréter graphiquement cette condition.
b) Montrer que f est continue en 0.
c) La fonction $x \to x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice 6.29. Étudier les suites définies par récurrence suivantes.
a) $u_{n+1} = u_n^2 + 2$, $u_0 \in \mathbb{R}$.
b) $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, $u_0 = 0$.
c) $u_{n+1} = \sin u_n$, $u_0 \in \mathbb{R}$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(x)| \leq |x|$.
d) $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$, $u_0 > 0$.

Exercice 6.30. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
b) On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.
c) On suppose que f n'est pas la fonction nulle.
  i) Justifier que $f(1) > 0$.
  ii) Montrer que $f(x) = (f(1))^x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$ (on pourra commencer par montrer le résultat pour $x \in \mathbb{N}$ puis $x \in \mathbb{Z}$).
  iii) Montrer que $f(x) = (f(1))^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (autrement dit f est une fonction puissance).
d) Où a-t-on utilisé l'hypothèse "f continue" ?

Exercice 6.31.
a) Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que tout polynôme P réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 6.32. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et p et q deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0).$$

Exercice 6.33. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$. On suppose que $f(0) = g(1) = 0$ et $g(0) = f(1) = 1$. Montrer que

$$\forall \lambda > 0,\ \exists x \in [0,1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 6.34. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère les propriétés suivantes

$$P1\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) > 0 \text{ ou } f(x) < 0) \quad \text{et} \quad P2\ :\ (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)\,.$$

a) Les propriétés $P1$ et $P2$ sont-elles équivalentes ?
b) Donner une CNS pour que $P1$ soit vraie.
c) Donner une CS simple pour que $P1$ et $P2$ soient équivalentes.

Exercice 6.35.
a) Donner un exemple d'une fonction f sur $[0,1]$, non constante, telle que $\forall x \in [0,1]$, $(f(x))^2 = 1$.
b) Soit f continue sur sur $[0,1]$ telle que $\forall x \in [0,1]$, $(f(x))^2 = 1$. Montrer que f est constante.
c) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues sur I telles que pour tout $x \in I$, $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 6.36. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = f(|x|) > 0$. Montrer que f est paire.

Exercice 6.37. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. (Justifier la réponse.)
a) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
b) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f prend au moins une fois tout valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
d) Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.
e) Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure ou sa borne inférieure.
f) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est bornée.
g) L'image du segment $[a, b]$ par une fonction continue est un segment $[c, d]$.
h) L'image de l'intervalle $]a, b[$ par une fonction continue est un intervalle $]c, d[$.
i) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si l'image de $[a, b]$ par f est un segment alors f est continue.
j) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si l'image de $[a, b]$ par f n'est pas un segment alors f n'est pas continue.
k) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et croissante alors f est injective.
l) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est telle que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $[M, +\infty[$.

Exercice 6.38.
a) Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire est impaire.
b) Pourquoi ne peut-on pas parler de la fonction réciproque d'une fonction paire ?

Exercice 6.39. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x}$. Montrer que f est continue, bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ et déterminer sa réciproque f^{-1} (on précisera bien l'ensemble de définition de f^{-1}).

Exercice 6.40. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{2x+2} & \text{si} \quad x < -1, \\ 2x + 3 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 2x + 3 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

a) Tracer son graphe.
b) Montrer que f est continue et strictement croissante.
c) Donner les formules définissant sa fonction réciproque f^{-1} (en précisant bien son ensemble de définition) et tracer le graphe de f^{-1}.

Exercice 6.41. Soient f et g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. On veut montrer qu'il existe un point c dans $[0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$. On raisonne par l'absurde. On suppose que le résultat est faux.
a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\underbrace{(\forall x \in [0, 1],\ f(x) - g(x) > \alpha)}_{(1)} \quad \text{ou} \quad \underbrace{(\forall x \in [0, 1],\ g(x) - f(x) > \alpha)}_{(2)}.$$

On note $f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n fois) et $g_n = g \circ g \circ \cdots \circ g$.
b) Montrer que les fonctions f_n et g_n sont continues sur $[0, 1]$.
c) Dans le cas (1), montrer que $\forall n > 0$, $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) - g_n(x) > n\alpha$. En déduire que (1) ne peut pas arriver.
d) Montrer de la même manière que (2) ne peut pas arriver. Conclure.

Exercice 6.42. Simplifier les expressions suivantes

a) $\cos(2 \arccos(x))$	**c)** $\sin(2 \arccos(x))$	**e)** $\sin(2 \arctan(x))$
b) $\cos(2 \arcsin(x))$	**d)** $\cos(2 \arctan(x))$	**f)** $\tan(2 \arcsin(x))$

Exercice 6.43. Montrer les formules suivantes :
a) $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.
b) $\arcsin(4/5) = 2 \arctan(1/2)$.

Exercice 6.44. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Chapitre 7

Dérivabilité

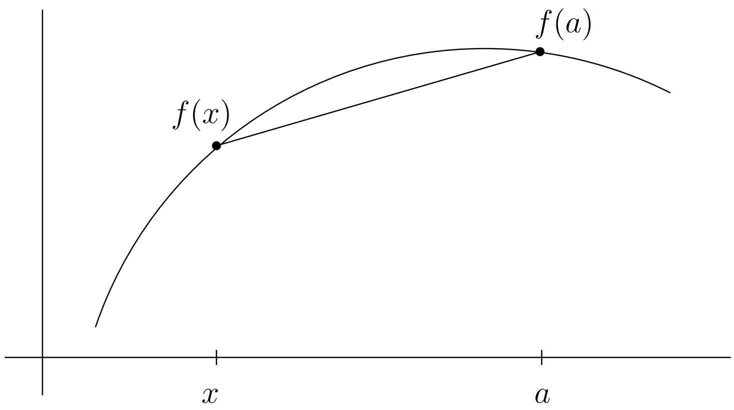
Dans tout ce chapitre I, et sauf précision contraire, désignera à nouveau un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

7.1 Fonctions dérivées

7.1.1 Définitions

Définition 7.1. *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est* dérivable *en a si la limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle le nombre dérivé de f en a.*

Remarque 7.2. *La quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'appelle le taux de variation de la fonction f entre a et x. C'est la pente du segment joignant $(a, f(a))$ à $(x, f(x))$.*



Remarque 7.3. *Dans la définition on peut remplacer le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ par $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ en posant $x = a + h$ et alors on étudie la limite quand $h \to 0$ de ce dernier rapport.*

Exercice 7.1. En utilisant la définition, calculer la dérivée des fonctions suivantes.
a) $f(x) = ax + b$ en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = \sqrt{x}$ en tout $x_0 > 0$. f est-elle dérivable en 0 ?

Définition 7.4. *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable à droite, resp. à gauche, en a si a n'est pas le plus grand élément de I et $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, resp. a n'est pas le plus petit élément de I et $\lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on note $f'_d(a)$, resp. $f'_g(a)$, cette limite et on l'appelle la dérivée à droite, resp. à gauche, de f en a.*

Proposition 7.5. *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.*

Exercice 7.2. Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Proposition 7.6. *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Démonstration. Il suffit d'écrire pour $x \neq a$ que $f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et de faire tendre x vers a. □

Attention ! La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue mais pas dérivable en 0.

7.1.2 Interprétation graphique. Meilleure approximation affine

Définition 7.7. *Si f est dérivable en a, la* tangente *à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ est la droite passant par ce point et de pente $f'(a)$. Autrement dit c'est la droite T_a d'équation*

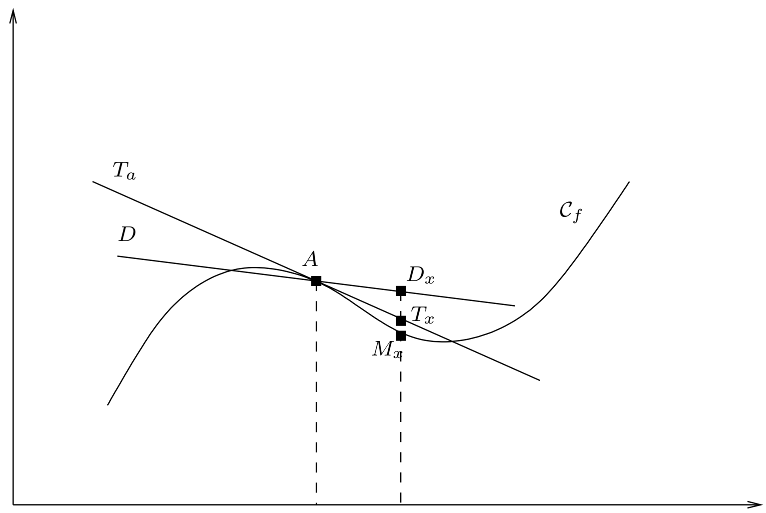
$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Remarque 7.8. *La tangente est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.*

L'idée de la droite tangente au point $(a, f(a))$ est que c'est la droite du plan qui approche le mieux la courbe représentative de f au voisinage de ce point. Plus précisément, on a la propriété suivante

Proposition 7.9. *Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Pour toute droite $D :\ y = \alpha(x-a)+\beta$ du plan, si M_x, T_x et D_x notent les points d'abscisse x et appartenant respectivement à la courbe représentative de f, à sa tangente T_a au point $(a, f(a))$ et à la droite D, alors il existe un voisinage $I =]a-\eta, a+\eta[$ de a tel que pour tout $x \in I$ on ait $M_xT_x \leq M_xD_x$, c'est-à-dire*

$$|f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))\,| \leq |f(x) - (\alpha(x-a)+\beta)|. \tag{7.1}$$



Remarque 7.10. *L'équation d'une droite non verticale du plan peut toujours se mettre sous la forme $y = \alpha(x-a)+\beta$.*

Démonstration. Soit $D :\ y = \alpha(x-a)+\beta$ une droite du plan. Comme f est dérivable en a, elle est aussi continue en a, et on a donc $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - (f(a)+f'(a)(x-a))\,| = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - (\alpha(x-a)+\beta)| = |f(a)-\beta|$. On distingue alors deux cas selon que $\beta = f(a)$ ou non.

Si $\beta \neq f(a)$, on a $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(a)-\beta| > 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$ on ait

$$|f(x) - (f(a)+f'(a)(x-a))\,| < \varepsilon,$$

et

$$\begin{aligned} \big|\,|f(x) - (\alpha(x-a)+\beta)| - |f(a)-\beta|\,\big| < \varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad -\varepsilon < |f(x) - (\alpha(x-a)+\beta)| - \underbrace{|f(a)-\beta|}_{=2\varepsilon} < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \varepsilon < |f(x) - (\alpha(x-a)+\beta)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

En particulier pour $x \in]a-\eta, a+\eta[$ on a $|f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))| < \varepsilon < |f(x) - (\alpha(x-a)+\beta)|$ et donc (7.1) est bien vérifiée.

Si $\beta = f(a)$. Soit $\alpha = f'(a)$ et le résultat est évident, soit $\alpha \neq f'(a)$ et on pose $\varepsilon = \frac{1}{2}|f'(a) - \alpha|$. Puisque f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, $x \neq a$, on ait

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \varepsilon,$$

et

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| - |f'(a)-\alpha|\right| < \varepsilon &\iff -\varepsilon < \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| - \underbrace{|f'(a)-\alpha|}_{=2\varepsilon} < \varepsilon \\ &\iff \varepsilon < \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

En particulier pour $x \in]a-\eta, a+\eta[$, $x \neq a$, on a

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| < \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| \iff |f(x) - (f(a)+f'(a)(x-a))| < |f(x) - (\alpha(x-a)+f(a))|.$$

L'inégalité (7.1) étant évidemment vérifiée pour $x = a$ (les deux membres sont alors nuls), cela prouve le résultat. □

En fait, l'existence d'une "meilleure approximation affine" caractérise le fait d'être dérivable.

Définition 7.11. *Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une meilleure approximation affine en a s'il existe une fonction affine $P(x) = \alpha(x-a)+\beta$ telle que, pour toute fonction affine $Q(x) = \gamma(x-a)+\delta$, il existe un voisinage $]a-\eta, a+\eta[$ de a sur lequel $|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - Q(x)|$.*

Théorème 7.12. *Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f admet une meilleure approximation affine en a si et seulement si elle est dérivable en a. La meilleure approximation est alors $P(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.*

Lemme 7.13. *Soit $A \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Si $|A| \leq |A+\varepsilon|$ et $|A| \leq |A-\varepsilon|$ alors $|A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.*

Démonstration. On raisonne par disjonction de cas.

Si $A \geq 0$, alors l'inégalité $|A| \leq |A-\varepsilon|$ se réécrit

$$A \leq |A-\varepsilon| \iff (A-\varepsilon \leq -A \text{ ou } A-\varepsilon \geq A) \iff (2A \leq \varepsilon \text{ ou } \varepsilon \leq 0) \iff A \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $A \geq 0$ on a bien $|A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $A \leq 0$, alors l'inégalité $|A| \leq |A+\varepsilon|$ se réécrit

$$-A \leq |A+\varepsilon| \iff (A+\varepsilon \leq A \text{ ou } A+\varepsilon \geq -A) \iff (\varepsilon \leq 0 \text{ ou } 2A \geq -\varepsilon) \iff -A \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $A \leq 0$ on a bien $|A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. □

Démonstration du Théorème. $\Leftarrow$: c'est la Proposition 7.9.

$\Rightarrow$: on suppose que f admet une meilleure approximation affine $P(x) = \alpha(x-a)+\beta$.

Si on prend la fonction affine $Q(x) = f(a)$, c'est-à-dire qu'on choisit $\gamma = 0$ et $\delta = f(a)$, on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - \alpha(x-a) - \beta| \leq |f(x) - f(a)|$ pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$. En particulier en $x = a$ on obtient $|f(a) - \beta| \leq 0$ et donc nécessairement $\beta = f(a)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $Q_+(x) = (\alpha+\varepsilon)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $\gamma = \alpha+\varepsilon$ et $\delta = f(a)$, et $Q_-(x) = (\alpha+\varepsilon)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $\gamma = \alpha-\varepsilon$ et $\delta = f(a)$. Il existe alors η_+ et η_- tels que

$$\forall x \in]a-\eta_+, a+\eta_+[\,,\ |f(x) - \alpha(x-a) - f(a)| \leq |f(x) - Q_+(x)|$$

et

$$\forall x \in]a-\eta_-, a+\eta_-[\,,\ |f(x) - \alpha(x-a) - f(a)| \leq |f(x) - Q_-(x)|.$$

Soit $\eta = \min(\eta_-, \eta_+) > 0$. On a alors pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, $x \neq a$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - \alpha(x-a) - f(a)| \leq |f(x) - Q_+(x)| &\iff |f(x) - \alpha(x-a) - f(a)| \leq |f(x) - (\alpha+\varepsilon)(x-a) - f(a)| \\
&\iff \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha - \varepsilon\right|,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|f(x) - \alpha(x-a) - f(a)| \leq |f(x) - Q_-(x)| &\iff |f(x) - \alpha(x-a) - f(a)| \leq |f(x) - (\alpha-\varepsilon)(x-a) - f(a)| \\
&\iff \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha + \varepsilon\right|.
\end{aligned}$$

On applique alors le lemme avec $A = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha$. On a donc, pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$, $x \neq a$, $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$0 < |x-a| < \eta \implies \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| < \varepsilon.$$

C'est précisément la définition de $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha$. Conclusion f est bien dérivable en a. De plus, $f'(a) = \alpha$ et donc la meilleure approximation affine de f est bien $P(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$. □

7.1.3 Application dérivée

Définition 7.14. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I. La* fonction dérivée *de f, notée f', est la fonction définie sur I par*

$$f' : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}.$$

La proposition 7.6 donne immédiatement qu'une fonction dérivable sur I est continue sur I.

Théorème 7.15. *Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables en a. Alors,*

1. *$f + g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
2. *λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*
3. *fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
4. *si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ est définie sur un voisinage de a et dérivable en a. De plus, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g(a)^2}$.*
5. *si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de a et dérivable en a. De plus,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration. 1. Pour $x \in I$, $x \neq a$, on écrit

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Le résultat découle alors du 3. de la Propositon 5.21.

2. Pour $x \in I$, $x \neq a$, on écrit

$$\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \frac{\lambda f(x) - \lambda f(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Le résultat découle alors du 4. de la Propositon 5.21.

3. Pour $x \in I$, $x \neq a$, on écrit
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.\end{aligned}$$
Puisque g est dérivable en a elle est aussi continue en a donc $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Le résultat découle alors du 3. et du 6. de la Propositon 5.21.
4. Puisque g est dérivable en a elle est continue en a. De plus $g(a) \neq 0$ donc, d'après la Proposition 5.26, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[$ on ait $g(x) \neq 0$, i.e. $\frac{1}{g}$ est bien définie au voisinage de a. Pour tout $x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[$ on écrit
$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$
Le résultat découle alors de la Propositon 5.21 et de la dérivabilité (et donc de la continuité) de g en a.
5. On applique 3. et 4. avec f et $\frac{1}{g}$.

□

Théorème 7.16. *Soient I et J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Idée de la démonstration : si $x \neq a$ on écrit
$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
En appelant $y = f(x)$, puisque f est dérivable en a elle y est continue. Donc lorsque x tend vers a on a $y \to f(a)$. L'idée est alors d'écrire
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \times \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= \lim_{y\to f(a)}\frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} \times \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = g'(f(a)) \times f'(a).\end{aligned}$$
Il y a cependant un passage incorrect : on a divisé par $f(x)-f(a)$ mais ce terme pourrait être nul. On peut penser au cas où f est constante, ou par exemple à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ qui s'annule pour tout $x = \frac{1}{n\pi}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$.

La démonstration ci-dessous évite ce problème mais l'idée générale de l'argument est celle donnée cidessus.

Démonstration. Soit $\epsilon : J \to \mathbb{R}$ définie par $\epsilon(y) = \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} - g'(f(a))$ si $y \neq f(a)$ et $\epsilon(f(a)) = 0$. Comme g est dérivable en $f(a)$ cela prouve que la fonction ϵ est continue en $f(a)$. Par ailleurs on a pour tout $y \in J$
$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a)) \times (y - f(a)) + \epsilon(y) \times (y - f(a)).$$
On écrit alors
$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a} = g'(f(a)) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \epsilon(f(x)) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
On peut maintenant prendre la limite $x \to a$ et le résultat découle de la dérivabilité de f en a, de la continuité de ϵ en $f(a)$ et de la Proposition 5.21. □

7.1.4 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 7.17. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ injective et continue sur I, dérivable en a et telle que $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$, est dérivable en $f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. Pour tout $y \in f(I) \setminus \{f(a)\}$, on peut écrire

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)}.$$

Comme f est dérivable en a on a $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Mais d'après le Théorème 6.37 la fonction f^{-1} est continue sur $f(I)$ donc $\lim_{y\to f(a)} f^{-1}(y) = a$. La propriété sur la composition des limites, Proposition 5.23, nous donne ainsi $\lim_{y\to f(a)} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = f'(a)$. Mais $f'(a) \neq 0$, d'où le résultat en appliquant la Proposition 5.21. □

Corollaire 7.18. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ injective et dérivable sur I. Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) \neq 0$ alors la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable et on a pour tout $y \in f(I)$:*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

Démonstration. Soit $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. D'après le théorème précédent on a

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \iff (f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

□

7.1.5 Dérivée des fonctions usuelles

- Par définition du logarithme la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- L'exponentielle est la réciproque du logarithme, donc par le théorème 7.17 on a

$$\exp'(x) = (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$

- Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $(x^n)' = nx^{n-1}$ et si f est dérivable alors f^n aussi et on a $(f^n(x))' = nf'(x)f^{n-1}(x)$.
- Si $n \in \mathbb{Z}$ est strictement négatif, la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la formule ci-dessus reste valable pour tout $x \neq 0$.

Exercice 7.3. Montrer que les fonctions sinh, cosh et tanh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.

Exercice 7.4. On rappelle que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ (voir Proposition 5.35).

a) En utilisant la définition, montrer que les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.

b) Montrer que la fonction tan est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.

Exercice 7.5. Montrer que

a) La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

b) La fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

c) La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

Exercice 7.6. Montrer que
a) La fonction Argcosh est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\mathrm{Argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
b) La fonction Argsinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
c) La fonction Argtanh est dérivable sur $]-1,1[$ et $\mathrm{Argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

7.2 Le théorème des accroissements finis

7.2.1 Extremum local d'une fonction

Définition 7.19. *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *On dit que a est un* minimum global*, resp.* maximum global*, de f si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(a)$, resp. $f(x) \leq f(a)$.*
2. *On dit que a est un* extremum global *de f si a est un maximum global ou un minimum global de f.*
3. *On dit que a est un* minimun local*, resp.* maximum local*, de f s'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$, on ait $f(x) \geq f(a)$, resp $f(x) \leq f(a)$.*
4. *On dit que a est un* extremum local *de f si a est un maximum local ou un minimum local de f.*
5. *Un maximum local (global), resp. minimum local (global), est dit* strict *si pour tout $x \in I \cap]a-\eta, a+\eta[$ $(x \in I)$, $x \neq a$, on a $f(x) > f(a)$, resp. $f(x) < f(a)$.*

Remarque 7.20. *Si a est un minimum, resp. maximum, global de f alors a est un minimum, resp. maximum, local de f.*

Théorème 7.21. *Soient I un intervalle* <u>ouvert</u> *de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a et a est un extremum local de f alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que a est un maximum local et soit $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$ on ait $f(x) \leq f(a)$. Alors, si $x \in]a, a+\eta[$ on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et donc, puisque f est dérivable en a, d'après la Proposition 5.27 on a $f'(a) \leq 0$. Par ailleurs, si $x \in]a-\eta, a[$ on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ et par le même argument que ci-dessus on en déduit que $f'(a) \geq 0$. Finalement on a bien $f'(a) = 0$. $\square$

Remarque 7.22. *La récriproque est fausse. Par exemple la dérivée de $x \mapsto x^3$ est nulle en 0, mais 0 n'est pas un extremum local.*

☠ **Attention !** Il faut que l'intervalle soit ouvert, ou du moins que a ne soit pas au bord de l'intervalle, comme par exemple $I = [a, b[$. En effet on ne pourrait alors pas appliquer les deux parties de l'argument ci-dessus. Si $I = [a, b[$, on ne pourra pas appliquer la seconde partie de l'argument puisque f n'est jamais définie pour $x < a$. Par exemple, soit f la restriction de la fonction $x \mapsto 2x+1$ (dont le graphe est une droite) à l'intervalle $[0, 1]$. Alors 0 et 1 sont respectivement un minimum et un maximum local de f, cependant $f'(x) = 2 \neq 0$ pour tout x !

7.2.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 7.23. *[Théorème de Rolle] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

L'interprétation graphique du théorème de Rolle est la suivante : si les deux points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ de la courbe représentative de f ont même ordonnée, autrement dit si la droite (AB) est horizontale, alors la courbe représentative de f admet une tangente horizontale entre A et B, voir Figure 7.1.

Remarque 7.24. *Le point c n'est pas forcément unique, voir Figure 7.1.*

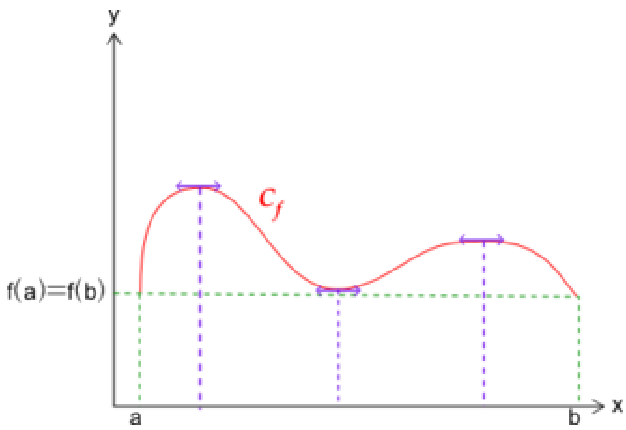


FIG. 7.1 – Le théorème de Rolle

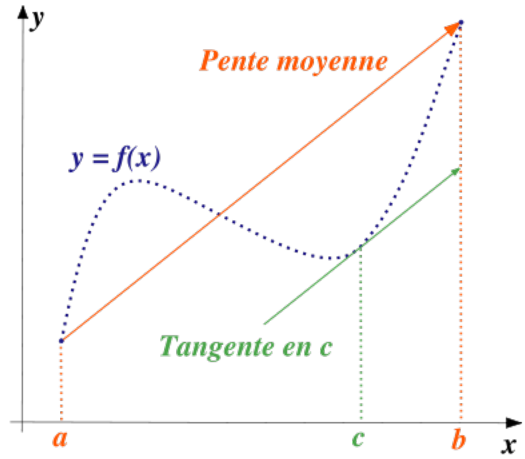


FIG. 7.2 – Le théorème des accroissements finis

Démonstration. D'après le Théorème 6.27 (page 75), puisque la fonction f est continue sur $[a, b]$ elle est bornée et atteint ses bornes $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.

Si $m = M$, f est constante et la dérivée d'une fonction constante est nulle, donc $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$.

Sinon, on a $m < M$ et on ne peut donc pas avoir $M = f(a)$ et $m = f(a)$. Supposons que $M \neq f(a)$ (l'autre cas se traite de la même façon). Comme $f(a) = f(b)$, on a aussi $M \neq f(b)$. Comme f atteint son maximum, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$, et ce qui précède prouve que $c \in]a, b[$. Comme la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ et que c est un maximum global (donc local) de f sur $]a, b[$ on peut appliquer le Théorème 7.21, ce qui prouve que $f(c) = 0$. □

Le théorème suivant est la généralisation du théorème de Rolle au cas où $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas forcément égaux.

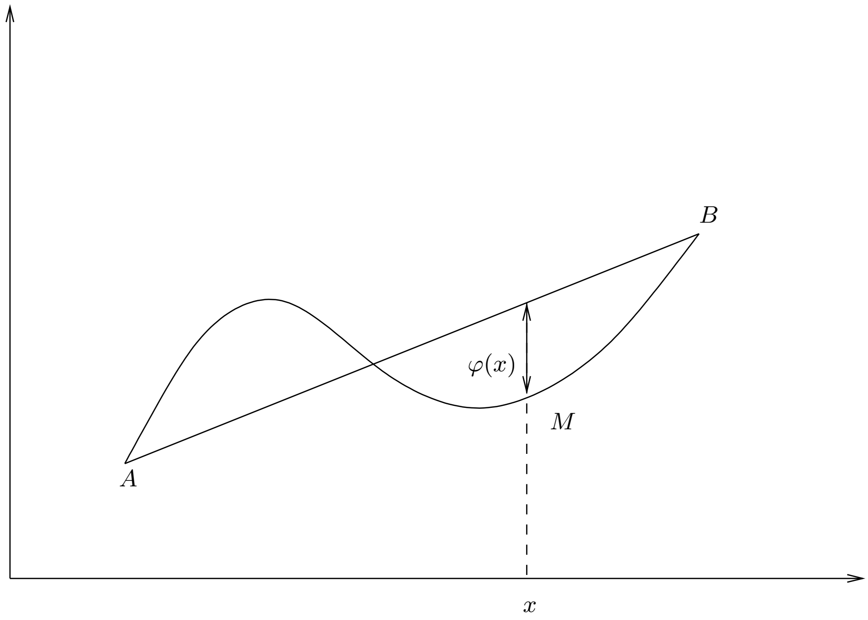
Théorème 7.25. *[Théorème des accroissements finis] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Graphiquement la quantité $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ représente la pente de la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Ce résultat signifie donc qu'il existe (au moins) un point de la courbe représentative de f d'abscisse $c \in]a, b[$ en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB), voir Figure 7.2.

Démonstration. C'est une application directe du théorème de Rolle. On définit la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - \left(f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)$. Elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Mais $\varphi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, d'où le résultat. □

Remarque 7.26. *La droite (AB) a pour équation $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$, ce qui est précisément le terme qui apparaît dans la définition de φ. Autrement dit, la fonction φ représente la distance algébrique entre un point $M = (x, f(x))$ de la courbe et le point de la droite (AB) ayant la même abscisse que M.*



Le théorème qui suit est une conséquence directe du Théorème des accroissements finis.

Théorème 7.27 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$*. On suppose que* f' *est bornée par* M *sur* $]a,b[$*, i.e. pour tout* $x \in]a,b[$ *on a* $|f'(x)| \leq M$*. Alors, pour tout* $(x,y) \in [a,b]^2$*, on a* $|f(x) - f(y)| \leq M|(x-y)|$*.*

Exemple 7.28. *La fonction* sin *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*. Comme* $\sin'(x) = \cos(x)$ *est bornée par* 1*, on a*

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration. Supposons que $x \leq y$ (le cas $y \leq x$ se traite de la même façon). Puisque f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[x,y]$, on sait qu'il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Comme $|f'(c)| \leq M$, on a bien le résultat voulu. ☐

7.2.3 Monotonie et signe de la dérivée

Une importante conséquence du Théorème des accroissements finis est le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction. Commençons par le cas particulier où f' est nulle. Si I est un intervalle, $\mathring{I}$ désigne I privé de ses extrémités éventuelles. Par exemple, si $I = [a,b[$ alors $\mathring{I} =]a,b[$.

Proposition 7.29. *Soient* I *un* **intervalle** *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue sur* I *et dérivable sur* $\mathring{I}$*. Alors* $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathring{I}$ *si et seulement si* f *est constante sur* I*.*

Démonstration. $\Leftarrow$: c'est immédiat en utilisant la définition de la dérivée. Soit $x_0 \in I$, pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, donc $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.

$\Rightarrow$: Soit $(x,y) \in I^2$. On veut montrer que $f(x) = f(y)$. Si $x = y$ c'est évident. On va supposer $x < y$ (l'autre cas est similaire). On applique alors le Théorème des accroissements finis sur $[x,y]$. Il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c) \times (y - x)$. Mais $f'(c) = 0$ donc $f(y) = f(x)$. ☐

☠ **Attention !** L'implication "$f' = 0 \Rightarrow f$ est constante" n'est vraie que si I est un intervalle ! Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée est nulle, mais f n'est pas constante.

Théorème 7.30. *Soient* I *un* **intervalle** *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue sur* I *et dérivable sur* $\mathring{I}$*.*

1. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.*

2. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$ alors f est strictement croissante sur I.

3. f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.

4. Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$ alors f est strictement décroissante sur I.

☠ **Attention !** Le fait que f soit strictement croissante n'implique pas que $f'(x) > 0$ sur $\mathring{I}$. Par exemple la fonction $f(x) = x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante mais $f'(0) = 0$.

Démonstration. 1. $\Rightarrow$ Supposons que f est croissante sur I. Soit $x_0 \in \mathring{I}$. Pour tout $x \neq x_0$ on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, et donc d'après la Proposition 5.27 on a $f'(x_0) \geq 0$.

$\Leftarrow$ Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq y$. On applique le Théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x, y]$. Il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Comme $f'(c) \geq 0$ on a $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$, i.e. $f(x) \leq f(y)$. La fonction f est bien croissante.

2. C'est le même raisonnement que ci-dessus. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. On applique le Théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x, y]$. Il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Comme $f'(c) > 0$ on a $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$, i.e. $f(x) < f(y)$. La fonction f est bien strictement croissante.

3. et 4. On applique 1. et 2. à la fonction $-f$. □

Remarque 7.31. *Si l'implication "f croissante $\Rightarrow f' \geq 0$" découle directement de la définition de la dérivée et des propriétés sur les limites, la réciproque n'est pas si évidente : elle utilise le Théorème des accroissements finis.*

7.3 Dérivées d'ordre supérieur et formules de Taylor

7.3.1 Dérivées successives

Définition 7.32. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et si f' est aussi dérivable sur I, alors on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f'. La fonction f'' est appelée la* dérivée seconde *de f.*

Par récurrence on définit, si elle existe, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f^{(n)}$, appelée la dérivée n-ème de f, ou dérivée d'ordre n de f, par $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. On dit alors que f est n fois dérivable sur I.

On dit que f est indéfiniment dérivable *sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 7.33. *La fonction f est n fois dérivable si et seulement si sa dérivée f' est $n-1$ fois dérivable et on a $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.*

Le théorème suivant est l'équivalent du Théorème 7.15 pour les dérivées d'ordre n.

Théorème 7.34. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors,*

1. $f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

2. λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

3. fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, (Formule de Leibniz).

4. si $g \neq 0$ sur I, $\dfrac{1}{g}$ est n fois dérivable sur I.

5. si $g \neq 0$ sur I, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.

Démonstration. À part 3., les résultats découlent directement de la définition des dérivées d'ordre n et du Théorème 7.15.

Montrons 3. par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit P_n la proposition "si f et g sont n fois dérivables alors fg est n fois dérivable et $(fg)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$".

Pour $n = 0$ il n'y a rien à faire et pour $n = 1$ c'est le 3. du Théorème 7.15.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie et montrons P_{n+1}. On suppose donc que f et g sont $n+1$ fois dérivables. En particulier elles sont n fois dérivables donc fg est n fois dérivable et on a $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Puisque f et g sont $n+1$ fois dérivables, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$ les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables et donc d'après le Théorème 7.15 la fonction $(fg)^{(n)}$ aussi, autrement dit fg est bien $n+1$ fois dérivable. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \quad \text{(on a posé } l = k+1 \text{ dans la 1ère somme)} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \quad \left(\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}, \quad \text{(règle de Pascal).}
\end{aligned}$$

□

Exercice 7.7. Montrer que $f(x) = x^2|x|$ est deux fois dérivable sur $]-1, 1[$.

Théorème 7.35. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est n fois dérivable sur I et g est n fois dérivable sur J alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.*

Démonstration. On montrer le résultat par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$ c'est le Théorème 7.16.
- Soit $n \geq 1$. On suppse que f et g sont $n+1$ fois dérivables. En particulier elles sont dérivables donc $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. Puisque f est $n+1$ fois dérivable la fonction f' est n fois dérivable. De même g' est n fois dérivable. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux fonctions g' et f (qui est n fois dérivable puisqu'elle l'est $n+1$ fois) et le 3. du Théorème 7.34, on en déduit que la fonction $(g \circ f)'$ est n fois dérivable et donc, d'après la Proposition 7.33, la fonction $g \circ f$ est bien $n+1$ fois dérivable.

□

7.3.2 Classe d'une fonction

Définition 7.36. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est de classe C^n sur I, $n \in \mathbb{N}$, si f est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n-ème $f^{(n)}$ est continue sur I.*
2. *On dit que f est de classe C^∞ si f est indéfiniment dérivable.*

La propriété suivante est l'équivalent de la Proposition 7.33

Proposition 7.37. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est de classe C^n si et seulement si sa dérivée f' est de classe C^{n-1}.*

Exemple 7.38. *La plupart des fonctions usuelles, comme les polynômes,* ln, exp, cos, sin, tan, cosh, sinh, tanh, *sont C^∞ sur leur ensemble de définition.*

Remarque 7.39. *Si f est n fois dérivable sur I on dit parfois que f est de classe D^n.*

Exercice 7.8. Montrer que f est de classe C^∞ si et seulement si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème suivant est une conséquence directe des Théorèmes 7.34 et 6.9.

Théorème 7.40. *Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^n sur I. Alors,*

1. *$f + g$ est de classe C^n sur I.*
2. *λf est de classe C^n sur I.*
3. *fg est de classe C^n sur I.*
4. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{1}{g}$ est de classe C^n sur I.*
5. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{f}{g}$ est de classe C^n sur I.*

Finalement le théorème qui suit se montre de la même façon que le Théorème 7.35 en utilisant la Proposition 7.37.

Théorème 7.41. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est de classe C^n sur I et g est de classe C^n sur J alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.*

7.3.3 Formules de Taylor

Le théorème qui suit est une généralisation du Théorème des accroissements finis.

Théorème 7.42 (Formule de Taylor–Lagrange à l'ordre $n+1$)**.** *Soient $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe C^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable dans $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Remarque 7.43. *Si $n = 0$ c'est précisément le Théorème des accroissements finis.*

Remarque 7.44. *L'hypothèse sur la fonction f signifie que la fonction $f^{(n)}$ existe, est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

Remarque 7.45. *Le résultat est encore vrai si $a > b$.*

Démonstration. L'idée est d'appliquer le Théorème de Rolle à une fonction bien choisie.

Etant donné $A \in \mathbb{R}$, soit φ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - A(b-x)^{n+1} \\ &= f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}. \end{aligned}$$

Quelque soit la valeur de A on a $\varphi(b) = 0$. On choisit donc A tel que $\varphi(a) = 0$. Un tel choix est toujours possible, il suffit de prendre

$$A = \frac{f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{(b-a)^{n+1}}.$$

L'hypohèse sur f entraine que la fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Puisque $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or pour tout $x \in]a, b[$

on a

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times\left(f^{k+1}(x)\times(b-x)^k+f^{(k)}(x)\times(-1)\times k(b-x)^{k-1}\right)+A(n+1)(b-x)^n\\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times f^{k+1}(x)\times(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\times f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1}+A(n+1)(b-x)^n\\
&= -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\times f^{k+1}(x)\times(b-x)^k+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{l!}\times f^{(l+1)}(x)(b-x)^{l}+A(n+1)(b-x)^n\\
&= -\frac{f^{n+1}(x)}{n!}(b-x)^n+A(n+1)(b-x)^n.
\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\varphi'(c)=(b-c)^n\times\left((n+1)A-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\right)=0\quad\iff\quad A=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

On conclut en remplaçant A par $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ dans la définition de φ et en disant que $\varphi(a)=0$. □

Théorème 7.46 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n)**.** *Soient $n\in\mathbb{N}^*$, I un intervalle et $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I. Pour tout $a\in I$, il existe une fonction $\epsilon:I\to\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ et pour tout $x\in I$*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\varepsilon(x).$$

Remarque 7.47. *La formule de Taylor-Young peut aussi s'écrire, pour tout $h\in\mathbb{R}$ tel que $a+h\in I$,*

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+h^n\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h)\to 0$ quand $h\to 0$.

Remarque 7.48. *Pour $n=1$, la relation $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)$ se réécrit, pour $x\neq a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)+\varepsilon(x)$. La condition $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ est donc équivalente à $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, ce qui est exactement la définition de f est dérivable en $f'(a)$.*

Remarque 7.49. *Si $a\in I$ et $f,g:I\to\mathbb{R}$ sont telles qu'il existe $\varepsilon:I\to\mathbb{R}$ vérifiant*

i) pour tout $x\in I$, $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$,

ii) $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=\varepsilon(a)=0$,

on dit que f est négligeable *devant g au voisinage de a et on note $f\underset{x\sim a}{=}o(g)$. La formule de Taylor-Young s'écrit alors*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

Démonstration. On donne la preuve dans le cas où f est non seulement n fois dérivable mais de classe C^n.

Soit $a\in I$. Puisque f est de classe C^n sur I, pour tout $x\in I\setminus\{a\}$ elle est de classe C^{n-1} sur $[a,x]$ (ou $[x,a]$ si $x<a$) et n fois dérivable sur $]a,x[$ (ou $]x,a[$). On peut donc appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$. Il existe $c(x)\in]a,x[$ (ou $]x,a[$) tel que

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n\\
&= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\times\frac{f^{(n)}(c(x))-f^{(n)}(a)}{n!}.
\end{aligned}$$

On définit alors la fonction ε par $\varepsilon(x)=\dfrac{f^{(n)}(c(x))-f^{(n)}(a)}{n!}$ si $x\neq a$ et $\varepsilon(a)=0$. Il reste juste à vérifier que $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

On sait que $c(x)$ est compris entre a et x donc d'après le théorème des gendarmes (Théorème 5.29) $\lim_{x\to a}c(x)=a$. Le résultat découle donc de la continuité de la fonction $f^{(n)}$ en a. □

7.4 Exercices

Exercice 7.9. Calculer les dérivées des fonctions suivantes

a) $f(x) = \sin(\cos(x))$.

b) $g(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$.

c) $h(x) = \frac{1}{1+\tan(x)}$.

d) $i(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$.

e) $j(x) = \sin(x^5 + 2x)$.

f) $k(x) = \sin\left(\dfrac{x^2}{\cos(x^2)}\right)$.

Exercice 7.10. Calculer f' en fonction de g' dans les cas suivants

a) $f(x) = g(x + g(x))$.

b) $f(e^{x+3}) = g(x^3)$.

Exercice 7.11. Étudier et calculer si elle existe la dérivée en 0 des fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Exercice 7.12. Soient g et h deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que $g(0) = h(0)$. On définit la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ h(x) & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur g et h pour que f soit dérivable en 0 (Indication : deviner la solution en raisonnant graphiquement).

Exercice 7.13. Soit $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est dérivable.

b) Calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

c) Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $(f^{-1})''(0)$.

Exercice 7.14. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

a) Toute fonction dérivable en x_0 est continue en x_0. La réciproque ?

b) Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 alors f est dérivable en x_0.

c) Si f est dérivable sur $]0, 2[$ et $f'(1) = 0$ alors f admet un extremum local en 1.

d) La dérivée de $f(x) = \cos(2x)$ est $f'(x) = -\sin(2x)$.

e) On peut appliquer le théorème de Rolle à $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$. Même question avec $g(x) = 5x^2 + 3$ sur $[0, 2]$.

Exercice 7.15. Les énoncés suivants sont ils corrects ? Si la réponse est non, les corriger.

a) Soit f dérivable sur $[a, b]$ continue sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

c) Interprétation graphique du théorème des accroissements finis : soit f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que la courbe représentative de f admette au point $C = (c, f(c))$ une tangente qui passe par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Exercice 7.16. En utilisant des théorèmes du cours, montrer que

a) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a^n < \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$.

c) Si $a_0, \ldots, a_n$ vérifient $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ alors $\exists x \in]0, 1[$ tel que $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$. Indication : considérer la fonction f définie par $f(x) = a_0 x + a_1 \dfrac{x^2}{2} + \cdots + a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 7.17. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = -1$. Montrer que

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = -1$.

b) $\exists x_1 \in]0, 1[$, $f(x_1) < 0$.

c) $\exists x_2 \in]0, 1[$, $f(x_2) = 0$.

d) $\exists x_3 \in]0, 1[$, $f'(x_3) = 0$.

Exercice 7.18. Soit f continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = 0$ et f' soit croissante.

a) Montrer que $\forall x > 0,\ f(x) \leq xf'(x)$.

b) Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est croissante.

Exercice 7.19.

a) Montrer que l'on a $\forall x \in]0, \pi[,\ x\cos(x) - \sin(x) < 0$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

c) Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin(a)}{\sin(b)}$.

Exercice 7.20. Soit p un entier positif.

a) Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.

b) Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Exercice 7.21. Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ avec $0 < a < b$. On suppose de plus que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f qui passe par l'origine. Indication : on pourra introduire la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 7.22. Soit P un polynôme réel, ayant n racines réelles distinctes. Montrer que P' en a au moins $n-1$.

Exercice 7.23. Calculer, à l'aide du théorème des accroissements finis :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

Exercice 7.24.

a) Montrer qu'il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(l) = l$. Montrer que $0 \leq l \leq 1$.
Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$.

c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leq (\sin(1))|u_n - l|$.

d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq (sin(1))^n |u_0 - l|$. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers l.

Exercice 7.25. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ où $P_n(x)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré n. Indication : raisonner par récurrence.

Exercice 7.26. Soit $g_1(x)$ la dérivée d'ordre 1 de $x^2 - 1$, $g_2(x)$ la dérivée d'ordre 2 de $(x^2-1)^2$, et pour tout entier n soit $g_n(x)$ la dérivée d'ordre n de $(x^2-1)^n$.

a) Calculer $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour $0 < p \leq n$, $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$.

b) Calculer la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ puis celle de $(x+1)^n$.

c) En déduire la dérivée d'ordre p de $(x-1)^n$ en 1 et celle de $(x+1)^n$ en -1.

d) Calculer les dérivées d'ordre p en 1 et -1 de $(x^2-1)^n$, $0 \leq p \leq n$.

e) Montrer que si $n \neq 0$, $g_n(x)$ s'annule au moins n fois dans $]-1, 1[$. (Indication : utiliser d) et Rolle.)

Exercice 7.27. Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Trouver la limite $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+2h) + f(a) - 2f(a+h)}{h^2}$.

Exercice 7.28. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{3\sin(x) - x\cos(x) - 2x}{x^5}$.

Exercice 7.29. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^2.$$

Montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur en x_0 et $f'(x_0) = 0$. Que peut-ton en déduire sur f ?

Exercice 7.30. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$.

a) Montrer que f est infiniment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

b) Vérifier que f est continue en 0.

c) Montrer que f est dérivable en 0.

d) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer que $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-m_n} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ où $m_n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(x)$ est un polynôme à coefficients réels.

f) En déduire que f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

g) Déterminer une fonction non identiquement nulle infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'extérieur de $[0, 1]$.

Exercice 7.31. Soit $f(x) = |x|$. La fonction f est-elle C^∞ sur $]-\infty, 0[$? sur $]0, +\infty[$? sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe C^3 sur $[-1, 0]$? sur $[0, 1]$? sur $[-1, 1]$?

Exercice 7.32. Pour une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on considère la propriété suivante

$$(P): \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ f(b) - f(a) = (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

a) Soient $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$ et f définie par $f(x) = Ax^2 + Bx + C$. Montrer que f vérifie (P).

b) Soit f de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour f entre a et $\frac{a+b}{2}$, puis entre b et $\frac{a+b}{2}$. En déduire que pour tout $d \in \mathbb{R}$ on a $f^{(3)}(d) = 0$. En déduire que f est un polynôme de degré au plus 2.

c) Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{f(x+1)-f(x-1)}{2}$. En déduire que f est de classe C^3. Conclure.

Exercice 7.33. Déterminer la dérivée n-ème de la fonction $f(x) = x^n(1+x)^n$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.34. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(x) + \arctan(2x)$.

a) Étudier f et tracer sa courbe représentative.

b) Montrer que f est une bijection (de quel ensemble dans quel ensemble ?) et faire l'étude de la fonction réciproque. Tracer sa courbe représentative.

Exercice 7.35. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(4x^3 - 3x)$.

a) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.

b) Étudier sa dérivabilité.

c) Montrer que $f(x) = -3\arcsin(x)$ si $x \in [-1/2, 1/2]$.

d) Calculer $f(x)$ pour $x \in [1/2, 1]$.

Exercice 7.36. Comparer les fonctions définies par $f(x) = \arccos(x)$ et $g(x) = \arcsin(\sqrt{1-x2})$.

Exercice 7.37. Calculer $f(x) = \arcsin(\cos(2x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.38. Soit f la fontion définie par $f(x) = \ln(\tanh(x/2))$.

a) Faire l'étude de f (on précisera bien son ensemble de définition).

b) Montrer que f est bijective (de quel ensemble vers quel ensemble ?) et déterminer f^{-1}.

Annexes

Annexe A

Alphabet grec

majuscule	minuscule	nom	majuscule	minuscule	nom
A	α	alpha	B	β	beta
Γ	γ	gamma	Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	epsilon	Z	ζ	zeta
H	η	eta	Θ	θ, ϑ	thêta
I	ι	iota	K	κ	kappa
Λ	λ	lambda	M	μ	mu
N	ν	nu	Ξ	ξ	xi
O	o	omicron	Π	π, ϖ	pi
P	ρ, ϱ	rhô	Σ	σ, ς	sigma
T	τ	tau	Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ, φ	phi	X	χ	chi
Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega

Annexe B

Notations

- $a \in A$: l'élément a appartient à l'ensemble A.
- $a \notin A$: l'élément a n'appartient pas à l'ensemble A.
- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: somme pour k allant de p à n (k entier).

  Exemple : $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.
- $\displaystyle\prod_{k=p}^{n}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: produit pour k allant de p à n (k entier).

  Exemple : $\displaystyle\prod_{k=2}^{5} k^2 = 2^2 \times 3^2 \times 4^2 \times 5^2$.
- $n!$, $n \in \mathbb{N}$: factorielle n. On a $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ si $n \geq 1$, et par convention $0! = 1$.
- $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: coefficients binomiaux. C'est le nombre de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

  On trouve parfois la notation C_n^p.
- $E(x)$: la partie entière de x. C'est le plus grand entier relatif tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

- resp. : respectivement.
- ssi : si et seulement si.
- i.e. : id est, qui signifie c'est-à-dire.

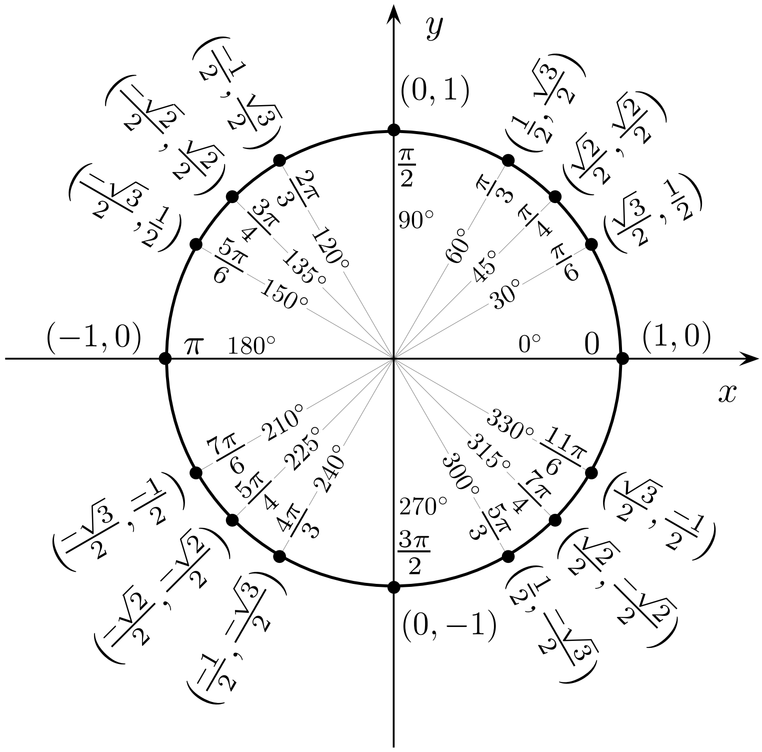
Annexe C

Trigonométrie circulaire

$$\sin^2(a)+\cos^2(a)=1$$
$$\tan(a)=\frac{\sin(a)}{\cos(a)}=\frac{1}{\cot(a)}$$
$$1+\tan^2(a)=\frac{1}{\cos^2(a)}$$
$$1+\cot^2(a)=\frac{1}{\sin^2(a)}$$
$$\sin(-a)=-\sin(a)$$
$$\cos(-a)=\cos(a)$$
$$\tan(-a)=-\tan(a)$$
$$\sin(\pi-a)=\sin(a)$$
$$\cos(\pi-a)=-\cos(a)$$
$$\tan(\pi-a)=-\tan(a)$$
$$\sin(\pi+a)=-\sin(a)$$
$$\cos(\pi+a)=-\cos(a)$$
$$\tan(\pi+a)=\tan(a)$$
$$\sin(\pi/2-a)=\cos(a)$$
$$\cos(\pi/2-a)=\sin(a)$$
$$\tan(\pi/2-a)=1/\tan(a)$$
$$\sin(\pi/2+a)=\cos(a)$$
$$\cos(\pi/2+a)=-\sin(a)$$
$$\tan(\pi/2+a)=-1/\tan(a)$$
$$\sin(3\pi/2-a)=-\cos(a)$$
$$\cos(3\pi/2-a)=-\sin(a)$$
$$\tan(3\pi/2-a)=1/\tan(a)$$
$$\sin(3\pi/2+a)=-\cos(a)$$
$$\cos(3\pi/2+a)=\sin(a)$$
$$\tan(3\pi/2+a)=-1/\tan(a)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$$
$$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$$
$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$
$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
$$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$
$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin((p+q)/2)\cos((p-q)/2)$$
$$\sin(p)-\sin(q)=2\sin((p-q)/2)\cos((p+q)/2)$$
$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos((p+q)/2)\cos((p-q)/2)$$
$$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin((p+q)/2)\sin((p-q)/2)$$
$$\tan(p)+\tan(q)=\frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)}$$
$$\tan(p)-\tan(q)=\frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$$
$$\sin(a)\sin(b)=(1/2)(\cos(a-b)-\cos(a+b))$$
$$\cos(a)\cos(b)=(1/2)(\cos(a+b)+\cos(a-b))$$
$$\sin(a)\cos(b)=(1/2)(\sin(a+b)+\sin(a-b))$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)=2\frac{\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$$
$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\tan(2a)=2\frac{\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$
$$\sin^2(a)=(1-\cos(2a))/2$$
$$\cos^2(a)=(1+\cos(2a))/2$$
$$\tan^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$$
$$\tan(a)=\frac{\sin(2a)}{1+\cos(2a)}=\frac{1-\cos(2a)}{\sin(2a)}$$

$\sin(a)=\sin(b)\Rightarrow a=b+2k\pi$ ou $a=\pi-b+2k\pi$
$\cos(a)=\cos(b)\Rightarrow a=b+2k\pi$ ou $a=-b+2k\pi$
$\tan(a)=\tan(b)\Rightarrow a=b+k\pi$
$t=\tan(\frac{a}{2})\Rightarrow\sin(a)=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos(a)=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}$



Angle	**Cosinus**	**Sinus**	**Tangente**
0	1	0	0
π	-1	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1	X
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$

Annexe D

Fonctions convexes

Définition D.1. *Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est* convexe *lorsque*

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

f est concave *si $-f$ est convexe.*

Remarque D.2. *La convexité signifie géométriquement que le graphe de f est en dessous de toutes les cordes qui joignent deux points de ce graphe.*

Il vient de la définition que si f est convexe, alors

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

et il vient que

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Théorème D.3 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)**.**

1. *Si f est dérivable, alors (f convexe $\Leftrightarrow$ f' est croissante).*
2. *Si f est deux fois dérivable, alors (f convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$).*

On obtient des inégalités intéressantes, dénommées “inégalités de convexité” de la façon suivante :

1. On se donne une fonction f ;
2. On vérifie qu'elle est convexe sur I en calculant f'' ;
3. On écrit l'inégalité de convexité (éventuellement généralisée).

Exercice D.4.

1. *Écrire une inégalité de convexité en utilisant la fonction $f(x) = -ln(x)$.*
2. *En déduire l'inégalité de Young : $\forall a > 0, b > 0, \forall p > 0, q > 0$, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

3. *Montrer que $\forall (x,y) \in (R_*^+)2$,*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

(la moyenne géométrique de deux nombres est inférieure a la moyenne arithmétique).

4. *Montrer que $\forall (x_1,\ldots,x_n) \in (R_*^+)^n$,*

$$(x_1+\cdots+x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Annales

Université de Cergy-Pontoise | Vendredi 22 décembre 2006
UFR de Sciences et techniques | M1

Mathématiques

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1:
1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Ecrire la définition mathématique de $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
2) Ecrire la négation de la proposition mathématique obtenue dans la question précédente.

Exercice 2: Déterminer, si elles existent, les limites des quantités suivantes:
1) $A(x) = \dfrac{\sin x}{2x}$, quand x tend vers 0
2) $B(x) = \dfrac{\ln(x^4) + 2x^2}{3x^2 + \ln(x^4)}$, quand x tend vers $+\infty$
3) $C(x) = (e^x + x^2)\ln(1 + 3e^{-x})$, quand x tend vers $+\infty$

Exercice 3: Soient a_n et b_n deux suites vérifiant

$$\forall n \geq 0,\ a_n > 0,\ b_n > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$$

1) Montrer que $\forall n \geq 0,\ a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$. Que peut-on dire du signe de $a_n - b_n$ pour $n \geq 1$?
2) Montrer que les suites a_n et b_n sont décroissantes, et ceci à partir du rang 1.
3) Montrer que les suites a_n et b_n sont convergentes.
4) Montrer que les suites a_n et b_n convergent vers une même limite.

Exercice 4: Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant
(i) $\forall x \in [0,1],\ x^2 \leq f(x)$
(ii) $\forall x \in [0,1],\ x - x^2 \leq f(x)$
(iii) $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq x$

1) Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Montrer qu'il existe $c_1 \in]0,1[$ tel que $f'(c_1) = 1$.
2) Quelle est la définition de dérivée à droite en un point? En déduire la valeur de $f'_d(0)$ puis de $f'(0)$.
3) Montrer qu'il existe $c_2 \in]0,1[$ tel que $f''(c_2) = 0$.

Université de Cergy-Pontoise | Jeudi 10 janvier 2008
UFR de Sciences et techniques | M1

Mathématiques

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
1) Donner la définition de dérivabilité en x_0 pour la fonction f.
2) On suppose que f est 3 fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 près de x_0.

Exercice 2: Déterminer, si elles existent, les limites des quantités suivantes
1) $A(x) = \dfrac{\sin(2x)}{7x}$, quand x tend vers 0
2) $B(x) = \dfrac{3x^3 + 5x^2}{\sin(3x^2)}$, quand x tend vers 0

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 1$. Préciser le nombre de solutions de cette équation et donner la partie réelle de chaque solution.

Exercice 4: Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$f(x) = x^2 \sin^2(\frac{1}{x})$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
1) Calculer la dérivée de f en tout point de $]0, +\infty[$.
2) Montrer que f est dérivable à droite en 0.

Exercice 5: Soient u_n, v_n, w_n les suites définies pour $n \in \mathbb{N}$ par les relations

$$u_0 = 0 \ , \quad \forall n \geq 1, \ u_n = u_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ , \quad \forall n \geq 0, \ v_n = u_{2n} \text{ et } \ w_n = u_{2n+1}$$

A1) Calculer les quantités $(u_3 - u_1)$ et $(u_4 - u_2)$.
A2) Soit $n \geq 0$. Montrer que $u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$. Que peut-on en déduire sur $v_{n+1} - v_n$? Montrer que la suite v_n est croissante.
A3) Montrer que la suite w_n est décroissante.
A3) Montrer que $w_n - v_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En déduire que les suites v_n et w_n sont adjacentes. On appelle désormais l leur limite commune.

B) Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $[x]$ la partie entière de x. Soit $n \in \mathbb{N}$.
B1) Montrer que $n = 2[\frac{n}{2}]$ ou que $n = 2[\frac{n}{2}] + 1$.
B2) Montrer que $|u_n - l| = |v_{[\frac{n}{2}]} - l|$ ou que $|u_n - l| = |w_{[\frac{n}{2}]} - l|$. En déduire que

$$|u_n - l| \leq |v_{[\frac{n}{2}]} - l| + |w_{[\frac{n}{2}]} - l|$$

B3) On pose $\varphi(n) = [\frac{n}{2}]$. Montrer que $\varphi(n) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. φ est-elle strictement croissante?
B4) On admet que les suites $v_{[\frac{n}{2}]}$ et $w_{[\frac{n}{2}]}$ convergent vers l. Montrer que la suite u_n converge vers l.

Université de Cergy-Pontoise
UFR de Sciences et techniques

M1
jeudi 15 janvier 2009

Mathématiques

(Durée : 2 heures 30 minutes)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 Soit f l'application de $\{1,2,3\}$ dans $\{4,5\}$ définie par $f(1)=4, f(2)=5, f(3)=4$. f est t-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 2 1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Ecrire la négation de la proposition ainsi obtenue.

Exercice 3 Soit $z_0 = -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$. Ecrire z_0 sous forme exponentielle. Résoudre $z^3 = z_0$ (exprimer les solutions sous forme exponentielle).

Exercice 4 Soit u_n la suite définie par $u_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$. Déterminer deux suites extraites de u_n qui convergent vers des limites distinctes. La suite u_n est-elle convergente ?

Exercice 5 Limite éventuelle quand x tend vers 0 de la quantité suivante

$$f(x) = \frac{5x}{\sin(3x)}$$

Exercice 6 1) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(t) = t - \ln(1+t)$. Calculer f' et montrer que

$$\forall t > 0, 0 \leqslant f'(t) \leqslant t$$

Soit $x > 0$. Appliquer le théorème des accroissements finis pour la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$. Montrer que

$$\forall x > 0, 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant x^2$$

2) Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$. Montrer que

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4} \leqslant \ln(1+\frac{k}{n^2}) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ (on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$).

4) Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3$. En déduire la limite de $\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2$ quand n tend vers $+\infty$.

5) Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$ converge vers une limite que l'on calculera quand n tend vers $+\infty$.

Université de Cergy-Pontoise | M1
UFR de Sciences et Techniques | jeudi 14 janvier 2010

MATHEMATIQUES

(Durée: 2 heures 30 minutes)

Exercice 1: Ecrire $z=\sqrt{3}-i$ sous forme exponentielle. Calculer z^6.

Exercice 2: Limite éventuelle des quantité suivantes

$$f(x)=\frac{\sin(2x)}{x} \quad \text{quand} \quad x\longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{3x^3+x^2e^x}{x^3+2x^2e^x} \quad \text{quand} \quad x\longrightarrow +\infty.$$

Exercice 3:

1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

2) Soit f une fonction continue sur $[1,2]$ telle que $f(1)$ et $f(2)$ appartiennent à $[1,2]$. Montrer qu'il existe un point $c\in[1,2]$ tel que $f(c)=c$. On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g définie par $g(t)=f(t)-t$.

Exercice 4: Soit $A\in\mathbb{R}$. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$g(0)=g(2)=A.$$

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\frac{g(x)-A}{x(x-2)}.$$

1) Montrer que $f(x)$ tend vers $\frac{1}{2}g'(2)$ quand x tend vers 2.

2) Montrer que $f(x)$ tend vers -$\frac{1}{2}g'(0)$ quand x tend vers 0.

3) En déduire que la fonction f se prolonge par continuité en 0 et en 2.

4) On suppose que $g'(0)=-g'(2)$. Montrer qu'il existe un point $c\in]0,2[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 5: Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $u_n=3\sin(n)+4\cos(n)$.

1) Montrer que la suite u_n est majorée.

2) Montrer que $4\leqslant\sup\{u_n|n\in\mathbb{N}\}\leqslant 5$.

Université de Cergy-Pontoise
UFR de Sciences et Techniques

lundi 10 janvier 2011

MATHEMATIQUES-M1
(Durée: 2 heures 30 minutes)

Exercise 1. Soient p et n deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Quelle est la définition du coefficient binomial[1] $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$? Montrer que le naturel $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ est un multiple de $p!$.

Exercise 2. Soit u_n une suite à valeurs réelles et $l \in \mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $u_n \longrightarrow \ell$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercise 3.
1) Soit $A = 1 - i$. Calculer A^2 et A^4.
2) Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 1 + \frac{1}{2}i = 0$ ($z \in \mathbb{C}$).

Exercise 4. Limite éventuelle des quantités suivantes

$$f(x) = \frac{x}{\sin(3x)} \quad \text{quand } x \longrightarrow 0, \qquad g(x) = \frac{3 + \ln x}{5 + 2\ln x} \text{ quand } x \longrightarrow +\infty.$$

Exercise 5.
1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{d}{dx}\big(\sin(x+\theta)\big) = \sin\big(x + \theta + \frac{\pi}{2}\big)$ puis que[2], pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{d^n}{dx^n}(\sin x) = \sin\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big).$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin x$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(x) = x^2 \sin\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big) + A_n x \sin\Big(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\Big) + B_n \sin\Big(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\Big)$$

où A_n et B_n sont des constantes que l'on précisera (on pourra utiliser la formule de Leibnitz).

Exercise 6. Soit φ la fonction définie sur $]-1, 1[$ par

$$\varphi(t) = \frac{t}{1 - t^2}.$$

1) Calculer $\lim_{t \to 1^-} \varphi(t)$ et $\lim_{t \to -1^+} \varphi(t)$.
2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. On considère u la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$\begin{cases} u(t) = f\big(\varphi(t)\big) & \text{si } t \in]-1, 1[\\ \\ u(t) = \ell & \text{si } t \in \{-1, 1\} \end{cases}.$$

2a) Montrer que u est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur]-1,1[. Montrer qu'il existe $t_0 \in]-1, 1[$ tel que $f'\big(\varphi(t_0)\big) \times \varphi'(t_0) = 0$ (on pourra utiliser le théorème de Rolle).
2b) En déduire qu'il existe $x_0 \in]-\infty, +\infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

1. Ce coefficient est aussi noté C_n^p.
2. Si f est une fonction n fois dérivable par rapport à une variable x, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ désigne la dérivée d'ordre n de f.