Université de Cergy-Pontoise
Département de Mathématiques
L1 MIPI - S1
2019/2020

Fonctions d'une variable réelle

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

LOGIQUE ET NOMBRES RÉELS

1.1 Rudiments de logique propositionnelle

Une proposition est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux).

Exemple 1.1. *La proposition "Demain il va pleuvoir" peut être soit vraie soit fausse.*

En mathématique, on part d'un petit nombre de propositions que l'on suppose vraies (les axiomes) et on essaie d'étendre le nombre d'énoncés vrais au moyen de démonstrations. Pour cela on utilise des règles de logique.

A partir de deux propositions quelconques A et B on en fabrique de nouvelles, qui peuvent être également vraies ou fausses, et dont on définit la valeur logique en fonction des valeurs logiques de A et de B :

- la négation de A, notée "non A" ou "$\neg A$". Elle est vraie quand A est fausse et fausse quand A est vraie.
- "A et B", notée également "$A \wedge B$". Elle est vraie quand les deux propositions A et B sont vraies, et fausse sinon.
- "A ou B", notée également "$A \vee B$". Elle est vraie quand au moins l'une des deux propositions A et B est vraie, et fausse sinon.
- A implique B, notée "$A \Rightarrow B$". L'idée de cette proposition est de dire "si A est vraie alors B est vraie". Elle est donc fausse uniquement lorsque A est vraie mais B est fausse. En particulier, si A est fausse alors l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, peu importe que B soit vraie ou fausse !
- A est équivalent à B, notée "$A \Leftrightarrow B$". Cette proposition affirme que A et B ont la même valeur logique : soit elles sont toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Une table de vérité résume cela :

A	B	non A	non B	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V

☠ **Attention !** L'évaluation des nouvelles propositions en fonction de la valeur des anciennes paraît naturelle sauf pour l'implication : si A est fausse, alors l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, peu importe que B soit vraie ou fausse ! Lorsqu'on dit "Si A alors B" on sous-entend "Si A est vraie, alors B est vraie", mais cela ne dit rien sur B lorsque A est fausse. Par exemple, $(x+1)^2 = x^2 + 2x \Rightarrow 1 = 0$ est vraie. Cela signifie juste que l'implication est vraie, pas que les propositions $(x+1)^2 = x^2 + 2x$ et $1 = 0$ sont vraies !

La plupart des théorèmes que vous avez vus, et que vous verrez par la suite, sont de la forme "Si l'hypothèse A est vraie alors la conclusion B est vraie". Dire que ce théorème est vrai ne signifie pas que la conclusion B est toujours vraie, mais uniquement qu'elle l'est dès que l'hypothèse A est satisfaite. Si par contre l'hypothèse A est fausse, la conclusion peut-être soit vraie soit fausse, voir l'Exemple 1.2 ci-dessous.

On utilise en mathématique l'implication pour obtenir de nouveaux résultats. Si l'on sait qu'un résultat A est vrai et si l'on montre que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, alors on en déduit que la proposition B est vraie, ce qui étend les résultats mathématiques.

Exemple 1.2. *Au collège vous avez vu le théorème suivant : "Si les droites D_1 et D_2 sont toutes les deux parallèles à une même droite D_3 alors elles sont parallèles entre elles". Ici la proposition A est "les droites D_1 et D_2 sont toutes les deux parallèles à une même droite D_3" et la proposition B est "les droites D_1 et D_2 sont parallèles". Que pouvez-vous affirmer sur les droites D_1 et D_2 si A est fausse ? Rien du tout ! Elles peuvent soit ne pas être parallèles (B est fausse, figure de gauche) soit être parallèles (B est vraie, figure de droite).*

Exemple 1.3. *On considère les propositions A : "Demain il va pleuvoir", et B : "Demain j'irai au cinéma". La proposition $A \Rightarrow B$ s'écrit alors "Si demain il pleut alors j'irai au cinéma". Dans quel(s) cas pourrez-vous dire que j'ai menti ? Comparez avec la table de vérité de $A \Rightarrow B$.*

De la même façon, l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ ne signifie pas que les propositions A et B sont vraies, mais uniquement qu'elles sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses. Par exemple, l'équivalence "$4 < 2 \;\Leftrightarrow\; 7 = 0$" est vraie ! On reviendra sur l'utilisation du symbole "$\Leftrightarrow$" dans la résolution d'équations ou d'inéquations.

☠ **Attention !** Le contraire (ou la négation) de $A \Rightarrow B$ est (A et non B) : "l'hypothèse est vraie et la conclusion est fausse". Ce n'est en aucun cas l'implication $B \Rightarrow A$. Cette dernière s'appelle l'implication *réciproque* de $A \Rightarrow B$.

Remarque 1.4. *Pour montrer qu'une équivalence $A \Leftrightarrow B$ est vraie on procède souvent en deux temps :*

1. *On montre que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie ;*
2. *On montre que l'implication $B \Rightarrow A$ est vraie.*

Cela provient du fait que la proposition

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))$$

est toujours vraie quelques soient les valeurs logiques de A et de B (on parle de tautologie).

Exercice 1.1. En utilisant une table de vérité, montrer que la proposition

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))$$

est toujours vraie quelques soient les valeurs logiques de A et de B.

Exercice 1.2. En utilisant une table de vérité, montrer que la proposition suivante est toujours vraie quelques soient les valeurs logiques de A et de B.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{ non } B \Rightarrow \text{ non } A).$$

Remarque 1.5. *Cet exercice montre qu'une implication $A \Rightarrow B$ est vraie si et seulement si l'implication non $B \Rightarrow$ non A est vraie. Autrement dit, pour montrer que "si l'hypothèse est vraie alors la conclusion est vraie" on peut aussi montrer que "si la conclusion est fausse alors l'hypothèse est fausse". La proposition non $B \Rightarrow$ non A s'appelle la contraposée de $A \Rightarrow B$ (à ne pas confondre avec la réciproque qui est la proposition $B \Rightarrow A$).*

Exercice 1.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la contraposée, montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Attention ! L'écriture de certaines propositions peut parfois être ambiguë et nécessite pour cela l'utilisation de parenthèses. Par exemple, dans la proposition "$A \Rightarrow B$ et C", faut-il comprendre "Si A est vraie alors B et C sont vraies" ou bien "C est vraie et, si A est vraie alors B est vraie" ? Pour lever l'ambiguité on écrira respectivement "$A \Rightarrow (B$ et $C)$" et "$(A \Rightarrow B)$ et C".

Exercice 1.4. A l'aide d'une table de vérité vérifiez que "$(A \Rightarrow B)$ et C " et "$A \Rightarrow (B$ et $C)$" ne signifient pas la même chose.

Conditions nécessaires, conditions suffisantes

- On dit que B est une *condition nécessaire* de A si "pour que A soit vrai, il *faut* que B soit vrai". Autrement dit, si B est faux alors A est faux : (non $B \Rightarrow$ non A) $\Longleftrightarrow$ $\boxed{A \Rightarrow B}$.
- On dit que B est une *condition suffisante* de A si "pour que A soit vrai, il *suffit* que B soit vrai". Autrement dit, si B est vrai alors A est vrai : $\boxed{B \Rightarrow A}$.
- On dit que B est une *condition nécessaire et suffisante* de A si "pour que A soit vrai, *il faut et il suffit* que B soit vrai". Autrement dit, si B est faux alors A est faux, et si B est vrai alors A est vrai : $\boxed{A \Leftrightarrow B}$.

1.2 Quelques idées sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

On ne donne ici qu'une idée assez informelle des nombres réels. Leur construction rigoureuse est beaucoup plus compliquée et admise dans le cadre de ce cours. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$. Un réel est un nombre pouvant s'écrire sous la forme

$$\pm a_1 a_2 \dots a_n, a_{n+1} a_{n+2} \dots$$

où les a_j sont des entiers naturels compris entre 0 et 9. Une telle écriture est appelée *développement décimal.*

On rencontrera souvent les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants : $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}$ l'ensemble des nombres réels x qui sont différents de 0, $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ l'ensemble des nombres réels x qui sont strictement positif, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}$.

✎ **Notation.** Si $P(x)$ est une propriété dépendant du nombre x la notation $\{x \in \mathbb{R} \,|\, P(x)\}$ signifie "l'ensemble des nombres x dans $\mathbb{R}$ tels que la propriété $P(x)$ soit vraie".

1.2.1 Résolution d'équations et raisonnement par équivalence

On considère l'équation $3x+2=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation signifie trouver toutes les solutions de l'équation, c'est-à-dire tous les nombres réels x vérifiant $3x+2=0$. Autrement dit, il s'agit de déterminer l'ensemble $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3x+2=0\}$ des solutions.

Considérons le raisonnement suivant :

> "Si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $3x+2=0$ alors, en ajoutant -2 de chaque côté, $3x=-2$ et, en multipliant par $1/3$ de chaque côté, $x=-2/3$."

A l'aide du symbole $\Rightarrow$ ce raisonnement s'écrit : soit $x \in \mathbb{R}$,

$$3x+2=0 \;\Rightarrow\; 3x=-2 \quad \text{et} \quad 3x=-2 \Rightarrow\; x=-\frac{2}{3}.$$

La proposition mathématique ci-dessus ne signifie pas que pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}$ on a $3x+2=0$, elle signifie "si $3x+2=0$ est vrai alors $3x=-2$ est vrai" et "si $3x=-2$ est vrai alors $x=-2/3$ est vrai". Autrement dit "si $3x+2=0$ est vrai alors $x=-2/3$".

Ce raisonnement montre que si x est une solution alors forcément il vaut $-2/3$. Il ne montre par contre pas que $-2/3$ est solution. Si l'on ajoute au raisonnement précédent la remarque suivante : $3(-2/3)+2=-2+2=0$ alors on montre que $-2/3$ est solution de l'équation ou encore que l'implication $(x=-2/3) \Rightarrow (3x+2=0)$ est vraie.

Ces deux étapes montrent que l'équation a exactement une solution à savoir $-2/3$, ou encore que l'équivalence $3x+2=0 \iff x=-2/3$ est vraie.

Résoudre une équation revient à montrer une équivalence ! Dans l'exemple précédent, on montre que la propriété $3x+2=0$ est équivalente à la propriété $x=-2/3$. Cette équivalence peut se faire soit en deux étapes comme ci-dessus, soit par une suite d'équivalences qui permettent de faire les deux étapes en même temps. Dans l'exemple précédent, on peut procéder de la façon suivante.

Rappelons les deux propriétés suivantes de $\mathbb{R}$. Pour tous $a,b,c \in \mathbb{R}$, $(a=b) \Leftrightarrow (a+c=b+c)$. Pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, pour tout $c \in \mathbb{R}^*$, $(a=b) \Leftrightarrow (ac=bc)$. On a alors, en utilisant la première propriété avec $a = 3x + 2$, $b = 0$ et $c = -2$, puis en utilisant la seconde avec $a = 3x$, $b = -2$ et $c = 1/3 \neq 0$,

$$3x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x = -2 \;\Leftrightarrow\; x = -2/3.$$

Remarque 1.6. *Quand on résout une équation il faut également faire attention à l'ensemble dans lequel on cherche les solutions. On a vu que "l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $3x+2 = 0$" admettait exactement une solution, $x = -2/3$. Par contre "l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{N}$ donnée par $3x + 2 = 0$" n'admet aucune solution. Dans ces exemples, afin de préciser l'ensemble dans lequel on cherche les solutions on écrira respectivement "Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x + 2 = 0$" et "Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $3x + 2 = 0$".*

☠ **Attention !** Lorsque l'on résout une équation il faut bien faire attention : est-on en train d'utiliser des implications ou des équivalences ? Dans le premier cas il ne faut pas oublier de faire la seconde étape.

Exemple 1.7. *On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = \sqrt{2x + 3}$.*

On peut faire le raisonnement suivant. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$x = \sqrt{2x + 3} \;\Rightarrow\; x^2 = 2x + 3.$$

On utilise ici la propriété "$(a = b) \;\Rightarrow\; (a^2 = b^2)$". Attention, on n'a pas ici d'équivalence. En effet $(-2)^2 = 2^2$ pourtant $-2 \neq 2$. Ce qui est vrai c'est l'équivalence

$$a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; (a = b \text{ ou } a = -b).$$

On continue ensuite en résolvant l'équation du second degré $x^2 - 2x - 3 = 0$. On en déduit alors que $x = -1$ ou $x = 3$ (faites-le !). Au final on a montré

$$x = \sqrt{2x + 3} \;\Rightarrow\; (x = -1 \text{ ou } x = 3).$$

Ce raisonnement montre seulement que s'il y a une solution alors c'est -1 ou 3 (ou les deux). Il ne dit pas que -1 est solution ni que 3 est solution.

On termine alors la résolution de l'équation de la façon suivante : pour $x = -1$ on a $\sqrt{2x + 3} = \sqrt{1} = 1 \neq x$ donc -1 n'est pas solution, pour $x = 3$ on a $\sqrt{2x + 3} = \sqrt{9} = 3 = x$ donc 3 est bien solution. Finalement, l'équation possède exactement une solution : 3.

1.2.2 Relations d'ordre

Une propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ est que cet ensemble possède une relation d'ordre, c'est à dire que l'on peut toujours comparer deux réels : $x \leq y$ signifie que x est égal à y ou que x est plus petit que y. On dit que $\leq$ est une relation d'ordre, ce qui signifie que la relation $\leq$ vérifie les propriétés de

- réflexivité : $x \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- antisymétrie : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$,
- transitivité : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

De plus l'ordre est *total* : deux éléments donnés de $\mathbb{R}$ peuvent *toujours* être comparés entre eux (on dit que $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné).

On rappelle les propriétés suivantes sur cette relation d'ordre. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

- $x \leq y \iff x+z \leq y+z$,
- Si $z > 0$ alors $x \leq y \iff zx \leq zy$,
- Si $z < 0$ alors $x \leq y \iff zx \geq zy$.

On peut en déduire par exemple
- $0 < x < y \iff 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$,
- $x < y < 0 \iff \frac{1}{y} < \frac{1}{x} < 0$,
- Si $0 < x < y$ alors $x^2 < y^2$,
- Si $x < y < 0$ alors $x^2 > y^2$.

☠ **Attention !** Si $x < 0 < y$ alors $\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{y}$, mais on ne peut a priori *rien dire* sur x^2 et y^2.

1.2.3 Valeur absolue d'un nombre réel

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit sa valeur absolue par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

On rappelle les propriétés suivantes, pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ et tout n dans $\mathbb{N}$:

(*i*) $|xy| = |x| \times |y|$,
(*ii*) $|x^n| = |x|^n$,
(*iii*) $x^2 \leq y^2 \iff |x| \leq |y|$,

Exercice 1.5. Démontrer les propriétés précédentes.

Contrairement à ce qui se passe pour le produit, la valeur absolue d'une somme n'est en général pas égale à la somme des valeurs absolues.

Proposition 1.8 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ on a*

$$\boxed{|x+y| \leq |x| + |y|}.$$

De plus, $|x+y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y ont même signe.

Démonstration. Soient x et y dans $\mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq x^2 + 2|xy| + y^2 = |x|^2 + 2|x| \times |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

La propriété (*iii*) ci-dessus permet d'affirmer que $|x+y| \leq \big||x| + |y|\big|$. Puisque $|x| + |y|$ est positif on en déduit le résultat.

Finalement, ces deux nombres sont égaux si et seulement toutes les inégalités dans le calcul ci-dessus sont des égalités. C'est-à-dire si et seulement si

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \iff xy = |xy|,$$

ce qui est le cas si et seulement si $xy \geq 0$ et donc x et y ont même signe. □

Corollaire 1.9. *Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ on a*

1. $|x-y| \leq |x|+|y|$.

2. $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ *(inégalité triangulaire inversée).*

3. $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y|$.

Démonstration. 1. On applique l'inégalité triangulaire avec x et $-y$ en remarquant que $|-y|=|y|$.

2. On applique l'inégalité triangulaire avec x et $y-x$: $|y|=|x+(y-x)| \leq |x|+|y-x|$ et donc $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$. En intervertissant les rôles de x et y on a de même $|x|-|y| \leq |x-y|$. Comme $\big||x|-|y|\big|$ vaut soit $|x|-|y|$ soit $|y|-|x|$, on en déduit le résultat.

3. On applique 2. avec x et $-y$. □

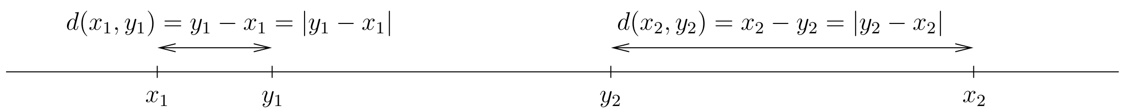
1.2.4 Distance entre les nombres réels

De façon naturelle on définit la distance entre deux réels x et y par (voir la Figure ci-dessous)

$$d(x,y) = \begin{cases} y-x & \text{si} \quad x \leq y, \\ x-y & \text{si} \quad x \geq y. \end{cases}$$

A l'aide de la valeur absolue on peut alors simplement écrire

$$\boxed{d(x,y) = |x-y|}.$$



Ainsi, étant donnés $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble des réels x tels que

$$|x-x_0| \leq \alpha$$

est l'ensemble des nombres réels x qui sont à une distance au plus α du nombre x_0.

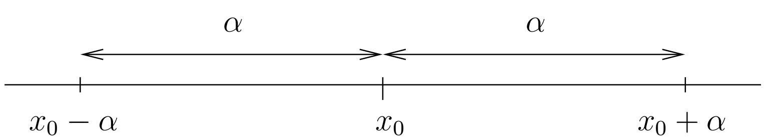
Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on vérifie facilement les propriétés suivantes :

- $(|x| = \alpha) \iff (x=\alpha \text{ ou } x=-\alpha)$,
- $(|x| \leq \alpha) \iff (-\alpha \leq x \leq \alpha)$,
- $(|x| \geq \alpha) \iff (x \leq -\alpha \text{ ou } x \geq \alpha)$.

On a alors

$$|x-x_0| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x-x_0 \leq \alpha \iff x_0-\alpha \leq x \leq x_0+\alpha.$$

Autrement dit $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| \leq \alpha\} = [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$.



Attention ! La notion de limite que nous verrons dans le Chapitre 3 repose sur celle de distance. Afin d'appréhender la définition de limite il est indispensable d'avoir en tête ce lien étroit entre *valeur absolue* et *distance entre les nombres.*

1.3 Les quantificateurs logiques

Définition 1.10. *Un* ensemble E *est une collection d'objets appelés* éléments*. On note* $x \in E$ *si l'objet* x *est un élément de* E.

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un objet x d'un ensemble E. On note :

- $\forall x \in E,\ P(x)$ lorsque la proposition $P(x)$ est vraie *pour tous les éléments* x de l'ensemble E,
- $\exists x \in E,\ P(x)$ lorsqu'*il existe au moins un élément* x de l'ensemble E pour lequel la proposition est vraie.

Exemple 1.11. *On considère l'ensemble* E *des habitants du Val d'Oise, et pour un habitant* x *on appelle* $P(x)$ *la proposition "l'habitant* x *habite Cergy". La proposition* $(\forall x \in E,\ P(x))$ *est fausse mais la proposition* $(\exists x \in E,\ P(x))$ *est vraie.*

Remarque 1.12. *Lorsqu'on écrit "* $\exists x \in E,\ P(x)$*" il peut y avoir plusieurs éléments* x *de l'ensemble* E *pour lesquels la proposition* $P(x)$ *est vraie. Si on veut préciser que* $P(x)$ *n'est vraie que pour un seul élément* x *de* E *on utilise alors la notation "* $\exists ! x \in E,\ P(x)$*" qui se lit "il existe un unique* x *dans* E *tel que* $P(x)$ *soit vraie".*

Il faut savoir nier une proposition dépendant de quantificateurs. La négation de "pour tout x, la proposition $P(x)$ est vraie" est "il existe un x tel que la proposition $P(x)$ soit fausse" :

$$\boxed{\mathrm{non}(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \mathrm{non} P(x).}$$

De même,

$$\boxed{\mathrm{non}(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x \in E, \mathrm{non} P(x).}$$

☠ **Attention !** On n'utilise jamais les symboles $\nexists$ et $\not\forall$.

Exercice 1.6. Écrire la négation de la proposition

$$\exists r \in \mathbb{R},\ \exists s \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq r \text{ et } s \leq r.$$

Remarque 1.13.

1. *Pour montrer une proposition de la forme "* $\forall x \in E, P(x)$*" (quel que soit* x *dans* E*,* x *vérifie la propriété* $P(x)$*), on commence la démonstration par : "Soit* $x \in E$*. Montrons que la propriété* $P(x)$ *est vraie...*
2. *Pour montrer une proposition de la forme "* $\exists x \in E, P(x)$*" (il existe au moins un élément* x *vérifiant la propriété* $P(x)$*), il suffit de donner un élément* x *vérifiant cette propriété. La démonstration contiendra alors sans doute la phrase : "Posons* $x = \ldots$ *Vérifions que* x *convient..."*
3. *Pour montrer qu'une proposition de la forme "* $\forall x \in E,\ P(x)$*" est fausse (c'est-à-dire que* $\exists x \in E$ *tel que* $P(x)$ *est fausse), il suffit d'exhiber un contre-exemple : Posons* $x = \ldots$ *Pour cet élément* x*,* $P(x)$ *est fausse. L'utilisation de contre-exemples est revue dans la Section* *1.4.3 page 15**.*

Exemple 1.14. *1) On veut montrer que la proposition "* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 2 > 0$*" est vraie. Ici* $E = \mathbb{R}$ *et* $P(x)$ *est la proposition "*$x^2 - 2x + 2 > 0$*".*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 > 0$. La proposition $P(x)$ est donc vraie. On a bien montré que étant donné un nombre réel x quelconque la proposition $P(x)$ était vraie et donc que la proposition "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2x + 2 > 0$" est vraie.

2) On veut montrer que la proposition "$\exists x \in \mathbb{R},\ 4x^2 > x^3$" est vraie. Ici $E = \mathbb{R}$ et $P(x)$ est la proposition "$4x^2 > x^3$".

Soit $x = 1$. On a $4x^2 = 4$, $x^3 = 1$ et $4 > 1$. La proposition $P(1)$ est vraie donc la proposition "$\exists x \in \mathbb{R},\ 4x^2 > x^3$" est vraie. On aurait pu aussi montrer que $P(2)$ est vraie (faites-le) : le x pour lequel $P(x)$ est vraie n'est pas unique.

3) On veut montrer que la proposition "$\forall x \in \mathbb{R},\ 4x^2 > x^3$" est fausse. Ici $E = \mathbb{R}$ et $P(x)$ est la proposition "$4x^2 > x^3$".

Soit $x = 5$. On a $4x^2 = 100$ et $x^3 = 125$. La proposition $P(5)$ est fausse donc "$\forall x \in \mathbb{R},\ 4x^2 > x^3$" est fausse

☠ **Attention !** La négation de la proposition "$x > 0$" est "$x \leq 0$". Par contre la négation de la proposition "$\forall x > 0,\ \dfrac{1}{x} < 1$" est la proposition "$\exists x > 0,\ \dfrac{1}{x} \geq 1$" et non pas "$\exists x \leq 0,\ \frac{1}{x} \geq 1$". Quand on écrit $\forall x > 0$ l'ensemble E des éléments considérés est $\mathbb{R}_+^*$: au lieu de $\forall x > 0$ on aurait aussi bien pu écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Le contraire de "$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x} < 1$" est bien "$\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{x} \geq 1$", soit "$\exists x > 0,\ \frac{1}{x} \geq 1$".

Sur cet exemple, la proposition P est fausse : si $x = \frac{1}{2}$ on a $\frac{1}{x} = 2 \geq 1$. La proposition Q : "$\exists x \leq 0,\ \frac{1}{x} \geq 1$" est également fausse puisque si x est négatif $\frac{1}{x}$ l'est aussi et ne peut donc pas être supérieur ou égal à 1. Les deux propositions P et Q étant fausses toutes les deux, Q ne peut pas être la négation de P.

☠ **Attention !** L'ordre des quantificateurs est important ! La proposition "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$" est vraie : pour tout nombre réel x on peut trouver un nombre réel y strictement plus grand que x, par exemple $y = x + 1$ convient. Par contre, la proposition "$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x < y$" est fausse : on ne peut pas trouver de nombre réel y qui soit plus grand que tous les nombres réels. Par exemple y n'est jamais plus grand que $y + 1$. Conclusion :

$$\boxed{\text{On ne peut pas inverser les quantificateurs } \forall \text{ et } \exists}$$

Par contre on peut inverser deux $\forall$ et deux $\exists$:

- $(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)) \iff (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x,y))$,
- $(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)) \iff (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x,y))$.

1.4 Quelques modes de raisonnement

On a déjà rencontré les raisonnements par implication ou par équivalence (résolution d'équations). On va voir ici quelques autres modes de raisonnement que vous aurez l'occasion d'utiliser par la suite. On en verra un dernier, le raisonnement dit "par l'absurde", dans la Section 2.1.4 du Chapitre 2.

1.4.1 Raisonnement par contraposition

Pour montrer que $A \Rightarrow B$ est vrai, on peut soit utiliser un raisonnement dit direct : "supposons que A est vrai et montrons qu'alors B est vrai", soit un raisonnement par contraposition :

"supposons que B est faux et montrons qu'alors A est faux". Cela vient du fait que, voir l'Exercice 1.2, l'équivalence ci-dessous est vraie quelques soient les valeurs logiques de A et B :

$$\boxed{(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow ((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A))}$$

La phrase $((\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A))$ est la *contraposée* de $(A \Rightarrow B)$.

☠ **Attention !** Ne pas confondre contraposée et réciproque. La *réciproque* de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$. De l'une on ne peut **rien** dire sur l'autre.

Exemple 1.15. *Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrons à l'aide d'un raisonnement par contraposition que "si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier". Ici A est la proposition "$2^n - 1$ est un nombre premier" et B est " n est un nombre premier". La négation de B est "n n'est pas premier" ce qui s'écrit encore "il existe $p, q \in \mathbb{N}$ différents de 1 et n tels que $n = pq$" et celle de A est "$2^n - 1$" n'est pas premier.*

Supposons donc que non B est vraie : il existe $p, q \in \mathbb{N}$ différents de 1 et n tels que $n = pq$. On a alors

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(1 + 2^p + \cdots + 2^{p(q-1)}).$$

La dernière égalité vient de la propriété (voir la somme des termes d'une suite géométrique)

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall a \neq 1, \ a^{m+1} - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^m),$$

appliquée avec $a = 2^p$ et $m = q - 1$. Ainsi $2^p - 1$ divise $2^n - 1$. Par ailleurs $2^p - 1$ est différent de 1 car $p \neq 1$ et différent de $2^n - 1$ car $p \neq n$, et donc $2^n - 1$ n'est pas premier, autrement dit non A est vraie.
Conclusion : la proposition "non $B \Rightarrow$ non A" est vraie. Sa contraposée "$A \Rightarrow B$" est donc également vraie : si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

Exercice 1.7. Soient $x \geq 0$ un nombre réel, et les deux propositions A : "$\forall \varepsilon > 0, \ 0 \leq x \leq \varepsilon$" et B : "$x = 0$". Montrer à l'aide d'un raisonnement par contraposition que $A \Rightarrow B$.

1.4.2 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence s'utilise quand on veut montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La preuve se fait en trois étapes :

1. Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au premier rang, i.e. $P(0)$ est vraie,
2. Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, et on montre que celà implique que $P(n+1)$ est vraie (il y a un raisonnement à faire qui utilise l'hypothèse de récurrence !),
3. Conlusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'idée de la démonstration par récurrence peut s'écrire de la façon suivante :

$$\Big(P(0) \text{ et } \big(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)\Big) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \ P(n)).$$

Exemple 1.16. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n + 1$.*

On commence par identifier la propriété $P(n)$. Ici, $P(n)$ est "$2^n \geq n + 1$".

1. *Initialisation : soit $n = 0$, alors $2^n = 2^0 = 1$ et $n + 1 = 0 + 1 = 1$. On a bien $1 \geq 1$ donc $P(0)$ est vraie.*
2. *Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie, i.e. $2^n \geq n + 1$. Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, i.e. $2^{n+1} \geq (n + 1) + 1$. On écrit*
$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\ &\geq 2 \times (n + 1) && \text{(car } P(n) \text{ est vraie et } 2 \geq 0\text{)} \\ &= (n + 2) + n \\ &\geq n + 2 = (n + 1) + 1 && \text{(car } n \geq 0\text{).} \end{aligned}$$
La propriété $P(n + 1)$ est donc vraie.
3. *On a montré que $P(0)$ est vraie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $P(n)$ est vraie.*

Remarque 1.17. *Il arrive que la preuve de $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ ne marche que pour n assez grand, par exemple uniquement pour $n \geq 1$. Dans ce cas, à l'étape d'initialisation il faut montrer non seulement $P(0)$, mais également $P(1)$.*

1.4.3 Utilisation d'un contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition "$\forall x \in E,\ P(x)$" est fausse, on peut montrer que sa négation "$\exists x \in E,$ non $P(x)$" est vraie. Il suffit pour cela d'exhiber un élément x de E qui ne vérifie pas P. Un tel x s'appelle un *contre-exemple.*

Exemple 1.18. *Montrons que la proposition "$\forall x \in \mathbb{R},\ x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$" est fausse. Sa négation est*
$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < 1 \text{ et } x^2 \geq 1.$$
Cette dernière proposition est vraie, par exemple pour $x = -2$. Donc -2 est un contre-exemple à la première proposition.

1.4.4 Raisonnement par disjonction des cas

Un dernier raisonnement dont on va parler est le raisonnement par disjonction des cas. Pour montrer qu'une proposition "$\forall x \in A,\ P(x)$" est vraie, on traite séparément différents cas recouvrant l'ensemble des situations possibles.

Exemple 1.19. *On veut montrer que si n est un nombre entier alors $n^2 + n$ est un nombre entier pair, autrement dit que la propriété "$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 + n$ est un entier pair" est vraie. On va traiter séparément deux cas, selon que n lui-même est pair ou impair (n'importe quel nombre entier étant soit pair soit impair on aura bien couvert l'ensemble des entiers).*

- *Si n est pair, il est de la forme $n = 2k$ où k est un nombre entier. On a alors*
$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2 \times (2k^2 + k),$$
et donc $n^2 + n$ est bien un nombre pair.
- *Si n est impair, il est de la forme $n = 2k + 1$ où k est un nombre entier. On a alors*
$$n^2 + n = (2k + 1)^2 + (2k + 1) = (4k^2 + 4k + 1) + (2k + 1) = 2 \times (2k^2 + 3k + 1),$$
et donc $n^2 + n$ est bien un nombre pair.

Dans tous les cas on a bien montré que $n^2 + n$ était un nombre pair.

1.5 Complément : la formule du binôme de Newton

Définition 1.20. *Soient k et n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On note $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ces nombres sont appelés les coefficients binomiaux. Le nombre $\binom{n}{k}$ représente le nombre de façon de choisir k éléments (sans tenir compte de l'ordre) dans un ensemble à n éléments.*

Exercice 1.8 (Formule de Pascal)**.** Soient k et n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Montrer que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Proposition 1.21 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Démonstration. Etant donnés a et b fixés on va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ " est vraie.

- Initialisation : Soit $n = 0$. On a $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. La proposition $P(0)$ est donc vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que (pour l'entier n que l'on a fixé) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que (toujours pour ce même entier n)

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \tag{1.1}$$

On écrit

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\ &= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{(car } P(n) \text{ est vraie)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{j} b^{n-(j-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{k} b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^{k} b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{k} b^{n+1-k},
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que (1.1) est vraie. □

CHAPITRE 2

APPLICATIONS

2.1 Rudiments de théorie des ensembles

2.1.1 Inclusion, intersection, union, complémentaire

Définition 2.1. *Un* ensemble *E est une collection d'objets appelés* éléments*. On note $x \in E$ si l'objet x est un élément de E.*

Définition 2.2.
- *Si E et F sont deux ensembles, on note $E \subset F$ lorsque tous les éléments de E sont des éléments de F : $\forall x \in E$, $x \in F$. On dit que E est un* sous-ensemble *de F.*
- *Un ensemble particulier est l'ensemble vide noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément, et pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$.*
- *Si x est un élément de E, on note $\{x\}$ l'ensemble constitué du seul élément x.*

☠ **Attention !** Si x est un élément de E, $x \in E$ et $\{x\} \subset E$.

Exercice 2.1. Écrire la négation de $E \subset F$ (ce que l'on note $E \not\subset F$).

Définition 2.3. *Deux ensembles E et F sont* égaux*, ce qui est noté $E = F$, si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$*

Pour montrer que $E = F$, on utilise le plan suivant :

1. Montrons que $E \subset F$: soit x un élément de E, on montre qu'il appartient à F ...
2. Montrons que $F \subset E$: soit x un élément de F, on montre qu'il appartient à E ...

✎ **Notation.** $\{x \mid \text{ une propriété de } x\}$ est l'ensemble des éléments x qui vérifie la propriété décrite. On a déjà utilisé à plusieurs reprises cette notation dans le chapitre précédent.

Définition 2.4. *L'*ensemble des parties *d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$, est*

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}.$$

Remarque 2.5. *1.* $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$.

2. $\mathcal{P}(E)$ *n'est jamais vide puisqu'il contient toujours l'ensemble vide, ainsi que l'ensemble* E *(qui peut-être vide).*

Exercice 2.2. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{a, b\}$.

Définition 2.6. *Soient* E *et* F *deux ensembles. On définit de nouveaux ensembles :*
- *L'*intersection *de* E *et* F *est l'ensemble noté* $E \cap F$ *dont les éléments sont ceux appartenant à* E *et à* F *:* $E \cap F = \{x \,|\, x \in E \text{ et } x \in F\}$.
- *L'*union *(ou la* réunion*) de* E *et* F *est l'ensemble noté* $E \cup F$ *dont les éléments sont ceux appartenant à* E *ou à* F *:* $E \cup F = \{x \,|\, x \in E \text{ ou } x \in F\}$. *La réunion est dite* disjointe *si* $E \cap F = \emptyset$.
- *Si* $E \subset F$, *le* complémentaire *de* E *dans* F *est l'ensemble noté* $F \setminus E$ *dont les éléments sont ceux appartenant à* F *mais pas à* E *:* $F \setminus E = \{x \in F \,|\, x \notin E\}$.

Remarque 2.7. *Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguité sur l'ensemble* F, *on note parfois le complémentaire de* E *dans* F *par* E^c *au lieu de* $F \setminus E$.

2.1.2 Produit cartésien

Définition 2.8. *Soient* E *et* F *deux ensembles. On note* $E \times F$ *l'ensemble des couples* (x, y) *avec* $x \in E$ *et* $y \in F$. *L'ensemble* $E \times F$ *s'appelle le* produit cartésien *des ensembles* E *et* F.

Exemple 2.9. *Le plan* $\mathbb{R}^2$ *est simplement* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Remarque 2.10. *Deux éléments* (x, y) *et* (x', y') *de* $E \times F$ *sont égaux si et seulement si* $x = x'$ *et* $y = y'$.

Remarque 2.11. *Si* $E_1, \ldots, E_n$ *sont des ensembles, on définit de la même façon le produit cartésien*

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

Un élément de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ *est appelé un* n*-uplet.*

2.1.3 Lien entre connecteurs logiques et relations ensemblistes

✎ **Notation.** Si E est un ensemble $P(x)$ est une propriété dépendant de l'élément $x \in E$ la notation $\{x \in E \,|\, P(x)\}$ signifie "l'ensemble des éléments x dans E tels que la propriété $P(x)$ soit vraie".

Si E est un ensemble et A un sous-ensemble de E, on peut leur associer une proposition logique $P(x)$ définie pour tout $x \in E$ de la façon suivante : $P(x)$ est vraie si et seulement si $x \in A$ (et donc $P(x)$ est fausse si $x \notin A$). Autrement dit

$$A = \{x \in E \,|\, P(x)\}.$$

Si B est un autre sous-ensemble de E, et $Q(x)$ la proposition logique vraie si $x \in B$, i.e. $B = \{x \in E \,|\, Q(x)\}$ alors
- $A \cup B = \{x \in E \,|\, P(x) \text{ ou } Q(x)\}$,
- $A \cap B = \{x \in E \,|\, P(x) \text{ et } Q(x)\}$,

- la propriété $A \subset B$ signifie "si $x \in A$ alors $x \in B$" et se traduit donc par " pour tout $x \in E$, si $P(x)$ est vraie alors $Q(x)$ est vraie" ou encore "$\forall x \in E,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$".

Ainsi les résultats sur les connecteurs logiques se traduisent en résultats sur les ensembles.

Exemple 2.12. *Soit $E = \mathbb{N}$ et A l'ensemble des entiers pairs. On peut leur associer la proposition logique $P(x)$ suivante : "x est divisible par 2".*

Exemple 2.13. *Soit $P(x)$ la proposition logique associée à A. Donc $x \in A^c$ si et seulement si $P(x)$ est fausse, c'est-à-dire non $P(x)$ est vraie. Autrement dit la proposition logique associée à A^c est "non $P(x)$". Comme non (non P)$\Longleftrightarrow P$, on a $x \in (A^c)^c \Longleftrightarrow x \in A$, c'est-à-dire $(A^c)^c = A$.*

Exercice 2.3. Soit E un ensemble, $P(x)$ une proposition logique dépendant de $x \in E$ et $A = \{x \in E \,|\, P(x)\}$. Traduire en termes ensemblistes les propositions logiques "$\forall x \in E,\ P(x)$" et "$\exists x \in E,\ P(x)$".

Exercice 2.4. On considère trois ensembles A, B, C. Montrer que
a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
e) $(A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$.

2.1.4 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Notion d'intervalles.

On rencontrera régulièrement les ensembles suivants appelés intervalles de $\mathbb{R}$. Etant donnés deux réels a et b on note

$$\begin{array}{rcl}]a, b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ [a, b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a, b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\ ]a, b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\ [a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \\ ]a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \\ ]-\infty, b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\ ]-\infty, b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}. \end{array}$$

Les intervalles $]a, b[$, $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont dits ouverts, et les intervalles $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ fermés. On notera généralement I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Remarque 2.14. *Par définition un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si "$\forall a, b \in I,\ [a, b] \subset I$". Autrement dit I est un intervalle si, étant donnés deux éléments a et b quelconques de I, tout nombre x compris entre a et b est dans I. On peut montrer que les intervalles sont exactement les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de la forme ci-dessus auxquels il faut ajouter l'ensemble vide et $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.*

Majorants, minorants

Définition 2.15. *Soit A un sous-ensemblede $\mathbb{R}$. On dit que*
- $M \in \mathbb{R}$ *est un* majorant *de A si, pour tout $x \in A$, $x \leq M$,*
- $m \in \mathbb{R}$ *est un* minorant *de A si, pour tout $x \in A$, $m \geq x$,*
- $a \in \mathbb{R}$ *est un* plus grand élément *de A si a est un majorant de A <u>et</u> $a \in A$,*
- $a \in \mathbb{R}$ *est un* plus petit élément *de A si a est un minorant de A <u>et</u> $a \in A$.*

On dit que A est
- majoré *si A admet un majorant,*
- minoré *si A admet un minorant,*
- borné *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in A$, $|x| \leq M$.*

Remarque 2.16. *Si M est un majorant de A tout nombre $M' \geq M$ est aussi un majorant de A. De même, si m est un minorant de A tout nombre $m' \leq m$ est aussi un minorant de A. On ne parlera donc pas du majorant ni du minorant, mais d'un majorant ou d'un minorant. Il existe cependant une notion de "meilleur majorant" ou "meilleur minorant", voir la Section 2.4.*

Exercice 2.5. Montrer que le plus grand élément d'un ensemble, s'il existe, est unique.

Exercice 2.6. Montrer qu'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est borné si et seulement si il est majoré et minoré.

Exemple 2.17. *$A = [0, 1[$ est minoré. Par exemple -1, 0 sont des minorants. Il est également majoré, par exemple par 10, 4 ou 1. Ainsi A est borné. Par ailleurs A possède un plus petit élément, à savoir 0, mais il n'a pas de plus grand élément.*

$B =]-\infty, 2[$ admet des majorants, par exemple 2. Par contre il n'est pas minoré et donc B n'est pas borné.

Exercice 2.7. Parmi les différents types d'intervalle I de $\mathbb{R}$ (voir la Section 1.2.2) dire ceux qui sont minorés, majorés, bornés, admettent un plus petit élément, un plus grand élément.

Les nombres rationnels

Parmi les nombres réels on distingue les nombres rationnels et irrationnels. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ et est défini par $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$. Les éléments de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ sont appelés les *irrationnels*. L'ensemble des nombres irrationnels est noté $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Remarque 2.18. *Pour un nombre rationnel r donné les nombres $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$ ne sont pas uniques. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a également $r = \frac{np}{nq}$. On peut cependant montrer qu'il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ et que les nombres p et q n'ont pas de diviseur entier naturel commun autre que 1 (on dit qu'ils sont* premiers entre eux*).*

L'existence de nombres irrationnels n'est a priori pas évidente. Il y en a en fait "beaucoup". On en donne ici un exemple. Comme vous allez le voir, la justification du fait qu'un nombre est irrationnel n'est pas immédiate. On va utiliser pour cela un raisonnement dit "par l'absurde". L'idée d'un raisonnement par l'absurde est de supposer que le résultat que l'on souhaite montrer est faux et d'aboutir, à l'aide d'un raisonnement logique, à une contradiction avec une proposition que l'on sait être vraie. La difficulté de ce genre de raisonnement est qu'on ne sait pas a priori quelle proposition on va ainsi contredire.

Exemple 2.19. *On va montrer que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que $\sqrt{2}$ est rationnel. Ainsi il existe deux nombres entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus, d'après la Remarque 2.18, on peut supposer que p et q sont premiers entre eux. En élevant au carré, on a alors*

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \iff p^2 = 2q^2.$$

Donc p^2 est pair ce qui implique que p est pair (Exercice 1.3). Il existe alors $r \in \mathbb{Z}$ tel $p = 2r$. Ainsi on a $4r^2 = 2q^2$, i.e. $2r^2 = q^2$. Donc q^2 est pair et ainsi q également. Les nombres p et q sont tous les deux pairs et admettent donc 2 pour diviseur commun ce qui contredit l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux. On a ainsi prouvé que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque 2.20. *Tout comme $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ vérifie un certain nombre de propriétés algébriques (qui font qu'on appelle $\mathbb{Q}$ un* corps*) :*

- $0 \in \mathbb{Q}$,
- *Si $x \in \mathbb{Q}$ alors $-x \in \mathbb{Q}$,*
- *Si $x, y \in \mathbb{Q}$ alors $x + y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$,*
- *Si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \neq 0$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$.*

Ces propriétés ne sont plus vraies pour les nombres irrationnels.

Exercice 2.8. En donnant des exemples, montrer que la somme de deux nombres irrationnels peut être rationnelle ou irrationnelle.

Remarque 2.21. *Les propriétés de relation d'ordre sont également vraies sur $\mathbb{Q}$. Deux nombres rationnels peuvent toujours être comparés, et tout comme pour les les nombres réels si A est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ on a la notion de majorant, minorant, plus grand élément, plus petit élément. La différence fondamentale entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ réside dans celle de borne supérieure, voir la Section 2.4.*

Parmi les nombres réels on distingue donc les rationnels des irrationnels. Le résultat suivant dit que même si un nombre réel x_0 est irrationnel on peut toujours trouver des nombres rationnels aussi proche que l'on veut de x_0.

Théorème 2.22. *Etant donnés des réels x et y avec $x < y$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$. Autrement dit, n'importe quel intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (aussi petit soit il) contient au moins un nombre rationnel. De façon équivalente on peut écrire : étant donné un réel x_0 et $\epsilon > 0$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $|x_0 - r| < \epsilon$ (on peut trouver un rationnel dont la distance au réel x_0 aussi petite que l'on veut, le nombre ϵ étant ici arbitraire). On dit que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est* dense *dans $\mathbb{R}$.*

La preuve de ce théorème repose sur la propriété dit d'Archimède et sur la notion de partie entière.

Proposition 2.23 (Propriété d'Archimède)**.** *(Admis) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n tel que $nx > y$. On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ est* archimédien.

Définition 2.24. *La* partie entière *d'un réel x est l'unique entier relatif $E(x)$ qui vérifie*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

La définition de la partie entière utilise le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien.

☠ **Attention !** L'idée intuitive de la partie entière, à savoir "on enlève ce qui est après la virgule", n'est vraie que pour les nombres positifs mais pas pour les nombres négatifs. Par exemple $E(-2,47) = -3$.

Preuve du Théorème 2.22. Soient $x < y$ deux nombres réels donnés. On veut montrer qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x < r < y$, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x < p/q < y$, ce qui s'écrit $qx < p < qy$ (q est positif). Par la propriété d'Archimède on sait qu'on peut choisir un entier q tel que $q(y-x) > 1$, c'est-à-dire $qy > 1 + qx$. Prenons $p = E(1+qx)$. On a $p \leq 1+qx < qy$ et par définition de la partie entière, $p > 1+qx-1 = qx$, ce qui donne le résultat.

La deuxième formulation du théorème s'obtient en prenant $x = x_0 - \epsilon$ et $y = x_0 + \epsilon$.

Exercice 2.9. Montrer que l'ensemble des irrationels est aussi dense dans $\mathbb{R}$. Indication : si r est rationnel non nul, $r\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.2 Applications

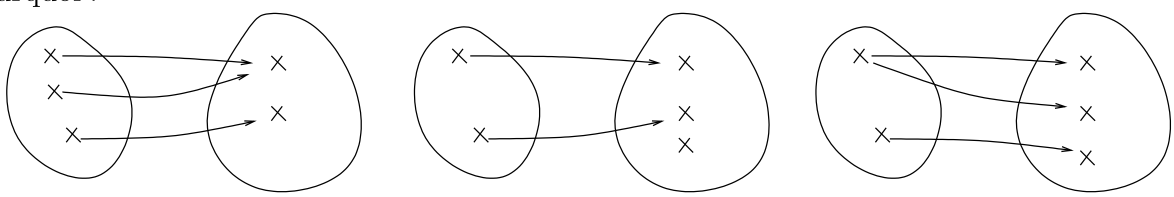
2.2.1 Définitions

Définition 2.25. *Soient E et F deux ensembles. Une* application, *ou* fonction, *$f : E \to F$ est la donnée* **pour tout** *$x \in E$ d'un* **unique** *élément y, noté $f(x)$, de F. L'élément x est un* antécédent *de $y = f(x)$, $f(x)$ est* l'image *de x par f. E est* l'ensemble de départ *et F est* l'ensemble d'arrivée. *Ainsi, par une application f tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule :*

$$\forall x \in E, \ \exists! y \in F, \ y = f(x).$$

Remarque 2.26. *Un élément $y \in F$ peut avoir aucun, un, ou plusieurs antécédents.*

Exercice 2.10. Une des correspondences ci-dessous n'est pas une application. Laquelle ? Pourquoi ?



Définition 2.27. *Deux applications f et g sont* égales *(notation : $f = g$) si elles ont les mêmes ensembles de départ E et d'arrivée F et si, $\forall x \in E, \ f(x) = g(x)$.*

Définition 2.28. *Soit E un ensemble. On appelle* identité *de E l'application*

$$id_E : \left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x \end{array} \right.$$

Définition 2.29. *Soit f une application de E dans F, et $A \subset E$. On appelle* restriction de f à A *l'application $g : A \to F$ telle que $g(x) = f(x), \forall x \in A$. On notera $f\lceil_A$ cette restriction.*

Définition 2.30. *Soit f une application de E dans F et A tel que $E \subset A$. Une application $g : A \to F$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$ est appelée* prolongement *de f à A.*

Définition 2.31. *Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G. La* composée *de f par g est l'application notée $g \circ f$ définie de E vers G par*

$$\forall x \in E,\, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

2.2.2 Images directes et réciproques de sous-ensembles

Définition 2.32. *Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, et $A \subset E$. On appelle* image directe*, ou simplement image, de A par f le sous ensemble de F noté $f(A)$ et défini par*

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

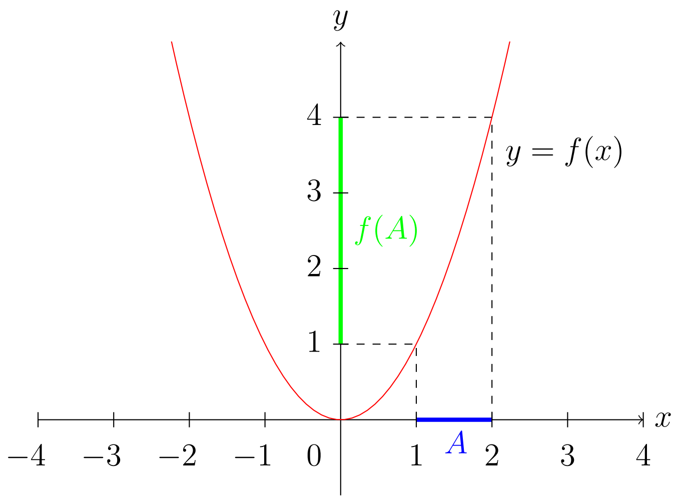
On peut écrire

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A,\, y = f(x),$$

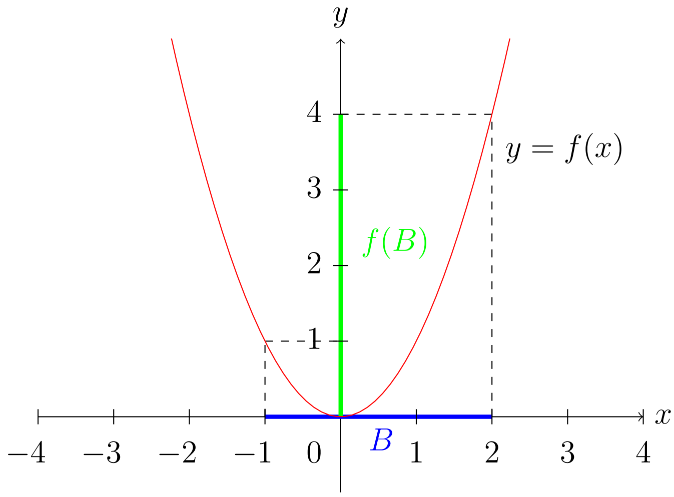
autrement dit

$$f(A) = \{y \in F \,|\, \exists x \in A,\, y = f(x)\}.$$

Exemple 2.33. *On considère les ensembles $E = F = \mathbb{R}$ et l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, si $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = x^2$. Soit A le sous-ensemble $[1, 2]$ de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble $f(A)$ est l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in [1, 2],\, y = x^2\} = [1, 4]$.*



Soit maintenant $B = [-1, 2]$. Alors $f(B) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in [-1, 2],\, y = x^2\} = [0, 4]$.



Proposition 2.34. *Soient $A, B \subset E$ et f une application de E dans F. On a*

1. $(A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Démonstration. Montrons la dernière propriété. Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe alors $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A \cap B \subset A$, $f(x) \in f(A)$ et comme $x \in A \cap B \subset B$, $f(x)$ est aussi un élément de $f(B)$. Donc $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$. □

Remarque 2.35. *Pourquoi n'a-t-on pas égalité entre $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$? Regardons l'inclusion inverse. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Il existe donc $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Malheureusement, on ne sait pas si $x_1 = x_2$!*

Exemple 2.36. *Soient $E = \{a, b, c\}$, $F = \{1, 2\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$. Enfin soient $A = \{a, b\}$ et $B = \{b, c\}$. Déterminer $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$ et les comparer.*

Exercice 2.11. Prouver les propriétés 1. et 2. de la proposition précédente.

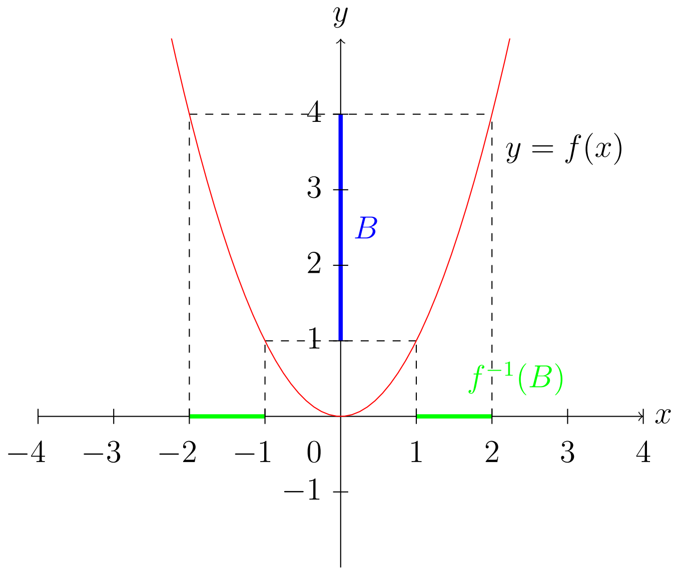
Définition 2.37. *Soit f une application de E dans F et $B \subset F$. On appelle* image réciproque *de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ et défini par*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

On peut écrire

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

Exemple 2.38. *On considère les ensembles $E = F = \mathbb{R}$ et l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par, si $x \in \mathbb{R}$ alors $f(x) = x^2$. Soit B le sous-ensemble $[1, 4]$ de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble $f^{-1}(B)$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \in [1, 4]\} = [-2, -1] \cup [1, 2]$.*



☠ **Attention !** On a défini l'ensemble $f^{-1}(B)$ en utilisant la notation f^{-1}. Si $y \in F$, la notation $f^{-1}(y)$ ne signifie rien pour l'instant (nous n'avons pas supposé que f est une bijection, voir la Définition 2.44).

Proposition 2.39. *Soient A et B deux sous-ensembles de F et f une application de E dans F. On a*

1. $(A \subset B) \Rightarrow (f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B))$,
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 2.12. Démontrer la proposition précédente.

Exercice 2.13. Quel rapport y a -t-il entre $f^{-1}(f(A))$ et A ? Et entre $f(f^{-1}(B))$ et B ?

2.2.3 Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit f une application de E dans F.

Définition 2.40. *On dit que f est une application* injective *si tout élément y de F possède* au plus *un antécédent $x \in E$ par f. De façon équivalente :*

$$\begin{aligned} f \textit{ est injective} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall (x,x') \in E \times E, (x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')), \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall (x,x') \in E \times E, (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'). \end{aligned}$$

Remarque 2.41. *Les deux dernières formulations dans la définition ci-dessus sont les contraposées l'une de l'autre et sont donc bien entendu équivalentes.*

Exercice 2.14. Montrer que f est injective $\Longleftrightarrow \big(\forall (A,B) \in P(E) \times P(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\big)$.

Définition 2.42. *On dit que f est une application* surjective *si tout élément y de F possède* au moins *un antécédent $x \in E$ par f, i.e. $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$. De façon équivalente :*

$$f \textit{ est surjective} \Longleftrightarrow f(E) = F.$$

Remarque 2.43. *Par définition de l'image (directe), une application f est* toujours surjective *de E sur son image $f(E)$.*

Définition 2.44. *On dit que f est une application* bijective *si tout élément y de F possède* un unique *antécédent $x \in E$ par f, i.e.*

$$f \text{ est bijective } \iff \forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

On définit alors une application de F dans E notée f^{-1} par

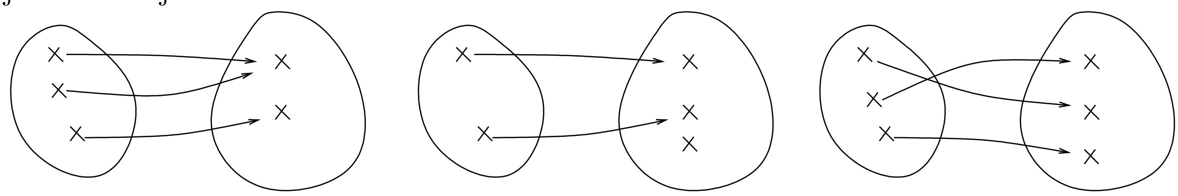
$$\forall x \in E, \forall y \in F,\ x = f^{-1}(y) \iff y = f(x).$$

*On l'appelle l'*application réciproque *de f.*

Exercice 2.15. Montrer qu'une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Exercice 2.16. Montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$ (on rappelle que id_E est l'application identité de E).

Exercice 2.17. Parmi les applications ci-dessous, quelles sont celles qui sont injectives ? surjectives ? bijectives ?



☠ **Attention !** Les notions d'application injective, surjective et bijective dépendent de l'ensemble de départ et d'arrivée. Pour chacun des sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}$ suivants, dire si la fonction $f : E \to F$ définie par $f(x) = x^2$ est injective, surjective, bijective.

1. $E = F = \mathbb{R}$.
2. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}_+$.
3. $E = \mathbb{R}_+$ et $F = \mathbb{R}$.
4. $E = F = \mathbb{R}_+$.

Remarque 2.45. *Si E et F sont des ensembles ayant un nombre fini d'éléments, on note $|E|$ (resp. $|F|$) le nombre d'éléments de E (resp. F). Soit f une application de E dans F.*
- *si f est injective alors $|E| \leq |F|$,*
- *si f est surjective alors $|E| \geq |F|$,*
- *si f bijective alors $|E| = |F|$.*

Exercice 2.18. Soit f une application bijective de E dans F et $B \subset F$. Montrer que l'image directe $f^{-1}(B)$ de B par l'application f^{-1} coïncide avec l'image réciproque de B par f (voir Définition 2.37). Il n'y a donc pas d'ambiguité dans la notation $f^{-1}(B)$ quand l'application f est bijective.

Proposition 2.46. *Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.*

1. *f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E$ on a $f^{-1}(f(A)) = A$.*
2. *f est surjective si et seulement si pour tout $B \subset F$ on a $f(f^{-1}(B)) = B$.*

Démonstration. On montre 1. Le 2. est laissé à titre d'exercice. Si $A \subset E$, l'ensemble $f^{-1}(f(A))$ est

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(A)) &= \{x \in E \,|\, f(x) \in f(A)\} \\ &= \{x \in E \,|\, \exists a \in A \text{ et } f(x) = f(a)\}. \end{aligned}$$

On commence par remarquer que l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$ est toujours vraie. En effet, si $x \in A$ alors avec $a = x$ cela prouve que $x \in f^{-1}(f(A))$. Il reste donc à montrer que f est injective si et seulement si pour tout $A \subset E$ on a $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Supposons d'abord que f est injective. Soit $A \subset E$, il faut montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Soit donc $x \in f^{-1}(f(A))$. D'après ce qui précède, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Mais f est injective, donc (2nde caractérisation de l'injectivité) $x = a$ et en particulier $x \in A$. On a donc montré que

$$f \text{ injective } \Rightarrow \big(\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A\big).$$

Réciproquement, on suppose que pour tout $A \subset E$ on a $f^{-1}(f(A)) \subset A$. On montre alors que f est injective. On utilise à nouveau la seconde caractérisation. Soient x, x' dans E tels $f(x) = f(x')$. On considère l'ensemble $A = \{x\}$. Puisque $f(x') = f(x)$ on a $x' \in f^{-1}(f(A))$. Mais on sait que $f^{-1}(f(A)) \subset A$, donc $x' \in A$. Comme A ne possède qu'un seul élément, x, on en déduit que $x' = x$. On a cette fois montré que

$$\big(\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A\big) \Rightarrow f \text{ injective }.$$

□

Proposition 2.47. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.*

1. *si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective,*
2. *si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective,*
3. *si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,*
4. *si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,*
5. *si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Exercice 2.19. Démontrer la Proposition ci-dessus.

2.3 Fonctions d'une variable réelle

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application, ou fonction. Lorsque l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction réelle. Lorsque l'ensemble de départ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction d'une variable réelle. L'ensemble de départ est alors appelé domaine de définition de la fonction f et est noté parfois D_f ou simplement D. Par exemple la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}^*$.

L'objet principal de ce cours est l'étude des fonctions réelles d'une variable réelle. Dans toute la suite on parlera simplement de fonction pour fonction réelle d'une variable réelle.

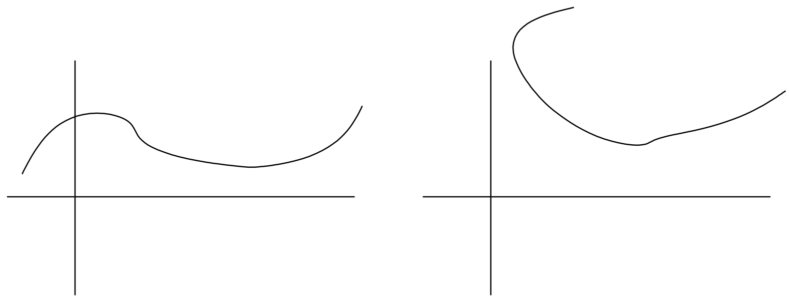
2.3.1 Définitions

Définition 2.48. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. Le* graphe *de f est le sous-ensemble G_f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ défini par*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}.$$

L'ensemble $f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f,\ y = f(x)\}$ est appelé l'image de f. On le note parfois $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2.20. Un des deux dessins ci-dessous ne représente pas le graphe d'une fonction. Lequel ? Pourquoi ?



Définition 2.49. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que f est*

1. croissante *si* $\forall (x, x') \in D_f \times D_f,\ x \leq x' \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(x')$,
2. strictement croissante *si* $\forall (x, x') \in D_f \times D_f,\ x < x' \ \Rightarrow\ f(x) < f(x')$,
3. décroissante *si* $\forall (x, x') \in D_f \times D_f,\ x \leq x' \ \Rightarrow\ f(x) \geq f(x')$,
4. strictement décroissante *si* $\forall (x, x') \in D_f \times D_f,\ x < x' \ \Rightarrow\ f(x) > f(x')$,
5. monotone *si elle est croissante ou décroissante,*
6. strictement monotone *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Définition 2.50. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que f est*

1. majorée *si* $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ f(x) \leq M$. *De façon équivalente, f est majorée si son image* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-ensemble majoré de* $\mathbb{R}$.
2. minorée *si* $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ f(x) \geq m$. *De façon équivalente, f est minorée si son image* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-ensemble minoré de* $\mathbb{R}$.
3. bornée *si* $\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in D_f,\ |f(x)| \leq K$.

Exercice 2.21. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. Montrer que f est bornée si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée.

Définition 2.51. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que*

1. *f admet un* minimum *si* $\exists x_0 \in D_f,\ \forall x \in D_f,\ f(x_0) \leq f(x)$. *On note alors* $f(x_0) = \min\limits_{x \in D_f} f(x)$.
2. *f admet un* maximum *si* $\exists x_0 \in D_f,\ \forall x \in D_f,\ f(x_0) \geq f(x)$. *On note alors* $f(x_0) = \max\limits_{x \in D_f} f(x)$.

3. *f admet un* extremum *si f admet un maximum ou un minimum.*

Exercice 2.22. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
a) "la fonction f s'annule".
b) "f est la fonction nulle".
c) "f n'est pas constante".
d) "f ne prend jamais deux fois la même valeur".
e) "f prend des valeurs arbitrairement grandes" ou "f n'est pas majorée".
f) "f ne peut s'annuler qu'une seule fois".

Définition 2.52. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un même ensemble D. On dit que $f \leq g$, resp. $f < g$, si "$\forall x \in D,\ f(x) \leq g(x)$", resp. "$\forall x \in D$, $f(x) < g(x)$".*

Définition 2.53. *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$. On dit que*

1. *f est* paire *si D_f est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire "$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$", et si pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = f(-x)$. Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
2. *f est* impaire *si D_f est symétrique par rapport à 0 et si pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = -f(-x)$. Le graphe de f est alors symétrique par rapport à l'origine.*
3. *f est* périodique *s'il existe $T > 0$ tel que $x \in D_f$ si et seulement si $x + T \in D_f$ et, pour tout $x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$. Le réel T est appelé une période de f et on dira que f est périodique de période T ou que f est T-périodique.*

2.3.2 Opérations sur les fonctions

Définition 2.54. *Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit*

- *leur somme $f + g$. C'est la fonction de $D \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in D$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*
- *leur produit fg. C'est la fonction de $D \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in D$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$,*
- *la fonction $\alpha f : D \to \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in D$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.*

Définition 2.55. *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si $f(D_f) \subset D_g$ alors on définit la fonction $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ par, pour tout $x \in D_f$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. La fonction $g \circ f$ s'appelle la composée de f avec g.*

Remarque 2.56. *L'hypothèse $f(D_f) \subset D_g$ est nécessaire pour pouvoir définir $g \circ f$. Il faut en effet s'assurer que $f(x) \in D_g$ pour que $g(f(x))$ ait un sens, et ce pour tout $x \in D_f$.*

Attention ! Même lorsque les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, i.e. lorsque $f(D_f) \subset D_g$ et $g(D_g) \subset D_f$, elles sont en générales différentes !

Exemple 2.57. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$. Les deux fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et on a $(g \circ f)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ alors que $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$.*

2.3.3 Fonctions usuelles

Valeur absolue et partie entière

On a déjà rencontré ces deux fonctions dans le Chapitre 1. La *partie entière* est la fonction $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$E(x) = \max\{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \leq x\}.$$
La partie entière de x peut aussi être définie en disant que c'est l'unique entier relatif m qui vérifie $m \leq x < m + 1$.

La *valeur absolue* est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 2.23. Les fonctions valeur absolue et partie entière sont-elles majorées ? minorées ? bornées ? paires ? impaires ? croissantes ? décroissantes ? Dessiner leur graphe.

Exponentielle et Logarithme népérien

La fonction exp est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.

Remarque 2.58. *C'est la définition que vous avez vue en Terminale. L'existence d'une telle fonction n'est pas évidente et sera admise ici.*

✎ **Notation.** On note souvent e^x pour $\exp(x)$.

La fonction exponentielle vérifie les propriétés algébriques suivantes :
- $\mathrm{e}^0 = 1$,
- pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$,
- pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x / \mathrm{e}^y$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$.

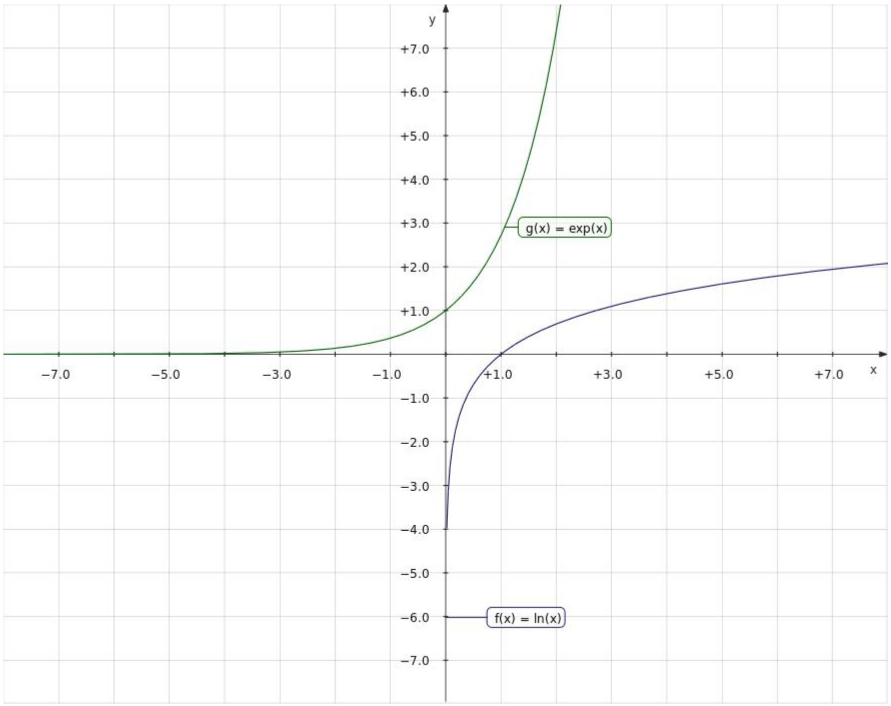
Exercice 2.24. Démontrer les propriétés précédentes.

La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est une fontion de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Elle est définie comme la réciproque (voir le Chapitre 6) de la fonction exponentielle : c'est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x, \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(x)) = x.$$

La fonction ln vérifie les propriétés suivantes qui découlent de celles de l'exponentielle.
- $\ln(1) = 0$,
- la fonction ln est strictement croissante,
- pour tous $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
- pour tous $x, y > 0$, $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$,
- pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Exercice 2.25. Démontrer les propriétés précédentes.

Remarque 2.59. *La fonction* ln *peut aussi être définie comme l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto 1/x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et qui s'annule en* 1*, c'est-à-dire que, pour tout* $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ *et* $\ln(1) = 0$.



Graphes des fonctions exp et ln

Fonctions puissance

Etant donné $a \in \mathbb{R}$, la fonction *puissance a-ème* est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{a\ln(x)}.$$

Exercice 2.26. Si $a \in \mathbb{Z}$ montrer que $\mathrm{e}^{a\ln(x)} = x^a$.

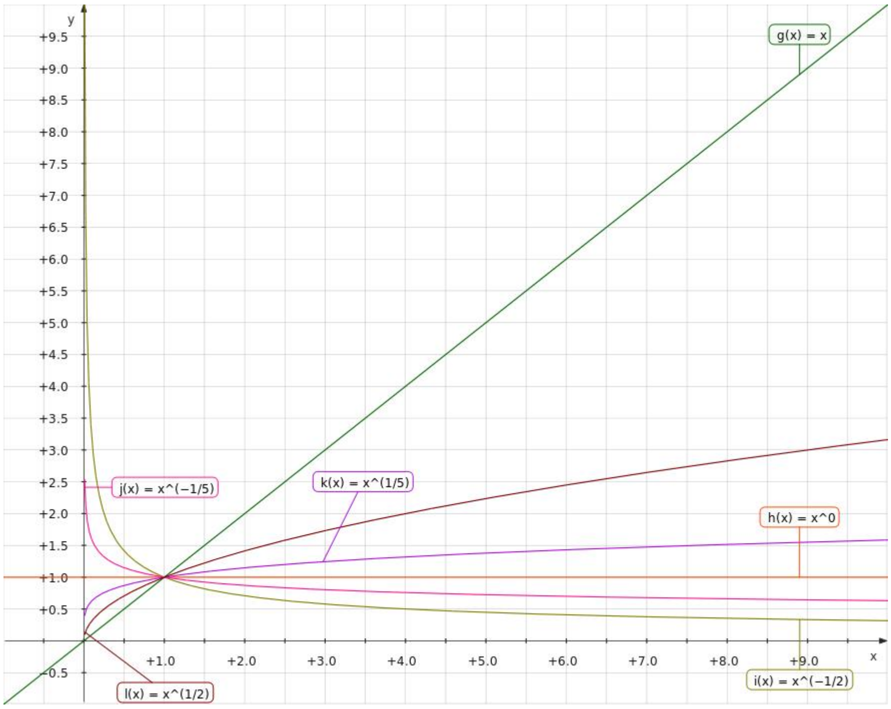
Par la suite, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on notera x^a pour $\mathrm{e}^{a\ln(x)}$. On se souviendra que, mis à part lorsque a est entier, les fonctions puissances ne sont définies que sur $\mathbb{R}_+^*$ (on verra dans le Chapitre 4, page 51, que si $a > 0$ ces fonctions sont en fait naturellement définies aussi en 0 et donc sur $\mathbb{R}_+$).

Les fonctions puissances vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout $x > 0$, $x^0 = 1$ et $x^1 = x$,
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $1^a = 1$,
- pour tous $x, y > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $x^a y^a = (xy)^a$,
- pour tout $x > 0$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$, $x^a x^b = x^{a+b}$ et $(x^a)^b = x^{ab}$,
- pour tout $x > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $\ln(x^a) = a\ln(x)$.

Exercice 2.27. Démontrer les propriétés précédentes.

Exercice 2.28. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $x^{1/2} = \sqrt{x}$.



Graphes des fonctions puissances

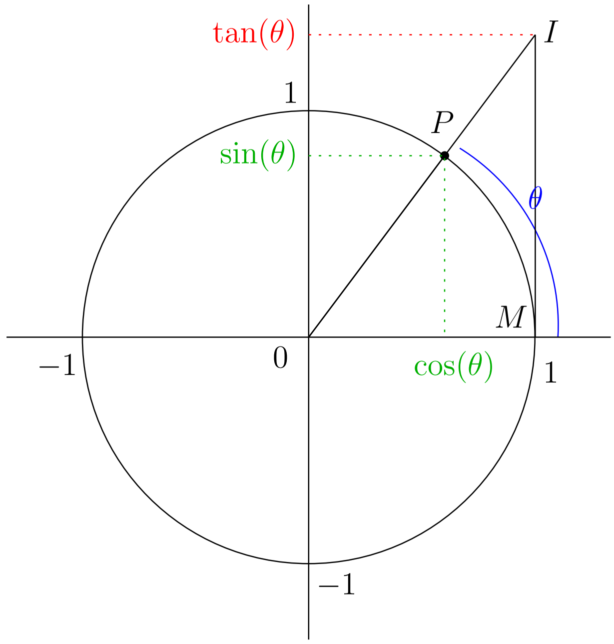
Fonctions trigonométriques circulaires

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour $\theta \in]-\pi, \pi]$, le cosinus et le sinus sont définis respectivement comme l'abscisse et l'ordonnée de l'unique point P sur le cercle de rayon 1 et centré en l'origine qui est tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OP})$ soit égal à θ. Le cosinus et le sinus sont étendus à tout $\mathbb{R}$ par périodicité :

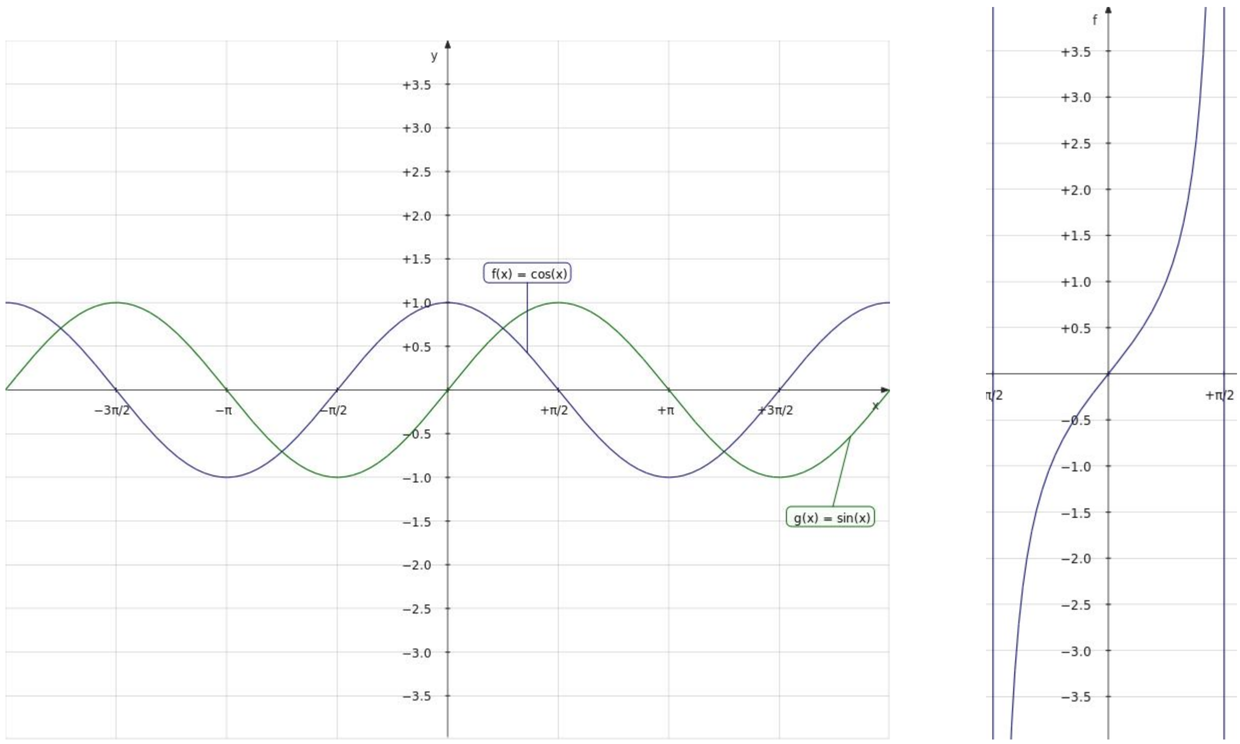
$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta),\ \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta), \quad \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall \theta \in]-\pi, \pi].$$

Les fonctions cos et sin sont donc définies sur $\mathbb{R}$ et leur image à chacune est $[-1, 1]$. La fonction cos est paire et la fonction sin impaire.

La fonction tangente, notée tan, est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Elle est impaire et π-périodique.



Définition des fonctions trigonométriques circulaires



Graphes des fonctions trigonométriques circulaires

2.4 Complément : notions de borne supérieure/inférieure

Les notions de bornes supérieure et inférieure d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ correspondent avec l'idée intuitive de meilleur majorant/minorant.

Théorème 2.60. (Théorème de la borne supérieure)

1. *Soit A un sous-ensemble majoré non-vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément que l'on appelle la* borne supérieure *de A, notée* $\sup A$.
2. *Soit A un sous-ensemble minoré non-vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément que l'on appelle la* borne inférieure *de A, notée* $\inf A$.

Remarque 2.61. *Le théorème ci-dessus est faux si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$. C'est là la principale différence entre ces deux ensembles. Par exemple le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$ est majoré non-vide, mais n'admet pas de borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$!).*

L'idée est que la borne supérieure d'un ensemble A est en quelque sorte le plus grand élément de l'ensemble A. Attention, ce n'est pas forcément le plus grand élément de celui-ci, car par définition le plus grand élément d'un ensemble A doit appartenir à A. Par contre, si le plus grand élément existe il coincide avec la borne supérieure. De même la borne inférieure d'un ensemble n'est pas forcément le plus petit élément de celui-ci.

Exemple 2.62. *L'ensemble $A = [0, 1[$ admet 0 comme plus petit élément, et donc comme borne inférieure. Par contre il n'a pas de plus grand élément. Comme il est majoré le thèorème ci-dessus affirme qu'il possède un plus petit majorant (le meilleur majorant possible), en l'occurence 1.*

CHAPITRE 3

LIMITES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Soit $D \subset \mathbb{R}$. On appelle* adhérence *de D l'ensemble $\overline{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \epsilon > 0,\ \exists y \in D,\ |y - x| < \epsilon\}$. C'est l'ensemble des réels x qui sont dans D (il suffit alors de prendre $y = x$) ou qui ne sont pas dans D mais pour lesquels on peut trouver des éléments de D aussi proche de x que l'on veut.*

Nous allons étudier dans ce chapitre la notion de limite d'une fonction que vous avez déjà rencontrée en Terminale. Nous rencontrerons la notion de limite lorsque "x tend vers l'infini" mais aussi lorsque "x tend vers un nombre réel a". Dans ce dernier cas le nombre a est souvent en dehors de l'ensemble de définition D de la fonction f (pensez à la limite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0) mais on souhaite regarder comment se comportent les valeurs $f(x)$ lorsque x est "proche de" a. Il faut donc qu'on puisse trouver des valeurs $x \in D$ arbitrairement proches de a, autrement dit que $a \in \overline{D}$.

Remarque 3.2. *Dans la pratique, la plupart des ensembles D que l'on rencontrera seront soit des intervalles soit des réunions d'intervalles. Dans ce cas, l'ensemble $\overline{D}$ est l'ensemble D auquel on a rajouté les extrémités des intervalles le constituant. Si l'ensemble D est plus compliqué alors $\overline{D}$ peut être beaucoup plus gros que D.*

Exemple 3.3. *1) Soit $D = [0, 1[$ alors $\overline{D} = [0, 1]$.*
2) Il découle du Théorème 2.22 que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Définition 3.4. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite l en a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.}$$

Exercice 3.1. Écrire la négation de "f admet l pour limite en a".

Remarque 3.5. *Dans certains livres, la définition de limite est légèrement différente. On remplace*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

La seule différence est que si $a \in D$, pour tout $\delta > 0$ on a $a \in D$ et $|a-a| < \delta$. On en déduit alors que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $|f(a) - l| < \varepsilon$ et donc que $l = f(a)$. Ainsi avec la définition que nous avons prise, si $a \in D$, la limite de f en a, si elle existe, vaut forcément $f(a)$.

Notons que ces deux définitions coincident lorsque $a \notin D$ ce qui sera le cas de la plupart des limites intéressantes à calculer (définition de la dérivée par exemple, voir le Chapitre 5).

Pour éviter toute ambiguité, dans ce cours on notera $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ la définition (3.1).

Exercice 3.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. La limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe-t-elle ? Et la limite $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x)$?

Définition 3.6. *1. Soient D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $[a, +\infty[\subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite l en $+\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.}$$

2. Soient D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $]-\infty, a] \subset D$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite l en $-\infty$, et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ x \leq A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.}$$

Proposition 3.7 (Unicité de la limite)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. Si f admet l et l' pour limites en a alors $l = l'$.*

Démonstration. On va raisonner par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l'$ avec $l \neq l'$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}|l - l'| > 0$. Par définition, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

et il existe $\delta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ et soit $x \in D$ tel que $|x - a| < \delta$. Un tel x existe puisque $a \in \overline{D}$. On a alors $|f(x) - l| < \varepsilon$ et $|f(x) - l'| < \varepsilon$. D'où,

$$|l - l'| = |(l - f(x)) + (f(x) - l')| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| < 2\varepsilon = |l - l'|.$$

Ce qui est absurde, donc l'hypothèse de départ est fausse. □

On a bien entendu un résultat similaire pour les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

Proposition 3.8 (Unicité de la limite)**.** *Soient D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $[a,+\infty[\subset D$, resp. $]-\infty,a] \subset D$, et $f : D \to \mathbb{R}$. Si f admet l et l' pour limites en $+\infty$, resp. en $-\infty$, alors $l = l'$.*

Démonstration. On donne la preuve dans le cas $+\infty$, le cas $-\infty$ est laissé à titre d'exercice. La démonstration est très similaire au cas de la limite en un point a. On raisonne par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l'$ avec $l \neq l'$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}|l-l'| > 0$. Par définition, il existe $A_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ x \geq A_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

et il existe $A_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in D,\ x \geq A_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon.$$

Posons $A = \max(A_1, A_2) > 0$ et soit $x \in D$ tel que $x \geq A$. Un tel x existe puisque D contient un intervalle de la forme $[a,+\infty[$. On a alors $|f(x) - l| < \varepsilon$ et $|f(x) - l'| < \varepsilon$. D'où,

$$|l - l'| = |(l - f(x)) + (f(x) - l')| \leq |l - f(x)| + |f(x) - l'| < 2\varepsilon = |l - l'|.$$

Ce qui est absurde, donc l'hypothèse de départ est fausse. □

✎ **Notation.** On rappelle (voir page 25) que, si $f : D \to \mathbb{R}$ et $A \subset D$, on note $f\lceil_A$ la restriction de f à l'ensemble A, c'est-à-dire $f\lceil_A\colon A \to \mathbb{R}$ et $f\lceil_A(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

Définition 3.9. *1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que f vérifie la propriété P* au voisinage de a *s'il existe $\delta > 0$ tel que $f\lceil_{]a-\delta,a+\delta[\cap D}$ vérifie P.*

2. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété P au voisinage de $+\infty$, resp. $-\infty$, *s'il existe un intervalle $I =]A,+\infty[$, resp. $I =]-\infty, A[$, tel que $f\lceil_{I\cap D}$ vérifie P.*

Exemple 3.10. *La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est positive au voisinage de 0. En effet, si on prend $\delta = \dfrac{\pi}{2}$, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a bien $\cos(x) \geq 0$, i.e. $\cos\lceil_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \geq 0$.*

Proposition 3.11. *1. Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite finie l en $a \in \overline{D}$ alors f est bornée au voisinage de a, i.e. il existe $\delta > 0$ tel que f soit bornée sur $]a-\delta, a+\delta[\cap D$.*

2. Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite finie l en $+\infty$, resp. $-\infty$, alors f est bornée au voisinage de $+\infty$, resp. $-\infty$, i.e. il existe un intervalle $I =]A,+\infty[$, resp. $I =]-\infty, A[$, tel que f soit bornée sur $I \cap D$.

Démonstration. On montre 1. Soit $\epsilon = 1 > 0$. Par définition il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D$,

$$(|x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < 1) \iff (a - \delta < x < a + \delta \implies l - 1 < f(x) < l + 1)\,.$$

Sur $D\cap]a-\delta, a+\delta[$, la fonction f est majorée par $l + 1$ et minorée par $l - 1$, elle est donc bornée. □

Exercice 3.3. Montrer le 2. de la proposition ci-dessus.

Définition 3.12. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a, et on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, si*

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D,\ |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \geq A).}$$

On dit que f admet pour limite $-\infty$ en a, et on note $\lim_{x \to a} = -\infty$, si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in D,\ |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \leq A).}$$

Remarque 3.13. *Si f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a, on a nécessairement $a \notin D$. En effet, sinon quelque soit $\delta > 0$ on a $|a-a| < \delta$ et donc on aurait soit $f(a) \geq A$ pour tout $A \in \mathbb{R}$ (si la limite est $+\infty$) soit $f(a) \leq A$ pour tout $A \in \mathbb{R}$ (si la limite est $-\infty$). Dans les deux cas c'est impossible.*

Définition 3.14. *1. Soit D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $[a, +\infty[\subset D$, et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, si*

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A.}$$

2. Soit D tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $]-\infty, a] \subset D$, et $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$, et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, si

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in D,\ x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A.}$$

Exercice 3.4. Ecrire une définition de $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

3.2 Opérations sur les limites

Proposition 3.15. *Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$, $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a*

1. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} |f(x)| = |l|$.*
2. *$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ si et seulement si $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$.*
3. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ alors $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = l + l'$.*
4. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda l$.*
5. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ alors $\lim_{x \to a} (fg)(x) = ll'$.*
6. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $l \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et $\lim_{x \to a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{l}$.*
7. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = l$, $\lim_{x \to a} g(x) = l'$ et $l' \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}$.*
8. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, et g est bornée au voisinage de a (en particulier si $\lim_{x \to a} g(x) = l'$) alors $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = +\infty$, resp. $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = -\infty$.*

9. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = l' > 0$, *resp.* $l' < 0$, *alors* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$, *resp* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = -\infty$.
10. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, *resp.* $-\infty$, *alors* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$, *resp.* $\lim_{x\to a}(fg)(x) = -\infty$.
11. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, *alors* $\frac{1}{f}$ *est définie au voisinage de* a *et* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = 0$.

Proposition 3.16. *Les résultats de la proposition précédente restent vrais si* a *est remplacé par* $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Bien que beaucoup de ces propriétes vous semblent "évidentes", ou en tous cas connues, il est très instructif d'en voir les démonstrations qui se font toutes à partir de la *définition*. Cela vous permettra de manipuler un peu celle-ci, ce qui est loin d'être simple au début.

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ on a $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$. Or on a $\big||f(x)| - |l|\big| \leq |f(x)-l|$. Donc $|x-a| < \delta \Rightarrow \big||f(x)| - |l|\big| < \varepsilon$.
2. Pour tout $x \in D$ on a $\big||f(x)| - 0\big| = |f(x)| = |f(x) - 0|$, et donc quelque soit $\varepsilon > 0$ on a $\big||f(x)| - 0\big| < \varepsilon \iff |f(x) - 0| < \varepsilon$. D'où l'équivalence.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon/2$ (on applique la Définition 3.4 avec $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$) et il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l'| < \varepsilon/2$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Pour tout $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$ on a $|x-a| < \delta_1$ et $|x-a| < \delta_2$, donc
$$|f(x)+g(x)-(l+l')| = |(f(x)-l)+(g(x)-l')| \leq |f(x)-l| + |g(x)-l'| \leq \varepsilon.$$
4. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Définition 3.4 appliquée à $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\lambda|+1} > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$
$$|x-a| < \delta \implies |f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|+1}.$$
Si $|x-a| < \delta$ on a donc $|\lambda f(x) - \lambda l| = |\lambda| \times |f(x)-l| < \frac{|\lambda|\varepsilon}{|\lambda|+1} < \varepsilon$. (On a choisi de diviser par $|\lambda|+1$ pour inclure le cas $\lambda = 0$. Si $\lambda \neq 0$ on aurait pu prendre $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$.)
5. Etant donné $\varepsilon_1 > 0$ il existe $\delta_1 > 0$ tel que $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon_1$. De même, étant donné $\varepsilon_2 > 0$ il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-l'| < \varepsilon_2$. Par ailleurs, d'après la Proposition 3.11 la fonction g est bornée au voisinage de a, il existe donc $\delta_3 > 0$ et $M \geq 0$ tels que $|x-a| < \delta_3 \Rightarrow |g(x)| \leq M$, et quitte à augmenter M on peut toujours supposer $M > 0$. Pour tout $x \in D$ on a
$$(fg)(x) - ll' = f(x)g(x) - lg(x) + lg(x) - ll' = (f(x)-l)g(x) + l(g(x)-l').$$
Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$, si $|x-a| < \delta$ on a alors
$$|(fg)(x) - ll'| \leq |(f(x)-l)g(x)| + |l(g(x)-l')| < \varepsilon_1 M + |l|\varepsilon_2.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, en appliquant ce qui précède avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{M+|l|} > 0$ (on utilise ici $M > 0$ pour s'assurer que le dénominateur est non nul), si $|x-a| < \delta$ on a bien $|(fg)(x) - ll'| < \varepsilon$.

6. D'après 1. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |l|$. D'autre part, comme $\varepsilon_1 = \dfrac{|l|}{2} > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $|x-a| < \delta_1$, on a

$$\big||f(x)| - |l|\big| < \frac{|l|}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{|l|}{2} < |f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2}.$$

En particulier, si $|x-a| < \delta_1$ on a $|f(x)| > \dfrac{|l|}{2} > 0$. La fonction $\dfrac{1}{f}$ est donc bien définie au voisinage de a ($f(x) \neq 0$) et de plus $\dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{2}{|l|}$.
Soit $\varepsilon_2 > 0$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_2$. On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pour tout $x \in D$, si $|x-a| < \delta$ alors

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l - f(x)}{lf(x)}\right| \leq \frac{2\varepsilon_2}{|l|^2}.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, en prenant $\varepsilon_2 = \dfrac{|l|^2\varepsilon}{2} > 0$ et en appliquant ce qui précède on a bien $|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{l}\right| < \varepsilon$.

7. C'est une conséquence directe de 5. et 6.

8. On traite le cas $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. La fonction g est bornée au voisinage de a, en particulier elle y est minorée donc il existe $\delta_1 > 0$ et $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$ si $|x-a| < \delta_1$ alors $g(x) \geq m$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; f(x) \geq A - m$ (c'est la Définition 3.12 appliquée avec $A - m$). On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$, si $|x-a| < \delta$ on a alors $f(x) + g(x) \geq (A-m) + m = A$.
On peut remarquer qu'on utilise ici uniquement le fait que g soit minorée. Inversement dans le cas $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ on n'utiliserait que g majorée.

9. On traite le cas $l' > 0$. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ et $\dfrac{l'}{2} > 0$ donc il existe $\delta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in D$ si $|x-a| < \delta_1$,

$$|g(x) - l'| < \frac{l'}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{l'}{2} < g(x) - l' < \frac{l'}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{l'}{2} < g(x) < \frac{3l'}{2}.$$

En particulier, si $|x-a| < \delta_1$ on a $g(x) > \dfrac{l'}{2} > 0$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; f(x) \geq \dfrac{2|A|}{l'} \geq 0$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Pour tout $x \in D$, si $|x-a| < \delta$ on a alors $f(x)g(x) \geq |A| \geq A$. (On a bien pris garde ici quand on a multiplié les inégalités au fait qu'on avait uniquement des nombres positifs.)

10. Si $A_1 \in \mathbb{R}$ il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow f(x) \geq A_1$. De même si $A_2 \in \mathbb{R}$ il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in D$ on ait $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow g(x) \geq A_2$. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Pour tout $x \in D$ si $|x-a| < \delta$ on a alors $f(x)g(x) \geq A_1 A_2$.
    Soit $A \in \mathbb{R}$, on applique ce qui précède avec $A_1 = A_2 = \sqrt{|A|}$. On a alors
    $$\underline{|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; f(x)g(x) \geq |A| \geq A}.$$
11. On traite le cas $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, par définition il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$ si $|x-a| < \delta$ alors $f(x) > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ (c'est la Définition 3.12 appliquée avec $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$). En particulier $f(x) \neq 0$ et donc $\dfrac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a. De plus, en prenant l'inverse (on a des nombres positifs) on en déduit que pour tout $x \in D$, si $|x-a| < \delta$ on a alors
    $$\left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon,$$
    ce qui prouve bien que $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f}(x) = 0$.

$\square$

Remarque 3.17. *Au 6. si $l = 0$ on ne peut rien dire. Par exemple si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$ on a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{f}(x) = +\infty$, tandis que la fonction $g = -f$ vérifie $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{g}(x) = -\infty$. Si maintenant $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est définie par $h(x) = x$ on a $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$ mais $\dfrac{1}{h}(x) = \dfrac{1}{x}$ n'a même pas de limite (ni finie ni infinie) en 0.*

Remarque 3.18. *Les quatre "formes indéterminées" sont $(+\infty)+(-\infty)$, $0\times\infty$, $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$. La terminologie "forme indéterminée" signifie juste qu'il faut plus d'information pour pouvoir étudier la limite,* **pas que l'on ne pourra rien faire du tout***. Si on rencontre une de ces formes on évitera donc de s'arrêter là et de conclure par "c'est une forme indéterminée".*

Par exemple la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$ signifie que la seule connaissance de $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ ne permet pas de tirer de conclusion sur la limite éventuelle de la fonction $f+g$ comme le montrent les trois exemples ci-dessous.

Exemple 1 : Soient f, g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = -x^2$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty$.

Exemple 2 : Soient f, g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+1$ et $g(x) = -x$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = 1$.

Exemple 3 : Soient f, g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(x)$ et $g(x) = -x$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ mais $f+g$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Dans chacun des cas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$, cependant $f+g$ a un comportement différent à chaque fois. Remarquez qu'on sait dire lequel !

Exercice 3.5. Montrer que si f est strictement positive au voisinage de a et si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = +\infty$.

Le dernier résultat de cette section concerne les limites de fonctions composées.

Proposition 3.19. *Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $g : D_g \to \mathbb{R}$ telles que $f(D_f) \subset D_g$, $a \in \overline{D}_f$ et $b \in \overline{D}_g$. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = l$. Alors $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = l$.*

Démonstration. Les hypothèses sur les limites de f et g s'écrivent

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists \delta_1 > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon_1, \tag{3.2}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0,\ \exists \delta_2 > 0,\ \forall y \in D_g,\ |y-b| < \delta_2 \Rightarrow |g(y) - l| < \varepsilon_2. \tag{3.3}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après (3.3), il existe $\eta > 0$ tel que si $y \in D_g$ et $|y-b| < \eta$ alors $|g(y) - l| < \varepsilon$. On applique alors (3.2) avec $\varepsilon_1 = \eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in D_f$ et $|x-a| < \delta$ alors $|f(x) - b| < \eta$.

Etant donné $x \in D_f$, si $|x-a| < \delta$ on a $|f(x) - b| < \eta$. Par ailleurs $f(x) \in D_g$ puisque $f(D_f) \subset D_g$. Donc on peut appliquer (3.3) à $y = f(x)$ et on obtient $|g \circ f(x) - l| < \varepsilon$.

On a montré "étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in D_f$ et $|x-a| < \delta$ alors $|g \circ f(x) - l| < \varepsilon$". C'est précisément la définition de $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = l$. □

Proposition 3.20. *La proposition 3.19 reste vraie si on remplace a ou b par $+\infty$ ou $-\infty$.*

Exercice 3.6. Prouvez la proposition ci-dessus.

3.3 Ordre et limite

Proposition 3.21. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$, $l \in \mathbb{R}$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f admet l pour limite en a, resp. en $\pm\infty$.*

i) Si $c < l$ alors $c < f(x)$ au voisinage de a, resp. $\pm\infty$.

ii) Si $l < d$ alors $f(x) < d$ au voisinage de a, resp. $\pm\infty$.

iii) Si $c < l < d$ alors $c < f(x) < d$ au voisinage de a, resp. $\pm\infty$.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas $\lim_{x\to a} f(x) = l$, les cas des limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont laissés à titre d'exercice.

i) Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et que $\varepsilon = l - c > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$|x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < l - c \ \Leftrightarrow\ c - l < f(x) - l < l - c \ \Rightarrow\ f(x) > c,$$

i.e. on a $f(x) > c$ pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D$.

ii) Puisque $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et que $\varepsilon = d - l > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D$,

$$|x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < d - l \ \Leftrightarrow\ l - d < f(x) - l < d - l \ \Rightarrow\ f(x) < d,$$

i.e. on a $f(x) < d$ pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D$.

iii) D'après i) et ii) il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que

$$|x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) > c \quad \text{et} \quad |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; f(x) < d.$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. On a bien $c < f(x) < d$ pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[\cap D$. □

☠ **Attention !** Le résultat est faux si on remplace $<$ ou $>$ par $\leq$ ou $\geq$. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, i.e. on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \geq 0$. Cependant f n'est positive sur aucun intervalle de la forme $]-\delta, \delta[$.

Proposition 3.22. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{D}$, $l \in \mathbb{R}$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que f admet l pour limite en a, resp. $\pm\infty$.*

i) Si $c \leq f(x)$ au voisinage de a, resp. $\pm\infty$, alors $c \leq l$.

ii) Si $f(x) \leq d$ au voisinage de a, resp. $\pm\infty$, alors $l \leq d$.

iii) Si $c \leq f(x) \leq d$ au voisinage de a, resp. $\pm\infty$, alors $c \leq l \leq d$.

Démonstration. i) Soit $\delta_1 > 0$ tel que $f(x) \geq c$ pour tout $x \in]a-\delta_1, a+\delta_1[\cap D$, i.e.

$$\forall x \in D,\, |x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) \geq c.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in D$, si $|x-a| < \delta_2$ alors

$$|f(x) - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \iff -\varepsilon + l < f(x) < \varepsilon + l.$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Soit $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$. On a alors $c \leq f(x) < l + \varepsilon$.

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $c < l + \varepsilon$. On conclut que $c \leq l$ en raisonnant par l'absurde. En effet, si $c > l$, en prenant $\varepsilon = c - l > 0$ on aurait $c < l + \varepsilon = c$. □

Exercice 3.7. Démontrez ii) et iii).

☠ **Attention !** A nouveau, il ne faut pas mélanger $<$ ou $>$ avec $\leq$ ou $\geq$! Par exemple, la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifie $f(x) > 0$ au voisinage de $+\infty$ (c'est même toujours vrai). Cependant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ qui n'est pas strictement positif.

Corollaire 3.23. *Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, et si f et g admettent l et l' pour limite respective en a, alors $l \leq l'$.*

☠ **Attention !** On n'a **pas** $\big(f(x) < g(x)$ au voisinage de $a\big) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

On résume souvent la situation en disant que :

"Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges".

Théorème 3.24. *[Théorème d'encadrement (dit des gendarmes)] Soient $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D}$. On suppose que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$. Alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$. Ce résultat est toujours vrai si $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que, pour tout $x \in D$, on a

$$|x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \ \text{ et } \ |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon.$$

De plus $f \leq g \leq h$ au voisinage de a donc il existe $\delta_3 > 0$ tel que

$$|x-a| < \delta_3 \ \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3) > 0$. Pour tout $x \in D$, si $|x-a| < \delta$ on a

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
- $|f(x) - l| < \varepsilon \ \Rightarrow \ -\varepsilon < f(x) - l$,
- $|h(x) - l| < \varepsilon \ \Rightarrow \ h(x) - l < \varepsilon$.

Ainsi si $|x-a| < \delta$ on a $-\varepsilon < f(x) - l \leq g(x) - l \leq h(x) - l < \varepsilon \ \Rightarrow \ |g(x) - l| < \varepsilon$. On a bien prouvé que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$. □

Exemple 3.25. *On montre, en partant de la définition du sinus et du cosinus (voir Section 2.3.3, page 34), que* $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$.

Prenons d'abord $x \in [0, \pi/2[$. *On munit le plan d'un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *Soit* M *le point* $(1,0)$ *et* P *le point sur le cercle unité correspondant à l'angle* x *(voir la figure page 34). Le triangle* OPM *est inclus dans le secteur angulaire* OPM. *Le sinus est positif si* $x \in [0, \pi/2[$, *et en calculant les aires correspondantes (aire d'un triangle = la moitié de la base × la hauteur, aire d'un secteur angulaire = la moitié de l'angle × le carré du rayon), on obtient* $0 \leq \sin(x) \leq x$. *Comme la fonction sinus est impaire on en déduit que pour tout* $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ *on a* $-x \leq \sin(x) \leq x$. *On applique alors le théorème des gendarmes pour obtenir* $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$.

Pour le cosinus, on utilise la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ *(avec la définition que l'on a prise du sinus et du cosinus cette égalité est une application du Théorème de Pythagore !). Par ailleurs* $\cos(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ *et on peut donc écrire, sur cet intervalle,* $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$. *La limite* $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$ *est une conséquence de celle sur le sinus et des propriétés sur les limites.*

Exercice 3.8. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$, où E représente la fonction partie entière.

3.4 Quelques limites usuelles

Fractions rationnelles

Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq m \leq n$ et $0 \leq p \leq q$, $a_m \neq 0, a_n \neq 0, b_p \neq 0, b_q \neq 0$, on considère

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_m x^m}{b_q x^q + \cdots + b_p x^p} = \frac{\sum\limits_{k=m}^{n} a_k x^k}{\sum\limits_{j=p}^{q} b_j x^j}.$$

Alors

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_q x^q}$ (les plus grandes puissances). Pour le voir il suffit de mettre $\frac{a_n x^n}{b_q x^q}$ en facteur dans l'expression de f et d'utiliser la Proposition 3.15 page 40.
- $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{a_m x^m}{b_p x^p}$ (les plus petite puissances). L'argument est analogue à celui d'au-dessus.

Logarithme et exponentielle

Dans ce cours, on admet les résultats suivants :

- $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
- $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
- En $+\infty$, l'exponentielle "croit plus vite" que n'importe quelle puissance, c'est-à-dire, pour tout $a \in \mathbb{R}$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^a} = +\infty \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0.$$
- En $+\infty$, n'importe quelle puissance positive de x "croit plus vite" que le logarithme, c'est-à-dire, pour $\alpha > 0$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0.$$
En appliquant la Proposition 3.19 avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ on en déduit
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0.$$
Avec $\alpha = 1$ on obtient les deux cas particuliers importants
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.}$$
- Dans le chapitre sur les dérivées, on verra :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.}$$

Sinus et cosinus

Proposition 3.26. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ *et* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Démonstration. 1. Prenons d'abord $x \in]0,\pi/2[$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit M le point $(1,0)$, P le point sur le cercle unité correspondant à l'angle x, et I l'intersection de la droite (OP) avec la droite verticale passant par M (voir la figure page 34). Le triangle OPM est inclus dans le secteur angulaire OPM qui est lui-même inclus dans le triangle OMI. En calculant les aires correspondantes, on obtient
$$\boxed{\sin(x) \le x \le \tan(x)}$$

ce qui donne, puisque $\sin(x) > 0$ lorsque $x \in]0, \pi/2[$, $1 \leq \dfrac{x}{\sin(x)} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$ et donc

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Par ailleurs les fonctions $\cos(x)$ et $\dfrac{\sin(x)}{x}$ sont paires donc l'encadrement ci-dessus est valable pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{0\}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ (voir l'Exemple 3.25), par le théorème des gendarmes (Théorème 3.24 page 45), on obtient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

2. C'est une conséquence de 1. en écrivant, pour $x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} \\ &= \frac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{1}{1+\cos(x)}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2,\end{aligned}$$

et en appliquant la Proposition 3.15.

□

Exemple 3.27. *Pour calculer la limite en 0 de* $\dfrac{\sin(3x)}{x}$, *on écrit* $\dfrac{\sin(3x)}{x} = 3\dfrac{\sin(3x)}{3x}$. *Le résultat sur les compositions de limites (Proposition 3.19 page 44) et la proposition précédente donnent alors* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x} = 1$, *d'où* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = 3$.

3.5 Limites à droite et à gauche

Définition 3.28. *Soient* $f : D \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \overline{D}$.

1. *On suppose qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $]a, a+\delta[\subset D$. *On dit que* f admet l comme limite à droite en a, *et on note* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$, *ou encore* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = l$, *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ (0 < x - a < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

2. *On suppose qu'il existe* $\delta > 0$ *tel que* $]a-\delta, a[\subset D$. *On dit que* f admet l comme limite à gauche en a, *et on note* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$, *ou encore* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = l$, *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ (-\delta < x - a < 0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

On vérifie facilement que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = l \iff \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = l\right)$$

En particulier, si une fonction f admet des limites différentes à gauche et à droite en a, alors f n'a pas de limite en a.

Exercice 3.9. Calculer les limites à gauche et à droite en 0 de $x \mapsto E(x)$.

Remarque 3.29. *Sur le même principe, on peut définir les notions de* f *admet pour limite* $+\infty$, *resp.* $-\infty$, *à droite (ou à gauche) en* a.

CHAPITRE 4

CONTINUITÉ

Dans tout ce chapitre, sauf précision contraire, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton, i.e. à un seul point.

4.1 Fonctions continues

4.1.1 Continuité en un point

Définition 4.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est* continue en a *si f admet une limite finie en a. Comme $a \in I$ cette limite est automatiquement $f(a)$ (voir la Remarque 3.5, page 38). Autrement dit, f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ou encore*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exercice 4.1. Donner des exemples de fonctions non continues en 0.

Remarque 4.2. *Si on prend (3.1) comme définition de limite, il faut alors remplacer "f admet une limite finie en a" par "f admet une limite finie en a et celle-ci vaut $f(a)$" dans la définition ci-dessus.*

La Proposition 3.11 entraine immédiatement que

Proposition 4.3. *Si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de a.*

Définition 4.4. *On dit que f est* continue à droite en a*, resp.* continue à gauche en a*, si a n'est pas le plus grand élément de I et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, resp. a n'est pas le plus petit élément de I et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.*

Bien sûr f est continue en a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en a.

Proposition 4.5. *Les fonctions constantes et la fonction $f(x) = x$ définies sur $\mathbb{R}$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.*

Exercice 4.2. Prouver la proposition ci-dessus.

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des Propositions 3.15 et 3.19.

Proposition 4.6. *Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est continue en a, alors $|f|$ est continue en a.*
2. *Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a.*
3. *Si f est continue en a, alors λf est continue en a.*
4. *Si f et g sont continues en a, alors fg est continue en a.*
5. *Si g est continue en a et $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est définie dans un voisinage de a et est continue en a.*
6. *Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie dans un voisinage de a et est continue en a.*

Proposition 4.7. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$, avec $f(I) \subset J$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

Corollaire 4.8. *1. Les fonctions polynômes sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.*
2. Les fractions rationnelles, c'est-à-dire les fonctions de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, sont continues en tout point a tel que $Q(a) \neq 0$.

Démonstration. 1. On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. Cela se fait par récurrence en utilisant la Proposition 4.5 et le 4. de la Poposition 4.6. Les détails sont laissés à titre d'exercice.

Soit P une fonction polynôme, elle peut donc s'écrire $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où les $a_k \in \mathbb{R}$. Le résultat découle alors de la continuité des fonctions $x \mapsto x^n$ ainsi que des 2. et 3. de la Proposition 4.6.

2. Ca découle directement du 1. et de la propriété 6. de la Proposition 4.6. □

Exercice 4.3. Déterminer l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $E(x)$ (partie entière) soit continue au point a.

4.1.2 Continuité sur un intervalle

Définition 4.9. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est* continue sur I *si f est continue en tout point de I, i.e.*

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in I,\ |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Les propriétés de continuité en un point s'étendent immédiatement à la continuité sur un intervalle.

Théorème 4.10. *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.*
2. *Si f et g sont continues sur I alors $f + g$ est continue sur I.*
3. *Si f est continue sur I alors λf est continue sur I.*

4. *Si f et g sont continues sur I alors fg est continue sur I.*
5. *Si g est continue sur I et, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{g}$ est définie et continue sur I.*
6. *Si f, g sont continues sur I et, $\forall x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie et continue sur I.*

Proposition 4.11. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I.*

4.1.3 Prolongement par continuité

Définition 4.12. *Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est* prolongeable par continuité en *a si f admet une limite finie l en a. La fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in I \setminus \{a\} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(a) = l,$$

est appelé le prolongement par continuité de f au point a. En particulier $\tilde{f}$ est continue en a, et donc sur I.

Exemple 4.13. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. On cherche à savoir si elle est prolongeable par continuité en 0*

Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Donc f est prolongeable par continuité en 0 et $\tilde{f}(0) = 1$. La fonction $\tilde{f}$ est alors continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 4.4. Montrer que pour tout $a > 0$ la fonction $f(x) = x^a$ définie sur $]0, +\infty[$ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de ce prolongement. Lorsque $a > 0$ on considère donc naturellement que les fonctions puissances sont définies sur $[0, +\infty[$.

4.1.4 Continuité par morceaux

Définition 4.14. *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est* continue par morceaux *sur $[a, b]$ s'il existe $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$ tels que*

1. *$c_0 = a$ et $c_n = b$,*
2. *f est continue sur chaque intervalle $]c_k, c_{k+1}[$, et les limites $\lim\limits_{x \to c_k^-} f(x)$, $k = 1, \ldots, n$, et $\lim\limits_{x \to c_k^+} f(x)$, $k = 0, \ldots, n-1$, existent et sont finies.*

Remarque 4.15. *La condition 2. est équivalente à dire que pour tout intervalle $[c_k, c_{k+1}]$ il existe une fonction continue $f_k : [c_k, c_{k+1}] \to \mathbb{R}$ qui coïncide avec f sur $]c_k, c_{k+1}[$.*

Définition 4.16. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux sur I si pour tout $[a, b] \subset I$ la fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$.*

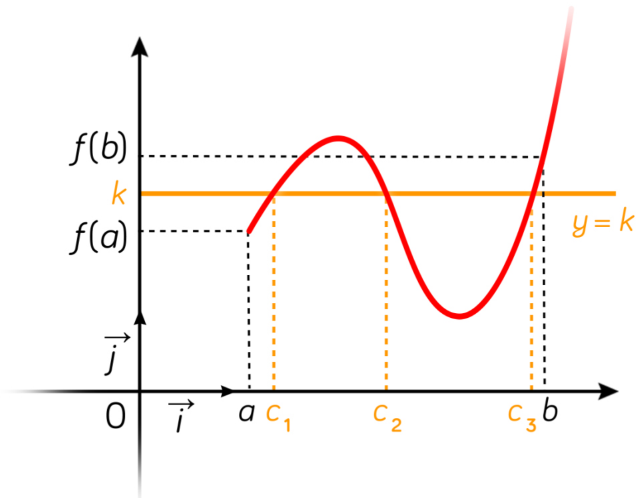
Exemple 4.17. *La fonction "partie entière" est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On pose $c_0 = a$, $c_1 = E(a) + 1$, $c_2 = E(a) + 2, \ldots$, $c_{n-1} = E(b)$ et $c_n = b$. La fonction $f_k : [c_k, c_{k+1}] \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = c_k$ si $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et par $f_k(x) = E(a)$ pour $k = 0$, est bien continue et coïncide avec E sur $]c_k, c_{k+1}[$.*

4.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème suivant précise l'image d'un intervalle par une application continue. Rappelons une propriété caractéristique d'un intervalle (voir la Remarque 2.14 page 21) : I est un intervalle si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2, [x,y] \subset I$.

Théorème 4.18 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient I un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a,b) \in I^2$ tels que $a \leq b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.*

Remarque 4.19. *Intuitivement, derrière l'idée de continuité il y a l'idée que l'on ne peut pas passer "instantanément" d'une valeur à une autre, il faut passer par toutes les valeurs qui sont entre les deux. Autrement dit, le graphe d'une fonction* continue sur un intervalle *se trace sans lever le crayon. C'est précisément ce que dit ce théorème.*



Le théorème des Valeurs Intermédiaires

Démonstration. La démonstration sera vue au second semestre dans le cours de "Polynômes et Suites" en utilisant le Théorème des suites adjacentes. Pour le lecteur intéressé et curieux on donne une autre démonstration dans la Section 4.3 utilisant la notion de borne supérieure (Section 2.4) et en particulier le Théorème 2.60. □

☠ **Attention !** Il est indispensable que la fonction considérée soit définie sur un *intervalle* ! Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. 0 est compris entre $f(-2) = -\frac{1}{2}$ et $f(3) = \frac{1}{3}$, pourtant il n'existe aucun réel tel que $\frac{1}{x} = 0$.

On rencontre ici une première utilité de la notion de prolongement par continuité : si possible agrandir le domaine de définition de façon à avoir un intervalle, tout en gardant la notion de continuité. On ne pourrait pas appliquer le Théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle, mais on peut l'appliquer à la fonction obtenue par prolongement par continuité en définissant $f(0) = 1$.

Corollaire 4.20. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Un cas particulier du Théorème 4.18 que l'on utilise souvent est celui où $k = 0$:

Corollaire 4.21. *Si une fonction continue sur un intervalle I prend des valeurs positives et négatives, alors elle s'annule en (au moins) un point.*

Exercice 4.5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$, i.e. pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Théorème 4.22. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Remarque 4.23. *" f est bornée et atteint ses bornes" signifie que*

1. *f est minorée et majorée,*
2. *f possède un minimum et un maximum : $\exists (x_m, x_M) \in [a,b]^2$, $\forall x \in [a,b]$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.*

Démonstration. La preuve de ce Théorème sera également vue au second semestre dans le cours "Polynômes et Suites". □

Combiné avec le Corollaire 4.20, le théorème précédent précise ainsi l'image de f lorsque l'intervalle de départ est un segment :

Corollaire 4.24. *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

Exercice 4.6. Donner un exemple de fonction f continue et définie sur $]0,1]$ telle que

a) f ne soit pas majorée.

b) f ne soit pas minorée.

c) f soit majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure.

d) f soit minorée mais n'atteint pas sa borne inférieure.

4.3 Complément : preuve du Théorème des Valeurs Intermédiaires

Dans cette section on démontre le Théorème 4.18 à l'aide de la notion de borne supérieure et du Théorème 2.60. On se place dans le cas où $f(a) \leq f(b)$. On reviendra sur l'autre cas à la fin.

Soit donc k tel que $f(a) \leq k \leq f(b)$. On veut montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$. Si $k = f(a)$ il suffit de prendre $c = a$ et si $k = f(b)$ il suffit de prendre $c = b$. On suppose donc maintenant que $f(a) < k < f(b)$. On considère l'ensemble $A = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \leq k\}$. L'ensemble A est majoré (b est un majorant) et il n'est pas vide puisque $a \in A$. D'après le Théorème 2.60 l'ensemble A admet une borne supérieure que l'on note c. En particulier c est un majorant de A et donc

$$\forall x \in]c,b], \; f(x) > k.$$

On va montrer que c vérifie $f(c) = k$. On va pour cela procéder en 3 étapes :

1. on montre que $c \in]a,b[$, autrement dit que $c \neq a$ et $c \neq b$,
2. on montre que $f(c) \geq k$,

3. on montre que $f(c) \leq k$.

On peut au préalable remarquer que comme I est un intervalle et $a, b \in I$ on a $c \in I$ et donc $f(c)$ est bien défini.

Étape 1. Si $c = a$ cela veut dire que pour tout $x > a$ on a $f(x) > k$. D'après la Proposition 3.22 et la continuité de f en a on en déduit que

$$k \leq \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ce qui contredit $f(a) < k$. Ainsi $c > a$.

Soit maintenant $\varepsilon = f(b) - k > 0$. Comme f est continue au point b on a $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$ et donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ |x - b| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(b)| < \varepsilon.$$

En particulier, si $x \in]b - \delta, b]$ on a

$$f(b) - f(x) < \varepsilon = f(b) - k \ \Longrightarrow f(x) > k.$$

Autrement dit si $x \in]b - \delta, b]$ alors $x \notin A$ et donc $c \leq b - \delta < b$.

Étape 2. Pour tout $x \in]c, b]$ on a $f(x) > k$, et l'étape 1. montre que l'intervalle $]c, b]$ n'est pas vide. En utilisant à nouveau la Proposition 3.22 et cette fois la continuité de f en c on en déduit que

$$k \leq \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c).$$

On peut remarquer qu'ici aussi on a utilisé l'hypothèse que I est un intervalle. Même si $c \in I$ et que $f(c)$ a un sens il faut s'assurer que la limite quand x tend vers c par valeurs supérieures soit bien définie.

Étape 3. On va raisonner par l'absurde. Supposons donc que $f(c) > k$ et soit $\varepsilon = f(c) - k > 0$. Comme f est continue au point c il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ |x - c| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Comme $a < c < b$, quitte à diminuer δ on peut supposer que $]c - \delta, c + \delta[\subset [a, b]$. Pour tout $x \in]c - \delta, c]$ on a donc

$$f(c) - f(x) < \varepsilon = f(c) - k \Longrightarrow f(x) > k.$$

Comme on a également $f(x) > k$ pour tout $x \in]c, b]$ on en déduit que pour tout $x \in]c - \delta, b]$ on a $f(x) > k$ et donc $c - \delta$ est un majorant de A. Comme $c - \delta < c$ cela contredit la définition de c, à savoir que c est le plus petit majorant de A.

Conlusion : On a montré qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $k \leq f(c) \leq k$ et donc on a bien $f(c) = k$.

La preuve ci-dessus démontre le théorème dans le cas où la fonction f vérifie $f(a) \leq f(b)$. Si maintenant $f(a) > f(b)$ et $f(b) \leq k \leq f(a)$ on obtient le résultat en appliquant le théorème à la fonction $g = -f$ et au nombre $-k$. En effet, g est bien continue sur I et on a $g(a) \leq -k \leq g(b)$, donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $-k = g(c) = -f(c)$, i.e. $k = f(c)$.

CHAPITRE 5

DÉRIVABILITÉ

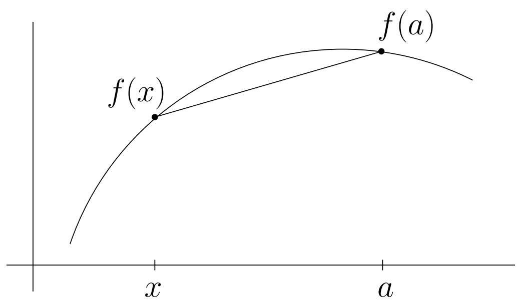
Dans tout ce chapitre I, sauf précision contraire, désignera à nouveau un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un singleton.

5.1 Fonctions dérivées

5.1.1 Définitions

Définition 5.1. *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est* dérivable *en a si la limite $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on note $f'(a)$ cette limite et on l'appelle le nombre dérivé de f en a.*

Remarque 5.2. *La quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ s'appelle le taux d'accroissement (ou de variation) de la fonction f entre a et x. C'est la pente du segment joignant les points de coordonnées respectives $(a, f(a))$ et $(x, f(x))$.*



Remarque 5.3. *Dans la définition on peut remplacer le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ par $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (cela correspond à écrire $x = a+h$) et on étudie alors la limite quand $h \to 0$ de ce dernier rapport.*

Exemple 5.4. *Par définition la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée elle-même, et vaut* 1 *en* 0. *On en déduit donc la limite*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^0}{x-0}=\exp'(0)=\exp(0)=1.$$

Exercice 5.1. En utilisant la définition, calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x)=ax+b$ en tout $x_0\in\mathbb{R}$.

b) $f(x)=\sqrt{x}$ en tout $x_0>0$. f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 5.2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ (voir Proposition 3.26). En utilisant la définition, montrer que les fonctions sin et cos sont dérivables en x_0 pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ et calculer leur dérivée.

Définition 5.5. *Soient $a\in I$ et $f:I\to\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable à droite, resp. à gauche, en a si a n'est pas le plus grand élément de I et $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, resp. a n'est pas le plus petit élément de I et $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée dérivée à droite, resp. à gauche, de f en a et notée $f'_d(a)$, resp. $f'_g(a)$.*

Proposition 5.6. *Soient $a\in I$ et $f:I\to\mathbb{R}$. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a)=f'_d(a)$.*

Exercice 5.3. Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Proposition 5.7. *Si f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Démonstration. Il suffit d'écrire pour $x\neq a$ que $f(x)=f(a)+(x-a)\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et de faire tendre x vers a. □

☠ **Attention !** La réciproque est fausse. La fonction valeur absolue est continue mais pas dérivable en 0.

5.1.2 Application dérivée

Définition 5.8. *Soient I un intervalle et $f:I\to\mathbb{R}$. Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est dérivable sur I. La* fonction dérivée *de f, notée f', est la fonction définie sur I par $f':I\ni x\mapsto f'(x)\in\mathbb{R}$.*

La proposition 5.7 donne immédiatement qu'une fonction dérivable sur I est continue sur I.

Théorème 5.9. *Soient $a\in I$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f,g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en a. Alors,*

1. *$f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.*
2. *λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a)=\lambda f'(a)$.*
3. *fg est dérivable en a et $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.*
4. *si $g(a)\neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ est définie au voisinage de a, dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a)=-\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$.*

5. *si* $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ *est définie au voisinage de* a *et dérivable en* a. *De plus,*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration. 1. Pour $x \in I$, $x \neq a$, on écrit

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Le résultat découle alors du 3. de la Propositon 3.15.

2. Pour $x \in I$, $x \neq a$, on écrit

$$\frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x-a} = \frac{\lambda f(x) - \lambda f(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Le résultat découle alors du 4. de la Propositon 3.15.

3. Pour $x \in I$, $x \neq a$, on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.
\end{aligned}$$

Puisque g est dérivable en a elle est aussi continue en a donc $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Le résultat découle alors du 3. et du 5. de la Propositon 3.15.

4. Puisque g est dérivable en a elle est continue en a. De plus $g(a) \neq 0$ donc, d'après la Proposition 3.21, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[$ on ait $g(x) \neq 0$, i.e. $\dfrac{1}{g}$ est bien définie au voisinage de a. Pour tout $x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[$ on écrit

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{\frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)} \times \frac{g(x) - g(a)}{x-a}.$$

Le résultat découle alors de la Propositon 3.15 et de la dérivabilité (et donc de la continuité) de g en a.

5. On utilise 4. pour la fonction g et on applique 3. avec f et $\dfrac{1}{g}$. $\square$

Exercice 5.4. En raisonnant par récurrence, montrer que

a) pour tout entier $n \geq 1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est $f'(x) = nx^{n-1}$.

b) pour tout entier $n \geq 1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^{-n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que sa dérivée est $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Théorème 5.10. *Soient I et J deux intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.*

Idée de la démonstration : si $x \neq a$ on écrit

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On appelle $y = f(x)$. Puisque f est dérivable en a elle y est continue, donc lorsque x tend vers a on a $y \to f(a)$. L'idée est alors d'écrire

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} \times \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(f(a)) \times f'(a). \end{aligned}$$

Il y a cependant un passage incorrect : on a divisé par $f(x) - f(a)$ mais ce terme pourrait être nul. On peut penser au cas où f est constante, ou par exemple à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ qui s'annule pour tout $x = \frac{1}{n\pi}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$.

La démonstration ci-dessous évite ce problème mais l'idée générale de l'argument est celle donnée ci-dessus.

Démonstration. Soit $\tau : J \to \mathbb{R}$ définie par $\tau(y) = \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}$ si $y \neq f(a)$ et $\tau(f(a)) = g'(f(a))$. Comme g est dérivable en $f(a)$ cela prouve que la fonction τ est continue en $f(a)$. Par ailleurs on a pour tout $y \in J$

$$g(y) = g(f(a)) + \tau(y) \times (y - f(a)).$$

On écrit alors, en prenant $y = f(x)$,

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \tau(f(x)) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On peut maintenant prendre la limite $x \to a$ et le résultat découle de la dérivabilité de f en a, de la continuité de τ en $f(a)$ et de la Proposition 3.15. $\square$

Exemple 5.11. *Les formules pour certaines dérivées vues en terminale sont des cas particuliers de la formule de dérivation composée du Théorème 5.10.*

1. *En prenant $f(x) = \alpha x + \beta$, la dérivée de $g(\alpha x + \beta)$ est $\alpha g'(\alpha x + \beta)$.*
2. *Si $n \in \mathbb{Z}$, en prenant $g(x) = x^n$ la dérivée de $f(x)^n$ est $f'(x) \times n f(x)^{n-1}$ (il faut ici avoir $f(x) \neq 0$ si $n < 0$).*
3. *En prenant $g(x) = \exp(x)$ la dérivée de $\mathrm{e}^{f(x)}$ est $f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$.*

5.2 Le théorème des accroissements finis

5.2.1 Extremum local d'une fonction

Définition 5.12. *Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *On dit que a est un* minimum global, *resp.* maximum global, *de f si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \geq f(a)$, resp. $f(x) \leq f(a)$.*
2. *On dit que a est un* extremum global *de f si a est un maximum global ou un minimum global de f.*
3. *On dit que a est un* minimun local, *resp.* maximum local, *de f s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[$, on ait $f(x) \geq f(a)$, resp $f(x) \leq f(a)$. Autrement dit si a est minimum, resp. maximum, de f dans un voisinage de a.*
4. *On dit que a est un* extremum local *de f si a est un maximum local ou un minimum local de f.*
5. *Un maximum local (global), resp. minimum local (global), est dit* strict *si pour tout $x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[$ ($x \in I$), $x \neq a$, on a $f(x) > f(a)$, resp. $f(x) < f(a)$.*

Remarque 5.13. *Si a est un minimum, resp. maximum, global de f alors a est un minimum, resp. maximum, local de f.*

Théorème 5.14. *Soient I un intervalle* <u>ouvert</u> *de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a et a est un extremum local de f alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que a est un maximum local et soit $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on ait $f(x) \leq f(a)$. Alors, si $x \in]a, a+\delta[$ on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et donc, puisque f est dérivable en a, d'après la Proposition 3.22 on a $f'(a) \leq 0$. Par ailleurs, si $x \in]a-\delta, a[$ on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ et par le même argument que ci-dessus on en déduit que $f'(a) \geq 0$. Finalement on a bien $f'(a) = 0$. □

Remarque 5.15. *La récriproque est fausse. Par exemple la dérivée de $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est nulle en 0, mais 0 n'est pas un extremum local.*

Attention ! Il faut que l'intervalle soit ouvert ou du moins que a ne soit pas au bord de l'intervalle, comme par exemple $I = [a, b[$. En effet on ne pourrait alors pas appliquer les deux parties de l'argument ci-dessus. Si $I = [a, b[$ on ne pourra pas appliquer la seconde partie puisque f n'est jamais définie pour $x < a$. Par exemple, soit f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = 2x + 1$. Alors 0 et 1 sont respectivement un minimum et un maximum local de f, cependant $f'(x) = 2 \neq 0$ pour tout x !

5.2.2 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 5.16. *[Théorème de Rolle] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

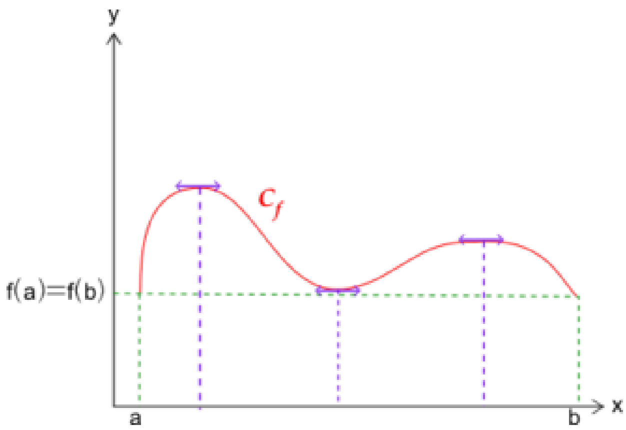


FIGURE 5.1 – Le théorème de Rolle

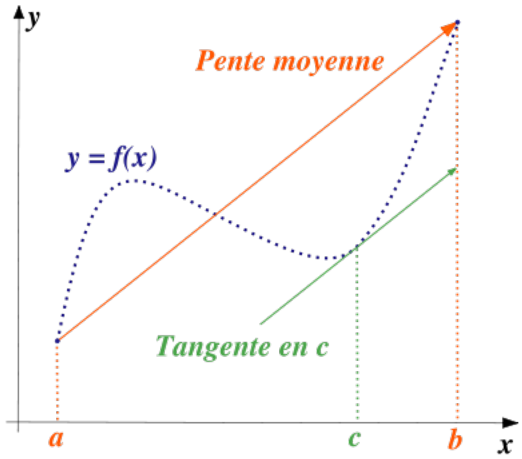


FIGURE 5.2 – Le théorème des accroissements finis

L'interprétation graphique de ce théorème est la suivante : si les deux points A et B de la courbe représentative de f, et d'abscisses respectives a et b, ont même ordonnée, autrement dit si la droite (AB) est horizontale, alors la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en au moins un point d'abscisse c compris entre a et b, voir Figure 5.1.

Remarque 5.17. *Le point c n'est pas forcément unique, voir Figure 5.1.*

Démonstration. D'après le Théorème 4.22 (page 53), puisque la fonction f est continue sur $[a, b]$ elle est bornée et admet un minimum et un maximum global, il existe $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Si $f(x_m) = f(x_M)$, f est constante et la dérivée d'une fonction constante est nulle, donc $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) = 0$.

Sinon, on a $f(x_m) < f(x_M)$ et on ne peut donc pas avoir $f(x_M) = f(a)$ et $f(x_m) = f(a)$. Supposons que $f(x_M) \neq f(a)$ (l'autre cas se traite de la même façon). Comme $f(a) = f(b)$, on a aussi $f(x_M) \neq f(b)$, et donc $x_M \in]a, b[$. Comme la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ et que x_M est un maximum global (donc local) de f sur $]a, b[$ on peut appliquer le Théorème 5.14, ce qui prouve que $f'(x_M) = 0$. □

Le théorème suivant est la généralisation du théorème de Rolle au cas où $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas forcément égaux.

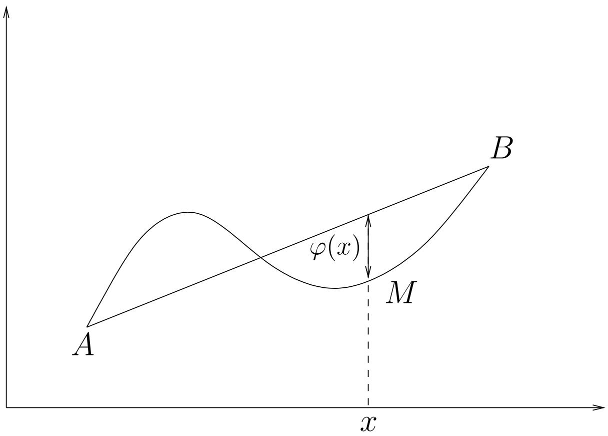
Théorème 5.18. *[Théorème des accroissements finis] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Graphiquement la quantité $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est la pente de la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Ce résultat signifie donc qu'il existe (au moins) un point de la courbe représentative de f d'abscisse $c \in]a, b[$ en lequel la tangente est parallèle à la droite (AB), voir Figure 5.2.

Démonstration. C'est une application directe du théorème de Rolle. On définit la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$. Elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Mais $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, d'où le résultat. □

Remarque 5.19. *La droite (AB) a pour équation $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$, et le membre de droite est précisément la quantité qui apparaît dans la définition de φ. Autrement dit, la fonction φ représente la distance algébrique (calculée verticalement) entre un point M de la courbe et le point de la droite (AB) ayant la même abscisse que M.*



Le théorème qui suit est une conséquence directe du Théorème des accroissements finis.

Théorème 5.20 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que f' est bornée par M sur $]a, b[$, i.e. pour tout $x \in]a, b[$ on a $|f'(x)| \leq M$. Alors, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|(x - y)|$.*

Exemple 5.21. *La fonction* sin *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Comme* $\sin'(x) = \cos(x)$ *est bornée par* 1*, on a*

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration. Supposons que $x \leq y$ (le cas $y \leq x$ se traite de la même façon). Puisque f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à f sur $[x, y]$, on sait qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Comme $|f'(c)| \leq M$, on a bien le résultat voulu. □

5.2.3 Monotonie et signe de la dérivée

Une conséquence importante du Théorème des accroissements finis est le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction. Commençons par le cas particulier où f' est nulle. Si I est un intervalle, $\mathring{I}$ désigne I privé de ses extrémités éventuelles. Par exemple, si $I = [a, b[$ alors $\mathring{I} =]a, b[$.

Proposition 5.22. *Soient I un* **intervalle** *et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$ si et seulement si f est constante sur I.*

Démonstration. $\Leftarrow$: c'est immédiat en utilisant la définition de la dérivée. Soit $x_0 \in I$, pour tout $x \in I$, $x \neq x_0$, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, donc $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.

$\Rightarrow$: Soit $(x, y) \in I^2$. On veut montrer que $f(x) = f(y)$. Si $x = y$ c'est évident. On va supposer $x < y$ (l'autre cas est similaire). On applique alors le Théorème des accroissements finis sur $[x, y]$. Il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c) \times (y - x)$. Mais $f'(c) = 0$ donc $f(y) = f(x)$. □

☠ **Attention !** L'implication "f est constante $\Rightarrow$ $f' = 0$" découle directement de la définition de la dérivée et est vraie quelque soit l'ensemble de définition de f.

L'implication "$f' = 0 \Rightarrow f$ est constante" est beaucoup moins évidente, elle utilise le Théorème des accroissements finis (qui utilise le Théorème de Rolle, qui lui même utilise le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes,...). De plus elle n'est vraie que si I est un intervalle ! Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, sa dérivée est nulle, mais f n'est pas constante.

Théorème 5.23. *Soient I un* **intervalle** *et $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.*

1. *f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.*
2. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$ alors f est strictement croissante sur I.*
3. *f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$.*
4. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$ alors f est strictement décroissante sur I.*

☠ **Attention !** Le fait que f soit strictement croissante n'implique pas que $f'(x) > 0$ sur $\mathring{I}$. Par exemple la fonction $f(x) = x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante mais $f'(0) = 0$.

Démonstration. 1. $\Rightarrow$ Supposons que f est croissante sur I. Soit $x_0 \in \mathring{I}$. Pour tout $x \neq x_0$ on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, et donc d'après la Proposition 3.22 on a $f'(x_0) \geq 0$.

$\Leftarrow$ Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leq y$. On applique le Théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x, y]$. Il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Comme $f'(c) \geq 0$ on a $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$, i.e. $f(x) \leq f(y)$. La fonction f est bien croissante.

2. C'est le même raisonnement que ci-dessus. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. On applique le Théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x, y]$. Il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Comme $f'(c) > 0$ on a $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0$, i.e. $f(x) < f(y)$. La fonction f est bien strictement croissante.

3. et 4. On applique 1. et 2. à la fonction $-f$. □

Remarque 5.24. *A nouveau, si l'implication "f croissante $\Rightarrow f' \geq 0$" découle directement de la définition de la dérivée et des propriétés sur les limites, la réciproque n'est pas si évidente : elle utilise le Théorème des accroissements finis.*

5.3 Complément : dérivabilité et meilleure approximation affine

Définition 5.25. *Si f est dérivable en a, la* tangente *à la courbe représentative de f au point $(a, f(a))$ est la droite passant par ce point et de pente $f'(a)$. Autrement dit c'est la droite T_a d'équation*

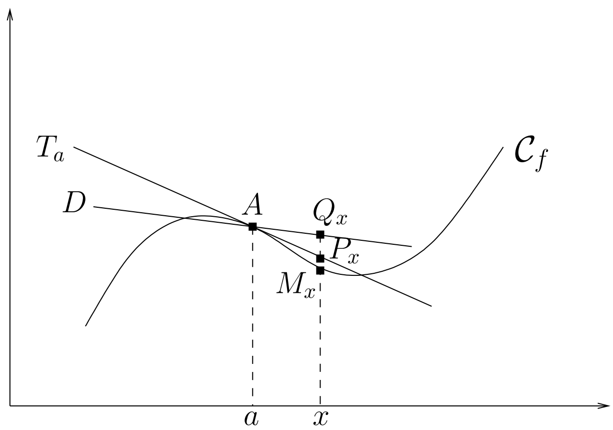
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Remarque 5.26. *La tangente est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.*

L'idée de la droite tangente au point $(a, f(a))$ est que c'est la droite du plan qui approche le mieux la courbe représentative de f au voisinage de ce point. Plus précisément, on a la propriété suivante

Proposition 5.27. *Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Pour toute droite $D : \ y = \alpha(x - a) + \beta$ du plan, si M_x, P_x et Q_x notent les points d'abscisse x et appartenant respectivement à la courbe représentative de f, à sa tangente T_a au point A de coordonnées $(a, f(a))$ et à la droite D, alors il existe un voisinage $I =]a - \delta, a + \delta[$ de a tel que pour tout $x \in I$ on ait $M_xP_x \leq M_xQ_x$, c'est-à-dire*

$$|f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))\,| \leq |f(x) - (\alpha(x - a) + \beta)|. \tag{5.1}$$



Remarque 5.28. *L'équation d'une droite non verticale du plan peut toujours se mettre sous la forme $y = \alpha(x - a) + \beta$.*

Démonstration. Soit $D : \ y = \alpha(x - a) + \beta$ une droite du plan. Comme f est dérivable en a, elle est aussi continue en a, et on a donc

$$\lim_{x \to a} |f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))\,| = 0 \tag{5.2}$$

et

$$\lim_{x \to a} |f(x) - (\alpha(x - a) + \beta)| = |f(a) - \beta|. \tag{5.3}$$

On distingue alors deux cas selon que $\beta = f(a)$ ou non.
<u>1er cas : $\beta \neq f(a)$.</u> D'après (5.2)-(5.3) on a

$$\lim_{x \to a} |f(x) - (\alpha(x - a) + \beta)| - |f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))\,| = |f(a) - \beta| > 0.$$

D'après la Proposition 3.21 on en déduit que

$$|f(x) - (\alpha(x-a)+\beta)| - |f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))\,| > 0$$

au voisinage de a, i.e. $\exists \delta > 0$ tel que si $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on a $|f(x) - (f(a)+f'(a)(x-a))\,| < |f(x) - (\alpha(x-a)+\beta)|$ et donc (5.1) est bien vérifiée.
2nd cas : $\beta = f(a)$. Si $\alpha = f'(a)$ le résultat est évident (on a alors $D = T_a$ et donc les points P_x et Q_x sont confondus). On considère maintenant le cas $\alpha \neq f'(a)$. Puisque f est dérivable en a on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et donc

$$\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| - \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| = |f'(a) - \alpha| > 0.$$

A nouveau, d'après la Proposition 3.21 on en déduit que

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right| > \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \\ \iff\ & |f(x) - (f(a)+f'(a)(x-a))\,| < |f(x) - (\alpha(x-a)+f(a))|. \end{aligned}$$

au voisinage de a, le point a exclus. L'inégalité (5.1) étant évidemment vérifiée pour $x = a$ (les deux membres sont alors nuls), cela prouve le résultat.

$\square$

En fait, l'existence d'une "meilleure approximation affine" caractérise le fait d'être dérivable.

Définition 5.29. *Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une meilleure approximation affine en a s'il existe une fonction affine $P(x) = \alpha(x-a)+\beta$ telle que, pour toute fonction affine $Q(x) = \gamma(x-a)+\zeta$, il existe un voisinage $]a-\delta, a+\delta[$ de a sur lequel $|f(x) - P(x)| \le |f(x) - Q(x)|$.*

Théorème 5.30. *Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f admet une meilleure approximation affine en a si et seulement si elle est dérivable en a. La meilleure approximation affine est alors $P(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.*

Lemme 5.31. *Soit $A \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Si $|A| \le |A+\varepsilon|$ et $|A| \le |A-\varepsilon|$ alors $|A| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$.*

Démonstration. On a

$$|A| \le |A+\varepsilon| \quad\iff\quad A^2 \le (A+\varepsilon)^2 \quad\iff\quad 0 \le 2A\varepsilon + \varepsilon^2 \quad\iff\quad -\frac{\varepsilon}{2} \le A,$$

et

$$|A| \le |A-\varepsilon| \quad\iff\quad A^2 \le (A-\varepsilon)^2 \quad\iff\quad 0 \le -2A\varepsilon + \varepsilon^2 \quad\iff\quad A \le \frac{\varepsilon}{2},$$

où à chaque fois on a utilisé le fait que $\varepsilon > 0$ à la dernière équivalence. Et donc finalement si $|A| \le |A+\varepsilon|$ et $|A| \le |A-\varepsilon|$ on a

$$-\frac{\varepsilon}{2} \le A \le \frac{\varepsilon}{2} \quad\iff\quad |A| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\square$

Démonstration du Théorème. $\Leftarrow$: c'est la Proposition 5.27.

$\Rightarrow$: on suppose que f admet une meilleure approximation affine $P(x) = \alpha(x-a)+\beta$.

Si on prend la fonction affine $Q(x) = f(a)$, c'est-à-dire qu'on choisit $\gamma = 0$ et $\zeta = f(a)$, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x)-\alpha(x-a)-\beta| \leq |f(x)-f(a)|$ pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$. En particulier en $x = a$ on obtient $|f(a)-\beta| \leq 0$ et donc nécessairement $\beta = f(a)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $Q_+(x) = (\alpha+\varepsilon)(x-a)+f(a)$, c'est-à-dire $\gamma = \alpha+\varepsilon$ et $\zeta = f(a)$, et $Q_-(x) = (\alpha-\varepsilon)(x-a)+f(a)$, c'est-à-dire $\gamma = \alpha-\varepsilon$ et $\zeta = f(a)$. Il existe alors $\delta_+, \delta_- > 0$ tels que

$$\forall x \in]a-\delta_+, a+\delta_+[\,,\ |f(x)-\alpha(x-a)-f(a)| \leq |f(x)-Q_+(x)|,$$

et

$$\forall x \in]a-\delta_-, a+\delta_-[\,,\ |f(x)-\alpha(x-a)-f(a)| \leq |f(x)-Q_-(x)|.$$

Soit $\delta = \min(\delta_-, \delta_+) > 0$. On a alors pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$, $x \neq a$,

$$\begin{aligned} & |f(x)-\alpha(x-a)-f(a)| \leq |f(x)-Q_+(x)| \\ \iff\ & |f(x)-\alpha(x-a)-f(a)| \leq |f(x)-(\alpha+\varepsilon)(x-a)-f(a)| \\ \iff\ & \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha-\varepsilon\right|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & |f(x)-\alpha(x-a)-f(a)| \leq |f(x)-Q_-(x)| \\ \iff\ & |f(x)-\alpha(x-a)-f(a)| \leq |f(x)-(\alpha-\varepsilon)(x-a)-f(a)| \\ \iff\ & \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha+\varepsilon\right|. \end{aligned}$$

On applique alors le lemme avec $A = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha$. On a donc, pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$, $x \neq a$, $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x-a| < \delta \implies \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\alpha\right| < \varepsilon.$$

C'est précisément la définition de $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha$. Conclusion f est bien dérivable en a. De plus, $f'(a) = \alpha$ et donc la meilleure approximation affine de f est bien $P(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$. □

CHAPITRE 6

FONCTIONS RÉCIPROQUES

6.1 Bijectivité, monotonie et continuité

On rappelle qu'une fonction $f : E \to F$ est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Si f est bijective, sa réciproque est la fonction $f^{-1} : F \to E$ telle que $x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$. Autrement dit, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f. Pour les fonctions réelles d'une variable réelle on peut facilement relier le caractère bijectif (ou injectif) d'une fonction à son sens de variation. On ne donnera pas toutes preuves dans cette section, le lecteur intéressé les trouvera dans la Section 6.3.

Lemme 6.1. *Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. Si f est strictement monotone alors elle est injective. En particulier elle est bijective de D dans $f(D)$.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 \neq x_2$. On peut toujours supposer que $x_1 < x_2$.

Si f est strictement croissante on a $f(x_1) < f(x_2)$, et si f est strictement décroissante on a $f(x_1) > f(x_2)$. Dans tous les cas $f(x_1) \neq f(x_2)$ donc f est injective.

Par ailleurs une fonction f est toujours surjective de D sur $f(D)$, voir Remarque 2.43, et donc f est bien bijective de D dans $f(D)$. □

Remarque 6.2. *De façon légèrement abusive, on note en général également f l'application de D dans $f(D)$ qui à x associe $f(x)$.*

Lemme 6.3. *Soient $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ et $f : D_1 \to D_2$ une application bijective. Si f est strictement croissante, resp. strictement décroissante, alors sa réciproque f^{-1} est strictement croissante, resp. strictement décroissante.*

Démonstration. On traite le cas où f est strictement croissante. Soient $y_1, y_2 \in D_2$ et notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Il faut montrer que $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$. On raisonne par contraposée, c'est-à-dire on montre que $x_1 \geq x_2 \Rightarrow y_1 \geq y_2$. Si $x_1 \geq x_2$ comme f est croissante on a $f(x_1) \geq f(x_2)$ c'est-à-dire $y_1 \geq y_2$. Conclusion : f^{-1} est bien strictement croissante. □

Dans les lemmes précédents il n'y a aucune hypothèse de continuité ou dérivabilité sur f. Dans le cas où f est une fonction continue sur un intervalle on peut alors montrer la réciproque du Lemme 6.1, autrement dit que la stricte monotonie est une condition nécessaire et suffisante à l'injectivité.

Proposition 6.4. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective (et donc bijective de I dans $f(I)$) si et seulement si elle est strictement monotone.*

Exercice 6.1. Trouver un contre-exemple à l'énoncé de la proposition si

a) On ne suppose pas que f est continue.

b) On ne suppose pas que I est un intervalle.

La proposition ci-dessus montre donc les liens étroit qu'il y a entre bijectivité et monotonie pour les fonctions continues. Afin de montrer qu'une fonction continue sur un intervalle I est bijective de I sur son image $f(I)$ il faut, et il suffit, de montrer qu'elle est strictement monotone. En particulier lorsque cette fonction est dérivable l'étude du caractère bijectif se ramène donc à l'étude du signe de la dérivée.

Si f est continue est bijective, de I dans $f(I)$, la fonction réciproque f^{-1} est donc définie sur $f(I)$. La question suivante est celle de la continuité de f^{-1}.

Théorème 6.5. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone, alors*

1. *$f(I)$ est un intervalle,*
2. *f est une bijection de I sur $f(I)$,*
3. *f^{-1} est continue sur $f(I)$.*

Corollaire 6.6. *Si f est continue et bijective sur un intervalle I, alors f^{-1} est continue.*

Exemple 6.7. *La fonction exponentielle est continue (pourquoi ?) sur $\mathbb{R}$ qui est bien un intervalle. La fonction* ln *qui est sa réciproque est donc bien continue sur* $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$.

☠ **Attention !** Dans le corollaire ci-dessus il est important que I soit un intervalle. Par exemple, la fonction f définie sur $I = [0,1] \cup]2,3]$ par $f(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = x - 1$ si $x \in]2,3]$ est bien continue et bijective de I dans $f(I) = [0,2]$. Sa réciproque f^{-1} est la fonction définie sur $[0,2]$ par $f^{-1}(x) = x$ si $x \in [0,1]$ et $f^{-1}(x) = x + 1$ si $x \in]1,2]$. En particulier, elle n'est pas continue en 1.

Application : les fonctions trigonométriques circulaires réciproques

La fonction arc sinus

Par définition, la fonction sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle est donc bijective de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1,1]$.

Définition 6.8. *La bijection réciproque de la fonction* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *est la fonction* $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, *appelée* arc sinus. *Elle vérifie*

$$\forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin(x)) = x.$$

Son graphe est donné à la figure 6.1.

Proposition 6.9. *La fonction arcsinus est continue sur* $[-1, 1]$.

Démonstration. C'est une application directe du Théorème 6.5. □

☠ **Attention !** Si $x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la quantité $\arcsin(\sin(x))$ est bien définie mais ne vaut pas x. Par exemple, $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0$.

Exercice 6.2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

La fonction arc cosinus
Par définition la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle est donc bijective de $[0, \pi]$ dans $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Définition 6.10. *La bijection réciproque de la fonction* $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *est la fonction* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$*, appelée* arc cosinus. *Elle vérifie*

$$\forall y \in [-1, 1],\ \cos(\arccos(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in [0, \pi],\ \arccos(\cos(x)) = x.$$

Son graphe est donné à la figure 6.1.

Proposition 6.11. *La fonction arccosinus est continue sur* $[-1, 1]$.

Démonstration. C'est à nouveau une application directe du Théorème 6.5. □

☠ **Attention !** Si $x \notin [0, \pi]$, la quantité $\arccos(\cos(x))$ est bien définie mais ne vaut pas x. Par exemple, $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0$.

Exercice 6.3. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

La fonction arc tangente
La fonction tangente est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle est donc bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\tan(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, +\infty[$.
Exercice 6.4. Montrer l'affirmation ci-dessus sans calculer la dérivée de tangente.

Définition 6.12. *La bijection réciproque de la fonction* $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *est la fonction* $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*, appelée* arc tangente. *Elle vérifie*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan(\tan(x)) = x.$$

Son graphe est donné à la figure 6.1.

Proposition 6.13. *La fonction arctangente est continue sur* $\mathbb{R}$.

☠ **Attention !** Si $x \in D_{\tan} \setminus]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (on rappelle que $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$) la quantité $\arctan(\tan(x))$ est bien définie mais ne vaut pas x. Par exemple $\arctan(\tan(\pi)) = \arctan(0) = 0$.

Exercice 6.5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$ où $\mathrm{sgn}(x)$ est le signe de x, i.e. $\mathrm{sgn}(x)$ vaut 1 si $x > 0$ et -1 si $x < 0$.

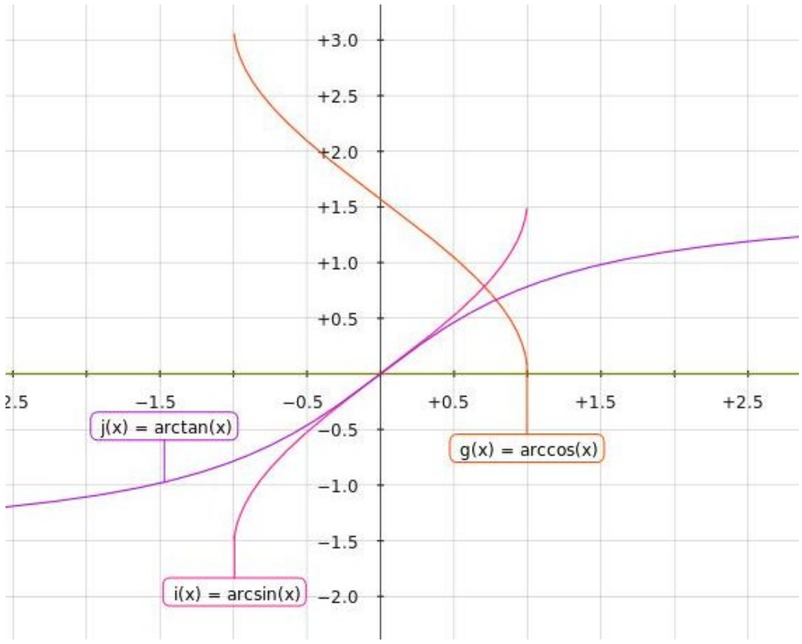


FIGURE 6.1 – Fonctions trigonométriques réciproques

Solution. On traite le cas $x > 0$. Dans ce cas $\arctan(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin(\arctan(x))$ et $\cos(\arctan(x))$ sont non nuls. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right)} = \frac{\cos(\arctan(x))}{\sin(\arctan(x))} \\
&= \frac{1}{\frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}} = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Comme $u = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x) \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\arctan(\tan(u)) = u$ et donc

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \iff \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

6.2 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 6.14. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ injective et continue sur I, dérivable en a et telle que $f'(a) \neq 0$. Alors la fonction réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$, est dérivable en $f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. Pour tout $y \in f(I) \setminus \{f(a)\}$, on peut écrire

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)}.$$

Comme f est dérivable en a on a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Mais d'après le Théorème 6.5 la fonction f^{-1} est continue sur $f(I)$ donc $\lim_{y\to f(a)} f^{-1}(y) = a$. La propriété sur la composition des limites, Proposition 3.19, nous donne ainsi $\lim_{y\to f(a)} \frac{f(f^{-1}(y))-f(a)}{f^{-1}(y)-a} = f'(a)$. Le résultat découle alors de la Proposition 3.15 puisque $f'(a) \neq 0$. □

Corollaire 6.15. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ injective et dérivable sur I. Si pour tout $x \in I$ on a $f'(x) \neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a pour tout $y \in f(I)$:*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

Démonstration. Soit $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. D'après le théorème précédent on a

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \iff (f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}.$$

□

Application : dérivée des fonctions puissances et trigonométriques réciproques

Le logarithme népérien

La fonction ln est la réciproque, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de la fonction exp. Par définition, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée elle même, i.e. $\exp'(x) = \exp(x)$. En particulier sa dérivée ne s'annule jamais. D'après le Théorème 6.14, la fonction ln est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est

$$\ln'(x) = (\exp^{-1})'(x) = \frac{1}{\exp'\left(\exp^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\exp\left(\exp^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{x}.$$

Remarque 6.16. *Par définition de la dérivée on en déduit la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} = \ln'(1) = 1.$$

En utilisant le Théorème 5.10 avec $g(x) = \ln(x)$, si une fonction f est strictement positive et dérivable, on obtient que la dérivée de $\ln(f(x))$ est $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

Exercice 6.6. Justifier que la fonction f définie sur $]-\infty, 0[$ par $f(x) = \ln(-x)$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Les fonctions puissances

On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$ la fonction "puissance a" est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{a\ln(x)}$ et notée x^a. En utilisant le Théorème 5.10 on en déduit qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est la fonction

$$f'(x) = \frac{a}{x} \times \mathrm{e}^{a\ln(x)} = a \times \frac{\mathrm{e}^{a\ln(x)}}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = a\mathrm{e}^{(a-1)\ln(x)} = ax^{a-1}.$$

Comparer le résultat obtenu avec celui de l'Exercice 5.4.

Exercice 6.7.

a) Montrer que la fonction $f(x) = 2^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée. Indication : quelle est la définition de 2^x.

b) Soit $a > 0$. Montrer que la fonction $g(x) = a^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée.

Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions trigonométriques réciproques ont été définies dans la Section 6.1. On énonce juste les résultats concernant leur dérivabilité. Ce sont des applications du Théorème 6.14.

Proposition 6.17. *1. La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. La fonction arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. La fonction arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 6.8. Démontrer la Proposition ci-dessus à l'aide du Théorème 6.14. Indication : utiliser le résultat des Exercices 6.2 et 6.3.

Fonctions trigonométriques hyperboliques et leur réciproque

Les fonctions *sinus hyperbolique*, notée sinh ou Sh, et *cosinus hyperbolique*, notée cosh ou Ch, sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right) \quad \text{et} \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

Leur graphe est donné à la figure 6.2.

Proposition 6.18. *Les fonctions* sinh *et* cosh *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$. *La fonction* sinh *est impaire, strictement croissante et bijective de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *La fonction* cosh *est paire, strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$ *et bijective de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[1,+\infty[$.

Exercice 6.9. Démontrer la proposition ci-dessus en utilisant les Théorèmes 5.23 et 6.5.

La fonction *tangente hyperbolique*, notée tanh ou Th, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

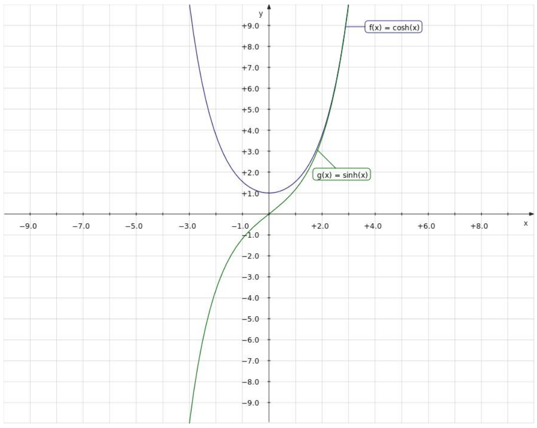


FIGURE 6.2 – Fonctions sinh et cosh

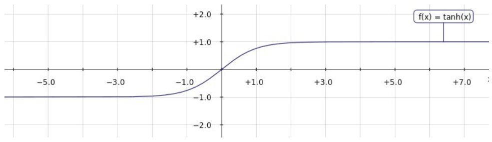


FIGURE 6.3 – Fonction tanh

Remarque 6.19. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cosh(x) \geq 1$, en particulier $\cosh(x) \neq 0$, donc la fonction $\tanh$ est bien définie. Son graphe est donnée à la figure 6.3*

Proposition 6.20. *La fonction $\tanh$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.*

Exercice 6.10. Démontrer la proposition ci-dessus.

Exercice 6.11. Montrer que

a) $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$.

b) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

c) $\tanh(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

Remarque 6.21. *L'ensemble des points (x,y) du plan tels que $x^2 - y^2 = 1$ est une hyperbole, d'où le nom de trigonométrie hyperbolique. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x = \cosh(t)$ et $y = \sinh(t)$ vérifient cette équation (de la même manière que $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$ vérifient $x^2 + y^2 = 1$ qui est l'équation d'un cercle, d'où le nom de trigonométrie circulaire).*

Exercice 6.12. Montrer que

a) $\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$.

b) $\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$.

c) $\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a) = \frac{1+\tanh^2(a)}{1-\tanh^2(a)}$.

d) $\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a) = \frac{2\tanh(a)}{1-\tanh^2(a)}$.

e) $\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$.

f) $\tanh(2a) = \frac{2\tanh(a)}{1+\tanh^2(a)}$.

g) $\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh(\frac{a+b}{2})\cosh(\frac{a-b}{2})$.

h) $\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh(\frac{a+b}{2})\sinh(\frac{a-b}{2})$

i) $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh(\frac{a+b}{2})\cosh(\frac{a-b}{2})$

j) $\sinh(a) - \sinh(b) = 2\sinh(\frac{a-b}{2})\cosh(\frac{a+b}{2})$.

Remarque 6.22. *Les formules obtenues dans l'exercice précédent sont appelées formules de trigonométrie hyperbolique. Elles ressemblent fortement à celles de trigonométrie circulaire, voir l'Annexe C.*

De la même manière que pour les fonctions trigonométriques circulaires, on introduit les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

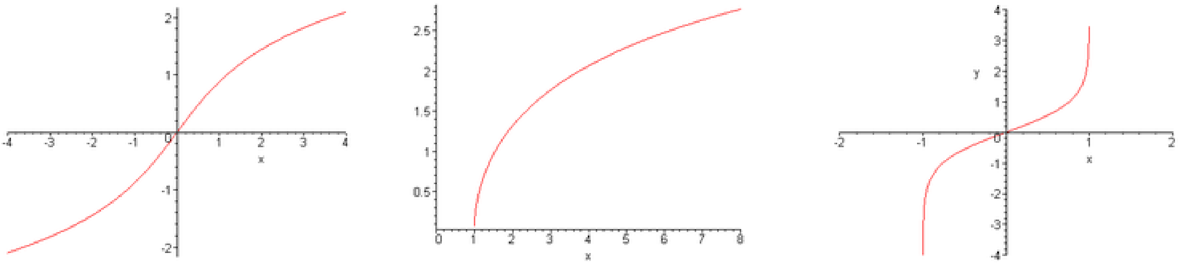


FIGURE 6.4 – Fonctions Argsinh, Argcosh et Argtanh

Définition 6.23. *1. La fonction réciproque de la fonction* sinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est la fonction* Argsinh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, notée aussi* ArgSh *et appelée* argument sinus hyperbolique*. Elle vérifie*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \sinh(\mathrm{Argsinh}(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argsinh}(\sinh(x)) = x.$$

2. La fonction réciproque de la fonction cosh : $\mathbb{R}_+ \to [1,+\infty[$ *est la fonction* Argcosh: $[1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$*, notée aussi* ArgCh *et appelée* argument cosinus hyperbolique*. Elle vérifie*

$$\forall y \in [1,+\infty[\,,\ \cosh(\mathrm{Argcosh}(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{Argcosh}(\cosh(x)) = x.$$

3. La fonction réciproque de la fonction tanh : $\mathbb{R} \to]-1,1[$ *est la fonction* Argtanh: $]-1,1[\to \mathbb{R}$*, notée aussi* ArgTh *et appelée* argument tangente hyperbolique*. Elle vérifie*

$$\forall y \in]-1,1[\,,\ \tanh(\mathrm{Argtanh}(y)) = y \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Argtanh}(\tanh(x)) = x.$$

Le graphe de ces fonctions est donné à la figure 6.4

Contrairement au cas des fonctions trigonométriques circulaires réciproques, on peut calculer explicitement les fonctions Argsinh, Argcosh et Argtanh à l'aide des fonctions "usuelles".

Exercice 6.13. Montrer que

a) Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\mathrm{Argcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

c) Pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argtanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Le calcul des dérivées des fonctions réciproques s'obtient soit directement à partir des expressions données dans l'exercice, soit en utilisant le Théorème 6.14 et l'Exercice 6.14 ci-dessous.

Proposition 6.24. *1. La fonction* Argcosh *est continue sur* $[1,+\infty[$*, dérivable sur* $]1,+\infty[$ *et* $\mathrm{Argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. La fonction Argsinh *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{Argsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. La fonction Argtanh *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\mathrm{Argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Exercice 6.14.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\cosh(\mathrm{Argsinh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a $\sinh(\mathrm{Argcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$.

6.3 Compléments

Cette section contient les preuves complètes des résultats de la Section 6.1.

Démonstration de la Proposition 6.4

$\Leftarrow$: c'est le Lemme 6.1.

$\Rightarrow$: On va montrer la contraposée, c'est-à-dire "si f n'est pas strictement monotone alors f n'est pas injective". Remarquons que "f n'est pas strictement monotone" est équivalent à "f n'est pas strictement croissante et f n'est pas strictement décroissante", ce qui s'écrit

$$\underbrace{\big(\exists (x_1,x_2)\in I^2,\ x_1<x_2 \text{ et } f(x_1)\geq f(x_2)\big)}_{(*)} \text{ et } \underbrace{\big(\exists (y_1,y_2)\in I^2,\ y_1<y_2 \text{ et } f(y_1)\leq f(y_2)\big)}_{(**)}.$$

On définit la fonction $g : [0,1]\to\mathbb{R}$ par, pour tout $t\in[0,1]$,

$$g(t) = f((1-t)x_1+ty_1) - f((1-t)x_2+ty_2).$$

Comme x_1, y_1 sont dans I et que I est un intervalle, on a bien $(1-t)x_1+ty_1\in I$ pour tout $t\in[0,1]$ et donc $f((1-t)x_1+ty_1)$ est bien définie. De même, $f((1-t)x_2+ty_2)$ est bien définie, ainsi la fonction g est bien définie.

La fonction f est continue donc g est continue. De plus, d'après $(*)$, $g(0) = f(x_1) - f(x_2)\geq 0$ et, d'après $(**)$, $g(1) = f(y_1)-f(y_2)\leq 0$. Donc d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0\in[0,1]$ tel que $g(t_0)=0$, ce qui équivaut à

$$f((1-t_0)x_1+t_0y_1) = f((1-t_0)x_2+t_0y_2).$$

Par ailleurs, $(1-t_0)x_1+t_0y_1\neq(1-t_0)x_2+t_0y_2$ (car $x_1<x_2$, $y_1<y_2$, $(1-t_0)\geq 0$ et $t_0\geq 0$), donc f n'est pas injective (on a trouvé deux valeurs $x\neq x'$ tels que $f(x)=f(x')$). □

La suite de cette section a pour but de montrer le Théorème 6.5.

Proposition 6.25. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle si et seulement si f est continue.*

Dans la preuve nous aurons besoin du résultat intermédiaire suivant.

Lemme 6.26. *Soit $f :]a,b[\to\mathbb{R}$ croissante. Alors f admet en tout point x_0 de $]a,b[$ une limite à gauche et une limite à droite. De plus, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\leq f(x_0)\leq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, et pour tout $x\in I$ si $x<x_0$ alors $f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ et si $x>x_0$ alors $f(x)\geq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.*

Démonstration. Bien que le résultat soit assez intuitif (faites un dessin !) sa preuve nécessite la notion de borne supérieure/inférieure d'un ensemble (voir la Section 2.4). On montre les résultats concernant les limites à gauche, ceux concernant les limites à droite se montrent de façon similaire.

L'ensemble $f\big(]a,x_0[\big)$ est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ et, comme f est croissante, il est majoré par $f(x_0)$. Donc il admet une borne supérieure $l\leq f(x_0)$. On va montrer que $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existe et vaut l.

Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la borne supérieure, $l-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $f\big(]a,x_0[\big)$ dans $\mathbb{R}$, donc il existe $y\in f\big(]a,x_0[\big)$ tel que $l-\varepsilon<y\leq l$. Comme $y\in f\big(]a,x_0[\big)$ il existe

$\xi \in]a, x_0[$ tel que $y = f(\xi)$. On a donc $l - \varepsilon < f(\xi) \leq l$. Soit $x \in]a, x_0[$ tel que $x \geq \xi$. Comme f est croissante $f(x) \geq f(\xi) > l - \varepsilon$. Par ailleurs, par définition de l, on a $f(x) \leq l$. En notant $\delta = x_0 - \xi > 0$ on a donc, pour tout $x \in]a, x_0[$, si $0 < x_0 - x < \delta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$, i.e. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

Finalement soit $x < x_0$. Comme f est croissante on a $f(y) \geq f(x)$ pour tout $y \in [x, x_0[$ et donc $l = \lim_{y \to x_0^-} f(y) \geq f(x)$. □

Remarque 6.27. *On montrerait de la même façon que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est croissante alors f admet une limite (à droite) en a et une limite (à gauche) en b. De plus $f(a) \leq \lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x) \leq f(b)$.*

Démonstration de la Proposition 6.25. $\Leftarrow$: c'est le théorème des valeurs intermédiaires, plus précisément le Corollaire 4.20 (ici on n'a pas besoin de l'hypothèse f monotone).

$\Rightarrow$: On suppose que f est croissante, la preuve est similaire dans le cas décroissant. Soit $x_0 \in I$ tel que x_0 ne soit pas le plus grand élément de I (si $I = [a, b]$ cela signifie $x_0 \neq b$). Comme f est croissante, d'après le Lemme 6.26 et la Remarque 6.27, elle admet en x_0 une limite à droite $l \geq f(x_0)$, i.e. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \geq f(x_0)$.

Supposons que $l > f(x_0)$. Alors, pour tout $x \in I$, soit $x > x_0$ et on a, d'après le Lemme 6.26, $f(x) \geq l$, soit $x \leq x_0$ et alors $f(x) \leq f(x_0)$ puisque f est croissante. En particulier, f ne prend aucune valeur entre $f(x_0)$ et l, i.e. $f(I) \cap]f(x_0), l[= \emptyset$.

Par ailleurs comme x_0 n'est pas le plus grand élément de I, il existe $x_1 \in I$ tel que $x_0 < x_1$ et on a $f(x_0) \leq l \leq f(x_1)$. Comme $f(I)$ est un intervalle, on a $]f(x_0), l[\subset [f(x_0), f(x_1)] \subset f(I)$ ce qui contredit $f(I) \cap]f(x_0), l[= \emptyset$.

Ainsi $f(x_0) = l$ et f est continue à droite en x_0. On montre de la même façon que f est continue à gauche en tout point $x_0 \in I$ qui n'est pas le plus petit élément de I. Finalement f est bien continue en tout point de I. □

Démonstration. 1. et 2. ont déjà été prouvés (Corollaire 4.20 et Lemme 6.1 respectivement). Il reste à montrer 3. Par définition f^{-1} est une bijection de $f(I)$ dans I et d'après le Lemme 6.3 elle est strictement monotone de l'intervalle $f(I)$ sur l'intervalle I, donc elle est continue d'après la Proposition 6.25. □

CHAPITRE 7

DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR - DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

7.1 Dérivées d'ordre supérieur et formules de Taylor

7.1.1 Dérivées successives

Définition 7.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I et si f' est aussi dérivable sur I, alors on dit que f est deux fois dérivable sur I et on note f'' la dérivée de f'. La fonction f'' est appelée la* dérivée seconde *de f.*

Par récurrence on définit, si elle existe, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f^{(n)}$, appelée la dérivée n-ème de f, ou dérivée d'ordre n de f, par $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. On dit alors que f est n fois dérivable sur I.

On dit que f est infiniment dérivable *sur I si f est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 7.2. *La fonction f est n fois dérivable si et seulement si sa dérivée f' est $n-1$ fois dérivable et on a $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.*

Le théorème suivant est l'équivalent du Théorème 5.9 pour les dérivées d'ordre n.

Théorème 7.3. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors,*

1. *$f + g$ est n fois dérivable sur I et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.*
2. *λf est n fois dérivable sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.*
3. *fg est n fois dérivable sur I et $(fg)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, (Formule de Leibniz).*
4. *si $g \neq 0$ sur I, $\dfrac{1}{g}$ est n fois dérivable sur I.*
5. *si $g \neq 0$ sur I, $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable sur I.*

Démonstration. A part la formule du 3., les résultats découlent directement de la définition des dérivées d'ordre n et du Théorème 5.9.

On montre 3. par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Soit P_n la proposition "si f et g sont n fois dérivables alors fg est n fois dérivable et $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$".

Initialisation : Pour $n = 0$ il n'y a rien à faire et pour $n = 1$ c'est le 3. du Théorème 5.9.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie et montrons P_{n+1}. On suppose donc que f et g sont $n+1$ fois dérivables. En particulier elles sont n fois dérivables donc fg est n fois dérivable et on a $(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Puisque f et g sont $n+1$ fois dérivables les fonctions $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$ donc, d'après le Théorème 5.9, la fonction $(fg)^{(n)}$ aussi ce qui prouve que fg est bien $n+1$ fois dérivable. De plus,

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \qquad \text{(on a posé } l = k+1 \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{dans la 1ère somme)} \\
&= \sum_{l=0}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \qquad \left(\binom{n}{-1} = \binom{n}{n+1} = 0\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}, \quad \text{(règle de Pascal).}
\end{aligned}
$$

□

Remarque 7.4. *Le calcul effectué ci-dessus est similaire à celui effectué dans la preuve de la formule du binôme de Newton (voir Section 1.5, page 16).*

Exercice 7.1. Montrer que $f(x) = x^2|x|$ est deux fois dérivable sur $]-1, 1[$.

Théorème 7.5. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est n fois dérivable sur I et g est n fois dérivable sur J alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.*

Démonstration. On montrer le résultat par récurrence sur n.
Initialisation : Pour $n = 1$ c'est le Théorème 5.10.
Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppse que f et g sont $n+1$ fois dérivables. En particulier elles sont dérivables donc $g \circ f$ aussi et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. Puisque f est $n+1$ fois dérivable la fonction f' est n fois dérivable. De même g' est n fois dérivable. En appliquant l'hypothèse

de récurrence aux fonctions g' et f (qui est n fois dérivable puisqu'elle l'est $n+1$ fois) et le 3. du Théorème 7.3, on en déduit que la fonction $(g \circ f)'$ est n fois dérivable et donc, d'après la Proposition 7.2, la fonction $g \circ f$ est bien $n+1$ fois dérivable. $\square$

7.1.2 Classe d'une fonction

Définition 7.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est de classe C^n sur I, $n \in \mathbb{N}$, si f est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n-ème $f^{(n)}$ est continue sur I.*
2. *On dit que f est de classe C^∞ si f est infiniment dérivable.*

Remarque 7.7. *Dire que f est de classe C^0 signifie que f est continue. Si f est n fois dérivable sur I on dit parfois que f est de classe D^n.*

Exercice 7.2. Montrer que f est de classe C^∞ si et seulement si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La propriété suivante est l'équivalent de la Proposition 7.2.

Proposition 7.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est de classe C^n si et seulement si elle est dérivable et sa dérivée f' est de classe C^{n-1}.*

Exemple 7.9. *La plupart des fonctions usuelles, comme les polynômes,* ln, exp, cos, sin, tan, cosh, sinh, tanh, *sont C^∞ sur leur ensemble de définition.*

Le théorème suivant est une conséquence directe des Théorèmes 4.10 et 7.3.

Théorème 7.10. *Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^n sur I. Alors,*

1. *$f + g$ est de classe C^n sur I.*
2. *λf est de classe C^n sur I.*
3. *fg est de classe C^n sur I.*
4. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{1}{g}$ est de classe C^n sur I.*
5. *si $g \neq 0$ sur I, $\frac{f}{g}$ est de classe C^n sur I.*

Finalement le théorème qui suit se montre de la même façon que le Théorème 7.5 en utilisant la Proposition 7.8.

Théorème 7.11. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est de classe C^n sur I et g est de classe C^n sur J alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.*

7.1.3 Formules de Taylor

Le théorème qui suit est une généralisation du Théorème des accroissements finis.

Théorème 7.12 (Formule de Taylor–Lagrange à l'ordre $n+1$)**.** *Soient $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est de classe C^n sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable dans $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Remarque 7.13. *Si $n = 0$ c'est précisément le Théorème des accroissements finis.*

Remarque 7.14. *L'hypothèse sur la fonction f signifie que la fonction $f^{(n)}$ existe, est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

Remarque 7.15. *Le résultat est encore vrai si $a > b$.*

Démonstration. L'idée est d'appliquer le Théorème de Rolle à une fonction bien choisie.

Etant donné $A \in \mathbb{R}$, que l'on fixera par la suite, soit φ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A(b-x)^{n+1}.$$

Quelque soit A on a $\varphi(b) = 0$. On choisit donc, pour pouvoir appliquer le Théorème de Rolle, A tel que $\varphi(a) = 0$. Un tel choix est toujours possible, il suffit de prendre

$$A = \frac{f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n}{(b-a)^{n+1}}.$$

L'hypohèse sur f entraine que la fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Puisque $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, on peut appliquer le Théorème de Rolle : il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or pour tout $x \in]a, b[$ on a

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times \left(f^{k+1}(x) \times (b-x)^k + f^{(k)}(x) \times (-1) \times k(b-x)^{k-1} \right) + A(n+1)(b-x)^n \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times f^{k+1}(x) \times (b-x)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \times f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1} + A(n+1)(b-x)^n \\ &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times f^{k+1}(x) \times (b-x)^k + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \times f^{(l+1)}(x)(b-x)^l + A(n+1)(b-x)^n \\ &= -\frac{f^{n+1}(x)}{n!}(b-x)^n + A(n+1)(b-x)^n. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\varphi'(c) = (b-c)^n \times \left((n+1)A - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

puisque $b-c \neq 0$ ($c \in]a,b[$). On conclut en remplaçant A par $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ dans la définition de φ et en disant que $\varphi(a)=0$. $\square$

Théorème 7.16. *[Formule de Taylor-Young à l'ordre n] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I. Pour tout $a \in I$, il existe une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et pour tout $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

Remarque 7.17. *La formule de Taylor-Young peut aussi s'écrire, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$,*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + h^n \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

Remarque 7.18. *Pour $n=1$, la relation $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ se réécrit, pour $x \neq a$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \varepsilon(x)$. La condition $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ est donc équivalente à $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, ce qui est exactement la définition de f est dérivable en $f'(a)$.*

Remarque 7.19. *Si $a \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont telles qu'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant*

i) pour tout $x \in I$, $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$,

ii) $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = \varepsilon(a) = 0$,

on dit que f est négligeable *devant g au voisinage de a et on note $f \underset{x\sim a}{=} o(g)$, appelée notation de Landau. La formule de Taylor-Young s'écrit alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Démonstration. On donne la preuve dans le cas où f est non seulement n fois dérivable mais de classe C^n.

Soit $a \in I$. Puisque f est de classe C^n sur I, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ elle est de classe C^{n-1} sur $[a,x]$ (ou $[x,a]$ si $x < a$) et n fois dérivable sur $]a,x[$ (ou $]x,a[$). On peut donc appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$. Il existe $c(x) \in]a,x[$ (ou $]x,a[$) tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c(x))}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \times \frac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a)}{n!}. \end{aligned}$$

On définit alors la fonction ε par $\varepsilon(x) = \dfrac{f^{(n)}(c(x)) - f^{(n)}(a)}{n!}$ si $x \neq a$ et $\varepsilon(a) = 0$. Il reste juste à vérifier que $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

On sait que $c(x)$ est compris entre a et x donc d'après le théorème des gendarmes (Théorème 3.24) $\lim_{x\to a} c(x) = a$. Le résultat découle donc de la continuité de la fonction $f^{(n)}$ en a et de la Proposition 3.19. $\square$

7.2 Développement limité d'une fonction

Définition 7.20. *Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n, noté DL_n, en a s'il existe une fonction polynomiale P_n de degré au plus n et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telles que*

$$f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n\varepsilon(x),\ \forall x \in I \quad et \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Autrement dit, s'il existe $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, tels que $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \qquad (7.1)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x-a)^k + (x-a)^n\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Le terme $P_n(x-a)$ s'appelle la partie principale du développement limité.

Exemple 7.21. *Soit $f(x) = 1 + 3x - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $a = 0$.*

- *Si $n = 0$ on peut écrire $f(x) = 1 + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = 3x - x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$. Donc f admet un DL_0 en 0 et $P_0(x) = 1$.*
- *Si $n = 1$ on peut écrire $f(x) = 1 + 3x + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = -x \xrightarrow{x\to 0} 0$. Donc f admet un DL_1 en 0 et $P_1(x) = 1 + 3x$.*
- *Si $n \geq 2$ on peut écrire $f(x) = 1 + 3x - x^2 + x^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0$. Donc f admet un DL_n en 0 et $P_n(x) = 1 + 3x - x^2$.*

Exemple 7.22. *On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$ on a*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f définie, par exemple, sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ admet un DL_n en 0 et que celui-ci est donné par

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow{x\to 0} 0$

☠ **Attention !** Un développement limité ne donne des informations qu'au voisinage du point a : la seule chose que l'on sait de la fonction ε c'est que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. On fera en particulier

attention à ne jamais oublier le terme de reste ! Par exemple, peu importe la valeur de l'entier n et sauf si $x = 0$
$$\frac{1}{1-x} \neq 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$
On fera également attention au fait que la forme du développement limité dépend aussi du point a considéré. Si on reprend la fonction $f(x) = 1 + 3x - x^2$ de l'Exemple 7.21, on peut écrire
$$f(x) = 3 + (x-1) - (x-1)^2 = 3 + (x-1) + (x-1)\varepsilon(x)$$
où $\varepsilon(x) = -(x-1)$ vérifie $\lim_{x\to 1} \varepsilon(x) = 0$. La fonction f admet donc aussi un DL_1 en 1 dont la partie principale est $3 + (x-1)$, alors que la partie principale du DL_1 en 0 est $1 + 3x$.

Remarque 7.23. *En général on se ramène au cas où $a = 0$. Si $I =]\alpha, \beta[$ alors la fonction f admet un DL_n en a si et seulement si la fonction g définie sur l'intervalle $J =]\alpha - a, \beta - a[$ par $g(x) = f(x+a)$ admet un DL_n en 0. De plus f vérifie (7.1) si et seulement si*
$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + x^n \tilde{\varepsilon}(x)$$
où $\tilde{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x+a)$ vérifie $\lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$. On peut ainsi obtenir les coefficients du DL_n de f à partir de celui de g.

L'idée de (7.1) est de "développer" la fonction f, qui peut a priori être compliquée, près du point a en une somme de termes simples (ce sont des puissances de x) de "plus en plus petits" et avec un reste $(x-a)^n\varepsilon(x)$ qui est encore plus petit. La notion de "plus petit" est à comprendre de la façon suivante, un peu comme pour les croissances comparées :

- si $k < l$ alors $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)^l}{(x-a)^k} = 0$, plus la puissance augmente plus les termes sont "petits" au voisinage du point a.
- $\lim_{x\to a} \frac{(x-a)^n\varepsilon(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, au voisinage de a le reste est "encore plus petit" que "le plus petit terme" de la partie polynomiale.

On verra une première application des développements limités au calcul de limites dans la Section 7.5.

Proposition 7.24. *Si f admet un DL_n en a de partie principale $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k$ alors pour tout $m \leq n$ la fonction f admet un DL_m en a de partie principale $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k (x-a)^k$. Autrement dit, lorsque l'on abaisse l'ordre d'un DL on obtient la nouvelle partie principale en tronquant les termes de degré supérieur à l'ordre souhaité.*

Démonstration. Si f admet un DL_n en a et $m \leq n$, il suffit d'écrire
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^m \left(\sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k (x-a)^{k-m} + (x-a)^{n-m}\varepsilon(x) \right). \end{aligned}$$

en constatant que $\lim_{x\to 0} \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k (x-a)^{k-m} + (x-a)^{n-m}\varepsilon(x) = 0$. □

Proposition 7.25. *Si f admet un DL_n en a il y a unicité de la partie principale. Autrement dit si*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_2(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ alors $\alpha_k = \beta_k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ (et donc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$).

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe k tel que $\alpha_k \neq \beta_k$, soit k_0 le plus petit entier k tel que $\alpha_k \neq \beta_k$. On écrit alors, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon_2(x) \\
\iff\ & \sum_{k=k_0}^{n} (\alpha_k - \beta_k)(x-a)^k = (x-a)^n \left(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)\right) \\
\iff\ & \sum_{k=k_0}^{n} (\alpha_k - \beta_k)(x-a)^{k-k_0} = (x-a)^{n-k_0} \left(\varepsilon_2(x) - \varepsilon_1(x)\right).
\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers a le membre de gauche tend vers $\alpha_{k_0} - \beta_{k_0} \neq 0$ tandis que celui de droite tend vers 0. On a bien ainsi la contradiction souhaitée. □

Corollaire 7.26. *Supposons que $0 \in I$ et que f admette un DL_n* **en 0**. *Si f est paire, resp. impaire, la partie principale du DL est paire, resp. impaire.*

Démonstration. On traite le cas où f est paire. On a, pour tout $x \in I$, $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$ avec P_n fonction polynomiale de degré au plus n et $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. On a donc, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(-x) = P_n(-x) + (-x)^n \varepsilon(-x) = P_n(-x) + x^n \times (-1)^n \varepsilon(-x).$$

La fonction $P_n(-x)$ est une fonction polynomiale de degré au plus n et la fonction $\tilde{\varepsilon}(x) = (-1)^n \varepsilon(-x)$ vérifie $\lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$. L'unicité de la partie principale assure que $P_n(x) = P_n(-x)$.

7.3 Formule de Taylor et DL usuels

La question naturelle qui suit est "comment savoir si une fonction f admet un DL_n" et surtout "comment le calculer". Le Théorème 7.16 permet d'obtenir immédiatement le résultat suivant.

Proposition 7.27. *Soient $n \geq 1$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable et $a \in I$. Alors f admet un DL_n en a dont la partie principale est*

$$P_n(x-a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Remarque 7.28. *Si f admet un DL_n en a, nécessairement f est continue en a et on a $\alpha_0 = f(a)$. En effet, en prenant $x = a$ dans (7.1) on a immédiatement $f(a) = \alpha_0$, et de plus le membre de droite tend vers α_0 quand x tend vers a.*

Réciproquement, si f est continue en a elle admet un DL_0 en a. Il suffit d'écrire $f(x) = f(a) + (\underbrace{f(x) - f(a)}_{\varepsilon(x)})$. Admettre un DL_0 en a est donc équivalent à être continue en a.

Pour $n = 1$ la proposition ci-dessus assure que si f est dérivable en a alors f admet un DL_1 en a et qu'on a alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x).$$

On a approché f par la fonction affine $f(a) + f'(a)(x - a)$, cf Section 5.3.

Réciproquement, supposons que f admette un DL_1 en a : $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. On sait déjà d'après la remarque précédente que $\alpha_0 = f(a)$. On peut donc écrire

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha_1 + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \to a} \alpha_1.$$

Autrement dit, f est dérivable en a avec $f'(a) = \alpha_1$. En conclusion, f adment un DL_1 en a si et seulement si elle est dérivable en a.

Ce résultat ne se généralise par contre pas aux ordres supérieurs : si $n \geq 2$ le fait d'admettre un DL_n en a n'assure pas que la fonction f soit n fois dérivable en a.

Exemple 7.29. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f admet un DL_2 en 0 de partie principale nulle. En effet la fonction $\varepsilon(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 0$ vérifie bien $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ (c'est une conséquence du Théorème des gendarmes), et on a $f(x) = x^2\varepsilon(x)$ pour tout x.*

La fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Ça découle de la discussion ci-dessus. Et pour $x \neq 0$ on a $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. On peut alors vérifier que f n'est pas deux fois dérivable en 0. En effet, si $x \neq 0$,

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0 quand x tend vers 0 tandis que le second n'a pas de limite.

A l'aide de la formule de Taylor on obtient ainsi les développements limités, dits usuels, suivants qu'il est bon de connaitre (ou de savoir retrouver rapidement). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a les DL_n suivants en 0 :

- $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x).$
- $\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x).$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).$

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$.
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$.

Remarque 7.30. *1) Si P_n note la partie principale du DL de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et Q_n celle de $g(x) = \frac{1}{1+x}$, on peut remarquer que $Q_n(x) = P_n(-x)$. C'est en fait une conséquence directe du fait que $g(x) = f(-x)$ par un argument similaire à celui utilisé au Corollaire 7.26.*

2) Comme vu au Corollaire 7.26, la fonction cosinus, resp. sinus, est paire, resp. impaire, et son DL en 0 ne contient donc que des termes dont la puissance est paire, resp. impaire.

7.4 Opérations algébriques sur les DL

Dans la pratique on ne revient pas toujours à la formule de Taylor pour calculer un développement limité, tout comme on ne revient pas toujours à la limite du taux d'accroissement pour calculer une dérivée. Pour cette dernière il y a quelques dérivées usuelles que vous connaissez (fonctions polynomiales, exponentielle, sinus, cosinus, etc.) et ensuite on utilise les propriétés algébriques sur les dérivées : somme, produit, composée, etc. Il en va de même pour les DL. On va donner ici quelques règles de calcul que l'on pourra combiner avec les DL usuels vus dans la section précédente.

Afin de simplifier les notations on se placera dans le cas particulier $a = 0$. On a vu à la Remarque 7.23 qu'il était toujours possible de s'y ramener.

Somme et produit

Proposition 7.31. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f et g admettent des DL_n en 0 de parties principales respectives $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ alors*

1. *Pour tous réels λ, μ la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en 0 de partie principale $\lambda P_n(x) + \mu Q_n(x)$.*
2. *La fonction fg admet un DL_n en 0. Sa partie principale R_n est obtenue en effectuant le produit $P_n(x)Q_n(x)$ et en ne gardant que les termes de degré au plus n.*

Remarque 7.32 (où on retrouve un peu d'algèbre linéaire dans le cours d'analyse)**.** *La première propriété montre que l'ensemble E des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ admettant un DL_n en 0 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$, et que l'application de E dans l'ensemble des fonctions polynomiales qui à $f \in E$ associe la partie principale de son développement limité est une application linéaire.*

Remarque 7.33. *La partie principale R_n du produit fg correspond au reste de la division euclidienne du produit P_nQ_n par la fonction polynomiale x^{n+1} (voir le Chapitre sur les polynômes dans le cours "Polynômes et Suites" du 2nd semestre).*

Démonstration. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$ et

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x), \qquad g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x).$$

1. Il suffit d'écrire

$$(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \left(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)\right),$$

et de noter que $P_n + Q_n$ est une fonction polynomiale de degré au plus n et que la fonction $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ vérifie bien $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$.

2. Le produit $P_n Q_n$ est une fonction polynôme de degré au plus $2n$, elle peut donc s'écrire $P_n(x)Q_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k x^k$. La fonction R_n est donc définie par $R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ et on a

$$P_n(x)Q_n(x) = R_n(x) + \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k x^k = R_n(x) + x^n \varepsilon_3(x) \tag{7.2}$$

où la fonction $\varepsilon_3(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} \alpha_k x^{k-n}$ vérifie bien $\lim_{x\to 0} \varepsilon_3(x) = 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= (P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)) \times (Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)) \\
&= P_n(x)Q_n(x) + x^n \Big(P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\Big) \\
&= R_n(x) + x^n \underbrace{\left(\varepsilon_3(x) + P_n(x)\varepsilon_2(x) + Q_n(x)\varepsilon_1(x) + x^n \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right)}_{=\varepsilon_4(x)}
\end{aligned}$$

et on a bien $\lim_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = 0$. □

Remarque 7.34. *L'idée de (7.2), et donc du DL d'un produit, est que plus les puissances sont grandes plus les termes sont petits. Ainsi, tous les termes dont la puissance est strictement plus grande que n sont négligeables par rapport au dernier terme de la partie principale (qui est au plus $\alpha_n x^n$) et sont donc "mis dans le terme de reste". Dans la pratique, on ne cherchera donc pas à calculer précisément les coefficients des termes de degré supérieur à n.*

Exemple 7.35. *On va déterminer des DL_3 en 0 des fonctions $f(x) = \cos(x) + e^x$ et $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-x}$. Ces deux fonctions sont bien trois fois (et même infiniment) dérivables au voisinage de 0 donc elles admettent bien un DL_3.*

1. En utilisant les DL_3 en 0 de $\cos(x)$ et e^x on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x)\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)\right) \\
&= 2 + x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

2. De même, les DL_3 en 0 de $\cos(x)$ et $\dfrac{1}{1-x}$ donnent

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_1(x)\right)\times\left(1+x+x^2+x^3+x^3\varepsilon_2(x)\right) \\ &= 1+x+x^2+x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x) \\ &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Comme mentioné ci-dessus on n'a pas cherché à calculer les termes dont le degré est supérieur ou égal à 4 (puisqu'on cherche un DL_3), tous ces termes sont "inclus" dans le terme de reste.

Composition

Proposition 7.36. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, f admette un DL_n en 0, de partie principale $P_n(x)$, et g admette un DL_n en $a = f(0)$, de partie prinicpale $Q_n(x-a)$. Alors $g \circ f$ admet un DL_n en 0. Sa partie principale R_n est obtenue en effectuant la composée $Q_n(P_n(x) - a)$ et en ne gardant que les termes de degré au plus n.*

Exemple 7.37. *On cherche un DL_4 en 0 de la fonction $h(x) = \cos(\ln(1 + x))$. Si $f(x) = \ln(1 + x)$ et $g(x) = \cos(x)$ on a $h = g \circ f$. La fonction f admet un DL_4 en 0 et la fonction g admet un DL_4 en $f(0) = 0$. Par ailleurs on a*

$$f(x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_2(x).$$

On a donc

$$\begin{aligned} h(x) &= 1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)^4+x^4\varepsilon_3(x) \\ &= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{2x^4}{3}\right)+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon_4(x) \\ &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5x^4}{12}+x^4\varepsilon_4(x), \end{aligned}$$

où chacune des fonctions ε_k apparaissant dans le calcul vérifie $\lim_{x\to 0}\varepsilon_k(x) = 0$.

Démonstration. On a

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x-a) + (x-a)^n\varepsilon_2(x)$$

avec $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k$. D'où

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= Q_n\Big(P_n(x)-a+x^n\varepsilon_1(x)\Big)+\Big(P_n(x)-a+x^n\varepsilon_1(x)\Big)^n\varepsilon_2\Big(P_n(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\beta_k\Big(P_n(x)-a+x^n\varepsilon_1(x)\Big)^k+\Big(P_n(x)-a+x^n\varepsilon_1(x)\Big)^n\varepsilon_2\Big(P_n(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big). \end{aligned}$$

Pour tout indice k la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Big(P_n(x) - a + x^n\varepsilon_1(x)\Big)^k &= \Big(P_n(x)-a\Big)^k + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}(x^n\varepsilon_1(x))^j\Big(P_n(x)-a\Big)^{k-j}\\ &= (P_n(x)-a)^k + x^n\tilde{\varepsilon}_k(x),\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\tilde{\varepsilon}_k(x) = 0$ pour tout k. On a donc

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\beta_k(P_n(x)-a)^k + x^n\sum_{k=0}^{n}\beta_k\tilde{\varepsilon}_k(x) + \Big((P_n(x)-a)^n + x^n\tilde{\varepsilon}_n(x)\Big)\varepsilon_2(P_n(x)+x^n\varepsilon_1(x))\\ &= Q_n\Big(P_n(x)-a\Big) + x^n\sum_{k=0}^{n}\beta_k\tilde{\varepsilon}_k(x) + \Big((P_n(x)-a)^n + x^n\tilde{\varepsilon}_n(x)\Big)\varepsilon_2(P_n(x)+x^n\varepsilon_1(x)).\end{aligned}$$

Comme dans (7.2) on peut écrire $Q_n\Big(P_n(x)-a\Big) = R_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Par ailleurs, $a = f(0) = P_n(0)$ (voir la Remarque 7.28) donc $P_n(x) - a$ est un polynôme qui s'annule en 0. Il est donc de la forme $P_n(x) - a = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j x^j$ et, en utilisant la formule du binôme de Newton comme ci-dessus, on a alors

$$(P_n(x)-a)^n = \alpha_1^n x^n + x^n\tilde{\varepsilon}(x).$$

Au final on a

$$g\circ f(x) = R_n(x) + x^n\left(\varepsilon(x) + \sum_{k=0}^{n}\beta_k\tilde{\varepsilon}_k(x) + \Big(\alpha_1^n + \tilde{\varepsilon}(x) + \tilde{\varepsilon}_n(x)\Big)\times\varepsilon_2\Big(P_n(x)+x^n\varepsilon_1(x)\Big)\right)$$

et le terme en facteur de x^n tend vers 0 lorsque x tend vers 0 (pour le dernier terme on utilise que $\lim\limits_{x\to 0}P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) = P_n(0) = a$ et $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon_2(x) = 0$). □

Quotient

Proposition 7.38. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $g(0) \neq 0$ et si f et g admettent des DL_n en 0 alors $\dfrac{f}{g}$ est bien définie au voisinage de 0 et admet un DL_n en 0.*

Démonstration. Comme g admet un DL_n en 0, g est continue en 0. Et puisque $g(0) \neq 0$ cela assure que g ne s'annule pas au voisinage de 0 et donc que la fonction $\dfrac{f}{g}$ y est bien définie.

On écrit ensuite $g(x) = g(0) + g(x) - g(0) = g(0)\left(1 + \dfrac{g(x)-g(0)}{g(0)}\right)$. La fonction $h(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{g(0)}$ admet un DL_n en 0 et vérifie $h(0) = 0$. Par composition de h avec la fonction $\dfrac{1}{1+x}$, et produit avec f, on en déduit que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{g(0)} \times f(x) \times \dfrac{1}{1+h(x)}$ admet un DL_n en 0. □

Exemple 7.39. *On souhaite donner un DL_5 en 0 de* $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. *En utilisant les DL_5 de* $\sin(x)$, $\cos(x)$ *et* $\dfrac{1}{1+x}$ *on a*

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_1(x)\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon_2(x)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_1(x)\right) \times \left(1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)^2 + x^5\varepsilon_3(x)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_1(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5\varepsilon_4(x)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_1(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^5\varepsilon_4(x)\right) \\
&= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_5(x) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\varepsilon_5(x).
\end{aligned}$$

A la deuxième ligne on a arrêté le DL de $\frac{1}{1+x}$ *à l'ordre* 2. *En effet, tous les termes provenant du DL de* $\cos(x)$ *sont au moins en* x^2, *et élevés à une puissance supérieure ou égale à* 3 *ils donneraient tous des termes d'ordre strictement plus grand que* 5. *Tous ces termes sont donc inclus dans le terme de reste.*

Remarque 7.40. *Il existe une autre méthode pour le calcul du DL d'un quotient. On obtient ce dernier à partir de la* division selon les puissances croissantes *de la partie principale de f par la partie principale de g.*

"Primitivation"

Proposition 7.41. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $n \in \mathbb{N}$. Si f' admet un DL_n en 0 de partie principale $P_n(x)$ alors f admet un DL_{n+1} en 0 et sa partie principale est* $Q_n(x) = f(0) + \int_0^x P_n(x)\,\mathrm{d}x$. *C'est-à-dire, si* $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ *alors*

$$Q_n(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} x^{k+1} = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_{k-1}}{k} x^k.$$

Remarque 7.42. *On peut retrouver facilement le DL de* $f(x) = \ln(1+x)$ *à partir de celui de* $\dfrac{1}{1+x}$ *en utilisant* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f(0) = 0$ *et la proposition ci-dessus.*

Exemple 7.43. *On voudrait un DL_5 en 0 de la fonction* $\arctan(x)$. *Celle-ci est dérivable et* $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. *Pour obtenir un DL_5 de* $\arctan(x)$ *on commence par écrire un DL_4 de* $\dfrac{1}{1+x^2}$, *obtenu à partir de celui de* $\dfrac{1}{1+x}$ *:*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

Par ailleurs $\arctan(0) = 0$ *et on en déduit donc le* DL_5 *en* 0 *suivant*

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\tilde{\varepsilon}(x).$$

Démonstration. Il faut montrer qu'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_{k-1}}{k} x^k + x^{n+1}\varepsilon(x),$$

autrement dit que la fonction $g(x) = f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\alpha_{k-1}}{k} x^k$ vérifie $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^{n+1}} = 0$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$. Comme f' admet un DL_n en 0 de partie principale $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$, il existe $\tilde{\varepsilon}$ telle que $g'(x) = x^n\tilde{\varepsilon}(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$. Etant donné $x \in I$ on applique le Théorème des Accroissement Finis à la fonction g entre 0 et x (g est dérivable) : il existe $c(x)$ compris entre 0 et x tel que

$$g(x) = g(x) - g(0) = (x - 0) \times g'(c(x)) = x \times (c(x))^n \tilde{\varepsilon}(c(x)).$$

Comme $c(x)$ est compris entre 0 et x on a $|c(x)| \le |x|$ pour tout x, et donc

$$|g(x)| = |x| \times |c(x)|^n |\tilde{\varepsilon}(c(x))| \le |x|^{n+1} |\tilde{\varepsilon}(c(x))|.$$

Par ailleurs $\lim_{x\to 0} c(x) = 0$, puisque $|c(x)| \le |x|$, et donc par composition des limites $\lim_{x\to 0} \tilde{\varepsilon}(c(x)) = 0$ et le Théorème des gendarmes permet d'en déduire que $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^{n+1}} = 0$. $\square$

☠ **Attention !** Le résultat "inverse" du type "si f est dérivable et admet un DL_n en 0 alors f' admet un DL_{n-1} en 0" est faux ! Reprenons la fonction f de l'Exemple 7.29 définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Celle-ci est dérivable et admet un DL_2 en 0. La fonction f' n'admet par contre pas de DL_1 en 0. Sinon elle y serait dérivable comme on l'a vu précédemment (cf page 85 après la Remarque 7.28) et donc f serait deux fois dérivable en 0 ce qui n'est pas le cas.

7.5 Application au calcul de limites

On va utiliser les développements limités pour lever l'indétermination de certaines limites. L'idée est la suivante : quand on fait un DL on se ramène essentiellement à un polynôme. On va expliquer le principe sur un exemple. On voudrait déterminer, si elle existe, la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{\sin(x) - \ln(1+x)}.$$

On commence par vérifier que l'on a bien une forme indéterminée (sinon inutile de se lancer dans des calculs fastidieux). On va ensuite effectuer un DL en 0 (parce qu'on cherche la limite en 0) du numérateur et du dénominateur. On ne cherchera pas à faire celui du quotient ! Toute la question est "à quel ordre faire ces DL ?" On va voir que si on le fait à un ordre trop faible cela n'apportera rien, mais d'un autre côté si on le fait à un ordre trop élevé cela sera source de calculs plus longs, plus fastidieux, et donc potentiellement source d'erreurs.

Commençons par un ordre assez bas et cherchons des DL_1. Les DL usuels donnent

$$\mathrm{e}^x - \cos(x) - x = (1+x) - 1 - x + x\varepsilon_1(x) = x\varepsilon_1(x)$$

et

$$\sin(x) - \ln(1+x) = x - x + x\varepsilon_2(x) = x\varepsilon_2(x),$$

d'où

$$\frac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{\sin(x) - \ln(1+x)} = \frac{x\varepsilon_1(x)}{x\varepsilon_2(x)} = \frac{\varepsilon_1(x)}{\varepsilon_2(x)}.$$

La seule chose que l'on sache des fonctions ε_j, $j = 1$ ou 2, c'est que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_j(x) = 0$ et on n'a pas levé l'indétermination.

Essayons cette fois des DL_2. On a

$$\mathrm{e}^x - \cos(x) - x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) - x + x^2\varepsilon_1(x) = x^2 + x^2\varepsilon_1(x),$$

$$\sin(x) - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon_2(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x),$$

d'où

$$\frac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{\sin(x) - \ln(1+x)} = \frac{x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}{\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)} = \frac{1 + \varepsilon_1(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)}.$$

Cette fois l'indétermination est levée et on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \cos(x) - x}{\sin(x) - \ln(1+x)} = 2.$

Prenons un autre exemple. On souhaite déterminer, si elle existe,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x}}{\cos(2x) + \mathrm{e}^{2x^2} - 2}.$$

Des DL_1 donnent

$$\mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x} = x\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) + \mathrm{e}^{2x^2} - 2 = x\varepsilon_2(x)$$

et on est dans le même cas que ci-dessus. Des DL_2 donnent

$$\mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x} = x^2 + x^2\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) + \mathrm{e}^{2x^2} - 2 = x^2\varepsilon_2(x)$$

et donc $\dfrac{\mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x}}{\cos(2x) + \mathrm{e}^{2x^2} - 2} = \dfrac{1 + \varepsilon_1(x)}{\varepsilon_2(x)}$. Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers 0. On ne sait cependant pas si ce dernier tend vers 0 par valeurs positives ou négatives et on ne peut donc toujours rien conclure. Si on continue, des DL_3 donnent

$$\mathrm{e}^x - \sqrt{1+2x} = x^2 - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x) + \mathrm{e}^{2x^2} - 2 = x^3\varepsilon_2(x),$$

et donc $\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\cos(2x)+e^{2x^2}-2}=\dfrac{1-\frac{x}{3}+x\varepsilon_1(x)}{x\varepsilon_2(x)}$ ce qui n'apporte rien de plus. Des DL_4 donnent eux

$$e^x-\sqrt{1+2x}=x^2-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+x^4\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad \cos(2x)+e^{2x^2}-2=\frac{8x^4}{3}+x^4\varepsilon_2(x),$$

et donc $\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\cos(2x)+e^{2x^2}-2}=\dfrac{1-\frac{x}{3}+\frac{7x^2}{12}+x^2\varepsilon_1(x)}{x^2\left(\frac{8}{3}+\varepsilon_2(x)\right)}$. Le numérateur tend toujours vers 1 et le dénominateur vers 0 mais cette fois on sait qu'il tend vers 0 en étant positif : $x^2\geq 0$ et $\dfrac{8}{3}+\varepsilon_2(x)$ tend vers $\dfrac{8}{3}>0$ donc est positif au voisinage de 0. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\cos(2x)+e^{2x^2}-2}=+\infty$.

Ce que l'on peut tirer de ces deux exemples :

1. Tant que au numérateur ou au dénominateur il n'y a "qu'un terme de reste", autrement dit que la partie principale est nulle, on n'a pas pu tirer de conclusion.
2. Dans le 2nd exemple, le fait d'avoir augmenté l'ordre du DL au numérateur n'a rien apporté à partir du moment où la partie principale était non nulle (on n'a rien gagné entre le DL_2 et le DL_4 du numérateur). Si on fait un DL_2 du numérateur et un DL_4 du dénominateur on a

$$\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{\cos(2x)+e^{2x^2}-2}=\frac{1+x^2\varepsilon_1(x)}{x^2\left(\frac{8}{3}+\varepsilon_2(x)\right)}$$

   et on peut conclure de la même façon.

Conclusion : dans l'idéal on effectue le DL à l'ordre le plus bas possible de façon à avoir une partie principale non nulle (ce qui est derrière est la notion d'*équivalent*). Il n'y a malheureusement pas de règle générale pour savoir à l'avance quel est cet ordre : c'est du cas par cas et le meilleur moyen est de s'exercer pour acquérir de l'expérience !

ANNEXE A

ALPHABET GREC

majuscule	minuscule	nom	majuscule	minuscule	nom
A	α	alpha	B	β	beta
Γ	γ	gamma	Δ	δ	delta
E	ϵ, ε	epsilon	Z	ζ	zeta
H	η	eta	Θ	θ, ϑ	thêta
I	ι	iota	K	κ	kappa
Λ	λ	lambda	M	μ	mu
N	ν	nu	Ξ	ξ	xi
O	o	omicron	Π	π, ϖ	pi
P	ρ, ϱ	rhô	Σ	σ, ς	sigma
T	τ	tau	Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ, φ	phi	X	χ	chi
Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega

ANNEXE B

NOTATIONS ET ABRÉVIATIONS

- $a \in A$: l'élément a appartient à l'ensemble A.
- $a \notin A$: l'élément a n'appartient pas à l'ensemble A.
- $\sum_{k=p}^{n}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: somme pour k allant de p à n (k entier).

  Exemple : $\sum_{k=2}^{5} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.
- $\prod_{k=p}^{n}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: produit pour k allant de p à n (k entier).

  Exemple : $\prod_{k=2}^{5} k^2 = 2^2 \times 3^2 \times 4^2 \times 5^2$.
- $n!$, $n \in \mathbb{N}$: factorielle n. On a $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ si $n \geq 1$, et par convention $0! = 1$.
- $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, $p, n \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$: coefficients binomiaux. C'est le nombre de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

  On trouve parfois la notation C_n^p.
- $E(x)$: la partie entière de x. C'est le plus grand entier relatif tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

- resp. : respectivement.
- ssi : si et seulement si.
- i.e. : id est, qui signifie c'est-à-dire.

ANNEXE C

TRIGONOMÉTRIE CIRCULAIRE

$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$

$\tan(a) = \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)} = \dfrac{1}{\cot(a)}$

$1 + \tan^2(a) = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$

$1 + \cot^2(a) = \dfrac{1}{\sin^2(a)}$

$\sin(-a) = -\sin(a)$

$\cos(-a) = \cos(a)$

$\tan(-a) = -\tan(a)$

$\sin(\pi - a) = \sin(a)$

$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$

$\tan(\pi - a) = -\tan(a)$

$\sin(\pi + a) = -\sin(a)$

$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$

$\tan(\pi + a) = \tan(a)$

$\sin(\pi/2 - a) = \cos(a)$

$\cos(\pi/2 - a) = \sin(a)$

$\tan(\pi/2 - a) = 1/\tan(a)$

$\sin(\pi/2 + a) = \cos(a)$

$\cos(\pi/2 + a) = -\sin(a)$

$\tan(\pi/2 + a) = -1/\tan(a)$

$\sin(3\pi/2 - a) = -\cos(a)$

$\cos(3\pi/2 - a) = -\sin(a)$

$\tan(3\pi/2 - a) = 1/\tan(a)$

$\sin(3\pi/2 + a) = -\cos(a)$

$\cos(3\pi/2 + a) = \sin(a)$

$\tan(3\pi/2 + a) = -1/\tan(a)$

$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

$\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin((p + q)/2)\cos((p - q)/2)$

$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin((p - q)/2)\cos((p + q)/2)$

$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos((p + q)/2)\cos((p - q)/2)$

$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin((p + q)/2)\sin((p - q)/2)$

$\tan(p) + \tan(q) = \dfrac{\sin(p + q)}{\cos(p)\cos(q)}$

$\tan(p) - \tan(q) = \dfrac{\sin(p - q)}{\cos(p)\cos(q)}$

$\sin(a)\sin(b) = (1/2)(\cos(a - b) - \cos(a + b))$

$\cos(a)\cos(b) = (1/2)(\cos(a + b) + \cos(a - b))$

$\sin(a)\cos(b) = (1/2)(\sin(a + b) + \sin(a - b))$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = 2\dfrac{\tan(a)}{1 + \tan^2(a)}$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\tan(2a) = 2\dfrac{\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$

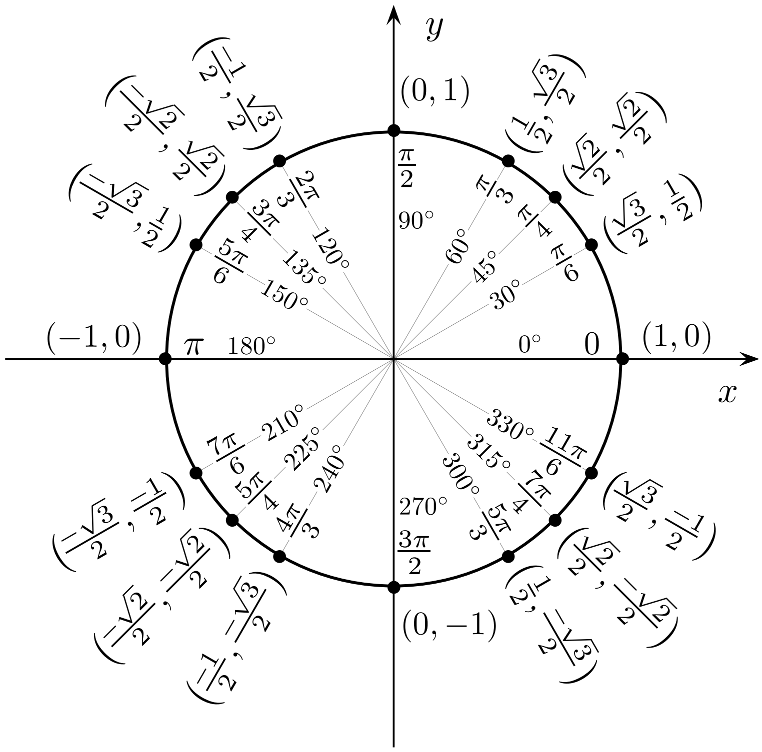
$\sin^2(a) = (1 - \cos(2a))/2$

$\cos^2(a) = (1 + \cos(2a))/2$

$\tan^2(a) = \dfrac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$

$\tan(a) = \dfrac{\sin(2a)}{1 + \cos(2a)} = \dfrac{1 - \cos(2a)}{\sin(2a)}$

$\sin(a) = \sin(b) \Rightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$
$\cos(a) = \cos(b) \Rightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$
$\tan(a) = \tan(b) \Rightarrow a = b + k\pi$
$t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right) \Rightarrow \sin(a) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(a) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan(a) = \dfrac{2t}{1-t^2}$



Angle	**Cosinus**	**Sinus**	**Tangente**
0	1	0	0
π	-1	0	0
$\dfrac{\pi}{2}$	0	1	X
$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$