L1 SV-S2
2010-2011
Mathématiques

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

TD n°3: Calcul matriciel

Exercice 1. Effectuer les produits des matrices suivantes lorsque c'est possible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices suivantes lorsqu'elles ont un sens: AB, BA, $A+B$, BC, ABC, CB.

Exercice 3. Calculer de deux façons différentes le produit suivant:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer et comparer AB et BA.

Exercice 5. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices AB, BA ainsi que leur déterminant. Que remarque-t-on?

Exercice 6. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer AB et BA.
b) Calculer A^{-1} et B^{-1} s'ils existent.

Exercice 7. Calculer le déterminant et l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer AV_1 et AV_2.
b) En déduire une expression explicite de A^nV_1 et A^nV_2 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
c) Exprimer V sous la forme $V = aV_1 + bV_2$ où a et b sont des nombres réels.
d) Calculer le vecteur A^nV pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n, \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n. \end{array}\right.$

a) Ecrire le système sous la forme $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice que l'on déterminera et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

b) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A.

c) Trouver des vecteurs V_1 et V_2 tels que $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$.

d) Exprimer U_0 sous la forme $U_0 = aV_1 + bV_2$ où a et b sont des nombres réels.

e) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 10. Reprendre l'exercice précédent avec les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n, \\ v_{n+1} & = & 2u_n - v_n. \end{array}\right.$

Exercice 11. On considère la suite, dite de Fibonacci, définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. (Ses premiers termes sont successivement $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$)

a) On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que l'on peut écrire $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice que l'on déterminera.

b) Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A (on prendra $\lambda_1 < \lambda_2$).

c) Trouver des vecteurs V_1 et V_2 tels que $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$.

d) Exprimer U_0 sous la forme $U_0 = aV_1 + bV_2$ où a et b sont des nombres réels.

e) En déduire l'expression explicite du vecteur U_n en fonction de n, puis celle de u_n.