
TD : Séries de Fourier

Exercice 1. On considère la série trigonométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \sin(nx)$.

- a) Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$. On note $g(x)$ sa somme.
- b) Calculer $g(x)$. Indication : $\sin(\theta) = \text{Im}(e^{i\theta})$.
- c) Quelle est la série de Fourier de g ?

Exercice 2. [Critères d'Abel]

a) Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres complexes. On notera $(V_n)_n$ la suite des sommes partielles de la suite $(v_n)_n$, i.e. $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ avec la convention $V_{-1} = 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\sum_{k=0}^n u_k v_k = u_n V_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k$. Cette transformation est appelée transformation d'Abel.

b) On suppose que

- 1. $(u_n)_n$ est réelle, décroissante et tend vers 0,
- 2. la suite des sommes partielles $(V_n)_n$ est bornée.

Montrer que $\sum u_n v_n$ converge. On appelle ça le critère d'Abel. C'est une généralisation du critère des séries alternées. Ce dernier correspond en effet au cas particulier $v_n = (-1)^n$.

c) On suppose maintenant que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites de fonctions définies sur un intervalle I et on suppose que

- 1. pour tout n la fonction u_n est à valeurs réelles,
- 2. pour tout $x \in I$ la suite $(u_n(x))_n$ est décroissante,
- 3. la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers 0,
- 4. la suite des sommes partielles $(V_n)_n$ est uniformément bornée, i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|V_n(x)| \leq M$.

Montrer que la série de fonctions $\sum u_n(x) v_n(x)$ converge uniformément sur I . On appelle ça le critère d'Abel uniforme.

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des séries trigonométriques

$$\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha},$$

où $\alpha \in]0, 1]$. Lorsqu'elles convergent on notera respectivement $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ leur somme.

- a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\delta > 0$ les séries convergent uniformément sur $I_{k,\delta} = [2k\pi + \delta, 2(k+1)\pi - \delta]$. Indication : on pourra essayer d'appliquer le critère d'Abel uniforme.
- b) En déduire que les fonctions f, g et h sont bien définies et continues sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
- c) Les séries convergent-elles simplement sur $\mathbb{R}$? Normalement sur $\mathbb{R}$? Normalement sur les $I_{k,\delta}$?

Exercice 4. Le but de l'exercice est de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que l'intégrale converge. Indication : pour la convergence en $+\infty$ on pourra commencer par faire une intégration par parties.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$.

i) Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 2\pi$.

ii) Montrer que $D_n(x) = 2n + 1$ si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$ sinon.

c) Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} - \frac{2}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Indication : on pourra faire un DL3 de la fonction $\sin$.

d) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx = 0$. Indication : $\sin(a+b) = \dots$.

e) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Remarque : les fonctions D_n sont appelées les noyaux de Dirichlet (cf polycopié du cours, Section 1.4.1).

Exercice 5. Soit f la fonction 2π -périodique, impaire, définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.

a) Vérifier que f est continue et C^1 par morceaux. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f .

c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .

d) Justifier rapidement que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^6} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6}.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \max(\sin(x), 0)$.

a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f . On pourra au choix utiliser les coefficients exponentiels ou trigonométriques.

c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .

d) Justifier rapidement que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 7 (CC1 - 2020). Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{si } x \in]-\pi, -1[\cup]1, \pi], \end{cases}$
et 2π -périodique.

- a) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.
- b) Montrer, en justifiant soigneusement votre réponse, que f est C^1 par morceaux. La fonction f est-elle continue ?
- c) Calculer les coefficients de Fourier de f .
- d) Justifier que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donner pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ la valeur de sa somme. La convergence est-elle uniforme ? Justifiez votre réponse.
- e) Calculer, en justifiant l'application des théorèmes utilisés, les sommes des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{2n}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1}.$$

Exercice 8 (Examen - 2020). Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = \frac{x^2}{4}$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.

- a) Montrer que f est C^1 par morceaux et tracer son graphe sur $[-4\pi, 4\pi]$.
- b) Montrer que les coefficients de Fourier trigonométriques de f vérifient

$$a_0(f) = \frac{2\pi^2}{3} \quad \text{et, pour tout } n \geq 1, \quad a_n(f) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad b_n(f) = -\frac{\pi}{n}.$$

- c) Justifier que la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donner pour tout $x \in [0, 2\pi]$ la valeur de sa somme.
- d) Calculer, en justifiant l'application des théorèmes utilisés, les sommes des séries numériques

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction 2π -périodique définie pour tout $x \in [0, 2\pi[$ par $f_a(x) = e^{ax}$.

- a) Déterminer la série de Fourier de f_a .
- b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$ converge et calculer sa somme.

- c) Justifier que $\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 10. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π -périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^{i\alpha x}$.

- a) Vérifier que f est C^1 par morceaux.
- b) Déterminer les coefficients de Fourier exponentiels de f .
- c) Etudier la convergence de la série de Fourier de f .
- d) Calculer $S(f)(\pi)$ et montrer que

$$\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \pi \frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

e) Justifier que pour tout $x \in]0, \pi[$ on a

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}. \quad (1)$$

Soit $g :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$.

f) Justifier que la série apparaissant dans le membre de droite de (1) converge normalement vers g sur tout intervalle $[0, x]$ avec $x < \pi$. (Cela prouve en particulier que g est continue en 0.)

g) En intégrant soigneusement (1) montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$ on a

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

En déduire que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ on a $\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Remarque : ce développement du sinus en produit infini est dû à Euler.

Exercice 11. Soit f une fonction 2π -périodique continue et C^1 par morceaux telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$.

Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 12. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = 1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$ et $(z_k)_k$ la suite définie par récurrence par $z_{k+1} = e^{i\alpha} z_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (l'application $R_\alpha : z \mapsto e^{i\alpha} z$ correspond à la rotation de centre O et d'angle α).

a) Montrer que si $P(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ est un polynôme trigonométrique alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} P(\theta + \alpha k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(t) dt.$$

b) Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Justifier que si $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(e^{it})$ est continue et 2π -périodique.

c) Montrer que pour toute fonction continue $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ et tout $z_0 \in \mathbb{U}$ on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt.$$

Indication : on pourra considérer la fonction g de la question précédente et utiliser le Théorème de Weierstrass.

d) Si $\alpha = 2\pi \frac{p}{q} \in 2\pi\mathbb{Q}$ avec p et q premiers entre eux déterminer $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(z_k)$.