

CY Cergy Paris Université
Département de Mathématiques
L3 Maths - S5
2026/2027



Analyse Complexe

TABLE DES MATIÈRES

1	Topologie et convergence dans $\mathbb{C}$	5
1.1	Module et distance	5
1.2	Boules, ouverts et fermés	6
1.3	Convergence de suites et séries	7
1.4	Compacité	9
1.5	Connexité par arcs	9
2	Fonctions d'une variable complexe	11
2.1	Notion de limite	11
2.2	Continuité	11
2.3	Dérivabilité	12
2.4	Dérivabilité dans $\mathbb{C}$ - Différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$	14
3	Fonctions définies par une série entière	19
3.1	Suites et séries de fonctions de la variable complexe	19
3.2	Séries entières	21
3.3	La fonction exponentielle	28
3.4	Logarithme complexe	31
3.5	Complément : fin de la preuve du Théorème 3.1	35
4	Fonctions analytiques	37
4.1	Séries entières et fonctions analytiques	37
4.2	Zéros isolés et prolongement analytique	38
4.3	Formule de Cauchy pour les fonctions analytiques	41
4.4	Analyticité des fonctions C^1	43
4.5	Théorème de Liouville et principe du maximum	48
4.5.1	Théorème de Liouville	48
4.5.2	Principe du maximum	49
5	Intégrales et primitives	53
5.1	Intégrale le long d'un chemin	54
5.2	Fonctions holomorphes, primitives et analyticité	60

5.3	Indice d'un point par rapport à un chemin fermé	67
5.4	Formule de Cauchy - le cas général	70
5.5	Compléments	73
5.5.1	Preuve du théorème de Goursat	73
5.5.2	Suites et séries de fonctions holomorphes, fonctions définies par une intégrale	75
5.5.3	Longueur d'un chemin	77
6	Fonctions méromorphes	79
6.1	Singularités isolées	79
6.2	Fonctions méromorphes et résidus	83
6.3	Compléments : Séries de Laurent et singularités essentielles	91

CHAPITRE 1

TOPOLOGIE ET CONVERGENCE DANS $\mathbb{C}$

Ce cours a pour objet principal les fonctions d'une variable complexe, c'est-à-dire les fonctions "de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ". Plus précisément on considèrera des fonctions définies sur un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, i.e. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Tout comme pour les fonctions d'une variable réelle on s'intéressera aux notions de fonctions continues mais surtout dérivables, ainsi qu'à leurs propriétés. On reviendra également sur la notion de séries entières (avec variable complexe) qui joueront un rôle important. On s'intéressera enfin aux notions de primitive et d'intégrale d'une fonction le long d'un chemin inclus dans son ensemble de définition.

Que ce soit pour parler de continuité, de dérivabilité ou de convergence de série, la notion de limite est présente. La "nature" de l'ensemble de définition peut aussi être importante. C'est déjà le cas pour les fonctions réelles. Par exemple les théorèmes des valeurs intermédiaires et des accroissements finis ne sont vrais que si l'ensemble de définition est un *intervalle*. Egalement, pour étudier les extrema d'une fonction, si celle-ci est continue sur un segment (plus généralement sur un *compact*) alors elle admet un minimum et un maximum. Inversement si elle est dérivable alors en un extremum sa dérivée s'annule à condition que l'ensemble de définition soit un *ouvert*.

Dans ce chapitre introductif on va rapidement présenter quelques prérequis indispensables pour la suite du cours. C'est principalement l'adaptation à $\mathbb{C}$ de ce que vous avez vu dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ (voir le cours Analyse 3 en L2).

1.1 Module et distance

Afin de parler de convergence ou limite on a besoin d'avoir une notion de *distance* entre les éléments. Dans $\mathbb{R}$ la distance est obtenue à l'aide de la valeur absolue (cf le cours d'Analyse de L1). Dans $\mathbb{R}^n$ elle est obtenue en général à partir d'une norme (cf les cours de Fonctions de Plusieurs Variables ou Analyse 3 en L2). Ici c'est le module qui va jouer ce rôle.

Définition 1.1. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. La distance entre z_1 et z_2 est le nombre $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Ce qui traduit le fait qu'on ait une distance ce sont les trois propriétés suivantes (voir le cours Analyse 3 de L2) :

1. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_2| = 0$ ssi $z_1 = z_2$, i.e. $d(z_1, z_2) = 0$ ssi $z_1 = z_2$,

2. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$, i.e. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$,
3. Pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 - z_3| \leq |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3|$, i.e. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$. Cette inégalité est appelée *inégalité triangulaire*.

La dernière inégalité découle de $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (voir TD) avec $z = z_1 - z_2$ et $z' = z_2 - z_3$.

Remarque 1.1. On identifie souvent $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (voir TD ainsi que la Partie 2.4, p.14). Dans ce cas, en notant $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, on constate que $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ n'est rien d'autre que la distance euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^2$.

De façon équivalente, si M_1 et M_2 sont les points du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 alors $d(z_1, z_2) = M_1 M_2$.

1.2 Boules, ouverts et fermés

Notation. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On note $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r . On note également $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$, resp. $C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$, le disque fermé, resp. le cercle, de centre z_0 et de rayon r .

Définition 1.2. Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$, i.e. tel que $\Omega \subset \overline{D}(0, M)$.

Exercice 1.1. Montrer Ω est borné ssi il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que $\Omega \subset D(z_0, r)$.

Définition 1.3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si pour tout $z \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \subset \Omega$.

Définition 1.4. $F \subset \mathbb{C}$ est dit fermé si son complémentaire $\Omega = F^c = \mathbb{C} \setminus F$ est ouvert.

Remarque 1.2. Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{C}$ sont à la fois ouverts et fermés. Ce sont les seuls ensembles de $\mathbb{C}$ qui vérifient cette propriété.

Exercice 1.2. Montrer, à l'aide de la définition, que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$ le disque $D(z_0, r)$ est ouvert et le disque $\overline{D}(z_0, r)$ est fermé.

Proposition 1.1. 1. Toute réunion d'ensembles ouverts est un ouvert et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ouvert.

2. Toute intersection d'ensembles fermés est un fermé et toute réunion finie d'ensembles fermés est un fermé.

Exercice 1.3. Démontrer la proposition.

 **Attention !** Un ensemble peut être ni ouvert ni fermé. Essayez de donner un exemple.

Définition-Proposition 1.5. Soit $A \subset \mathbb{C}$.

1. Il existe un plus grand ouvert inclus dans A . On l'appelle intérieur de A , noté $\overset{\circ}{A}$. De plus $\overset{\circ}{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists r > 0, D(z, r) \subset A\}$.
2. Il existe un plus petit fermé contenant A . On l'appelle adhérence de A , notée $\overline{A}$. De plus $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \forall r > 0, D(z, r) \cap A \neq \emptyset\}$.

Définition 1.6. Soit $A \subset \mathbb{C}$. On dit que

1. $z \in A$ est un point isolé de A s'il existe $r > 0$ tel que $D(z, r) \cap A = \{z\}$.
2. A est un ensemble discret si tous ses points sont isolés.
3. $z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A si pour tout $r > 0$ on a $D(z, r) \cap A \neq \{z\}$ et $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$.

Exercice 1.4. Faites des dessins pour vous représenter graphiquement les notions de point isolé et de point d'accumulation.

Remarque 1.3. $z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A si et seulement si $z \in \overline{A \setminus \{z\}}$.

Exemple 1.1. $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est discret et admet 0 comme unique point d'accumulation.

Exercice 1.5. Soit Ω un ouvert non-vide. Montrer que tout $z \in \Omega$ est un point d'accumulation de Ω .

1.3 Convergence de suites et séries

Définition 1.7. Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, noté $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

ℓ est appelée limite de la suite $(z_n)_n$.

Remarque 1.4. La suite $(z_n)_n$ converge (dans $\mathbb{C}$) vers ℓ si et seulement si les suites $(\operatorname{Re}(z_n))_n$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_n$ convergent (dans $\mathbb{R}$) respectivement vers $\operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(\ell)$. Cela découle de l'encadrement

$$\max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|,$$

appliqué à $z = z_n - \ell$.

Les propriétés qui suivent se montrent toutes exactement de la même façon que leurs analogues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. Les preuves sont laissées à titre d'exercice.

Proposition 1.2. Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $(z_n)_n$ converge alors sa limite est unique.

Proposition 1.3. Soient $(z_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \ell'$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha z_n + w_n = \alpha \ell + \ell'$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = \ell \ell'$. Si de plus $w_n \neq 0$ pour tout n et $\ell' \neq 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\ell}{\ell'}$.

Proposition 1.4 (Caractérisation des fermés par les suites). Soit $F \subset \mathbb{C}$. L'ensemble F est fermé si et seulement si pour toute suite $(z_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$, si $(z_n)_n$ converge (dans $\mathbb{C}$) alors sa limite ℓ est dans F .

Proposition 1.5. Soit $A \subset \mathbb{C}$. $z \in \overline{A}$ ssi il existe $(z_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Corollaire 1.1. $z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A ssi il existe $(z_n)_n \in (A \setminus \{z\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

Définition 1.8. Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum z_n$ converge si la suite $(Z_n)_n$ des sommes partielles, définies par $Z_n = \sum_{k=0}^n z_k$, converge. On note alors $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sa limite appelée somme de la série.

Remarque 1.5. En utilisant $\operatorname{Re}(Z_n) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(z_k)$, $\operatorname{Im}(Z_n) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im}(z_k)$ ainsi que la Remarque 1.4 ci-dessus, on vérifie que la série $\sum z_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum \operatorname{Re}(z_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(z_n)$ convergent. Dans ce cas on a $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}(z_n)$.

Dans certaines situations on n'a pas accès à la valeur de la limite, c'est souvent le cas lorsqu'on étudie la convergence de séries, et la notion de suite de Cauchy joue alors un rôle important.

Définition 1.9. Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1. Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors la suite $(z_n)_n$ converge si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que $\mathbb{C}$ est complet.

Démonstration. On vérifie facilement que $(z_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si $(\operatorname{Re}(z_n))_n$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_n$ sont de Cauchy. Le résultat découle alors de son analogue pour les suites réelles : les suites réelles $(\operatorname{Re}(z_n))_n$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_n$ sont de Cauchy si et seulement si elles convergent. $\square$

C'est ce résultat qui est à la base de la propriété importante ci-dessous, puisqu'elle permet de se ramener aux séries à termes réels positifs.

Proposition 1.6. Si $\sum |z_n|$ converge alors $\sum z_n$ converge.

Démonstration. Si $\sum |z_n|$ converge alors la suite $\left(\sum_{k=0}^n |z_k| \right)_n$ converge donc est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > m \geq N, \left| \sum_{k=0}^n |z_k| - \sum_{k=0}^m |z_k| \right| = \sum_{k=m+1}^n |z_k| < \varepsilon.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on prend N comme ci-dessus. Pour tous $n > m \geq N$ on a

$$|Z_n - Z_m| = \left| \sum_{k=0}^n z_k - \sum_{k=0}^m z_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |z_k| < \varepsilon.$$

La suite des sommes partielles $(Z_n)_n$ est donc de Cauchy et donc converge, i.e. $\sum z_n$ converge.

1.4 Compacité

Définition 1.10. Une sous-suite, ou suite extraite, d'une suite $(z_n)_n$ est une suite $(z_{\varphi(n)})_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Proposition 1.7. Si la suite $(z_n)_n$ converge vers ℓ alors toute sous-suite de $(z_n)_n$ converge aussi vers ℓ (c'est comme dans $\mathbb{R}$).

Définition 1.11. On dit que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(z_n)_n$ s'il existe une sous-suite de $(z_n)_n$ qui converge vers ℓ .

Définition 1.12. Un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est dit compact si toute suite $(z_n)_n$ d'éléments de K admet une sous-suite qui converge dans K . Autrement dit, quelle que soit $(z_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in K$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{\varphi(n)} = \ell$.

Proposition 1.8. $K \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.

Corollaire 1.2. Si $A \subset \mathbb{C}$ est borné alors $\overline{A}$ est compact.

1.5 Connexité par arcs

La notion d'ensemble connexe par arcs, voir la Définition 1.14 ci-dessous, est assez intuitive. Essentiellement un ensemble est connexe par arcs s'il est "constitué d'un seul morceau". On peut voir cette notion comme l'analogue dans $\mathbb{C}$ de celle d'intervalle dans $\mathbb{R}$. On a besoin pour la définir de la notion de fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ que l'on retrouvera dans le Chapitre 5 quand on parlera d'intégrale le long d'un chemin.

Définition 1.13. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est continue en $t_0 \in [a, b]$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in [a, b], |t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue en tout $t_0 \in [a, b]$.

On peut facilement vérifier la propriété suivante.

Proposition 1.9. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $t_0 \in [a, b]$. La fonction f est continue en t_0 , resp. sur $[a, b]$, si et seulement si les fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) $\operatorname{Re}(f) : t \mapsto \operatorname{Re}(f(t))$ et $\operatorname{Im}(f) : t \mapsto \operatorname{Im}(f(t))$ sont continues en t_0 , resp. sur $[a, b]$.

Remarque 1.6. Une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée un chemin. L'image de f est l'ensemble $\Gamma = \{f(t) \mid t \in [a, b]\}$. C'est un "chemin géométrique" (ou courbe) dans $\mathbb{C}$ et l'idée de la continuité est que si f est continue alors ce chemin géométrique est en un seul morceau. Réciproquement, étant donné un tel chemin géométrique Γ , déterminer une fonction continue dont il est l'image est ce qu'on appelle "paramétrer Γ ".

 L'exemple ci-dessous montre comment paramétrer un segment ou un cercle. On les retrouvera régulièrement par la suite. **Il est indispensable de savoir le faire !**

Exemple 1.2. 1) Le segment d'extrémités z_1 et z_2 , noté $[z_1, z_2]$, peut être paramétré par la fonction $\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1) = (1 - t)z_1 + tz_2$. Ce paramétrage n'est pas unique (on y reviendra dans le Chapitre 5). Par exemple, $\tilde{\gamma} : [0, \frac{1}{2}] \ni s \mapsto z_1 + 2s(z_2 - z_1)$ et $\hat{\gamma} : [0, 1] \ni u \mapsto z_2 + u(z_2 - z_1)$ sont aussi des paramétrages du segment $[z_1, z_2]$.

2) Le cercle de centre z_0 et de rayon r peut être décrit par la fonction $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$.

Exercice 1.1. Quelle différence peut-on faire entre les paramétrages γ et $\hat{\gamma}$ du segment $[z_1, z_2]$ donnés ci-dessus ? Donner d'autres paramétrages du cercle $C(z_0, r)$.

Définition 1.14. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que Ω est connexe par arcs si pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ il existe un intervalle $[a, b]$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ et pour tout $t \in [a, b]$ on a $\gamma(t) \in \Omega$. Autrement dit Ω est connexe par arcs si n'importe quels points z_1, z_2 dans Ω peuvent être reliés par un chemin géométrique inclus dans Ω .

Remarque 1.7. Dans la définition de connexe par arcs on suppose souvent que $[a, b] = [0, 1]$. Ce n'est pas restrictif. En effet, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est comme dans la définition ci-dessus alors la fonction $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(a + u(b - a))$ est continue et vérifie $\tilde{\gamma}(0) = z_1$, $\tilde{\gamma}(1) = z_2$ et $\tilde{\gamma}(u) \in \Omega$ pour tout $u \in [0, 1]$.

Définition 1.15. On appelle domaine de $\mathbb{C}$ tout ensemble ouvert et connexe par arcs.

Exercice 1.6. Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ le disque $D(z_0, r)$ est un domaine.

On rencontrera plus tard des notions un peu plus fortes que connexes par arcs.

Définition 1.16. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que

1. Ω est convexe si pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ on a $[z_1, z_2] \subset \Omega$.
2. Ω est étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ on a $[z_0, z] \subset \Omega$.

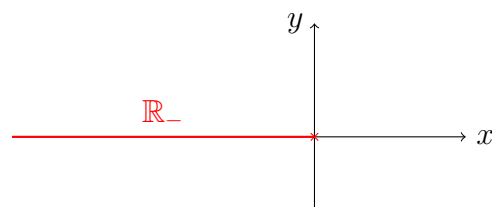
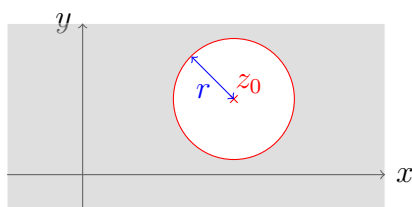
Proposition 1.10. Un ensemble convexe est étoilé et un ensemble étoilé est connexe par arcs.

Exercice 1.7. Démontrez la proposition ci-dessus.

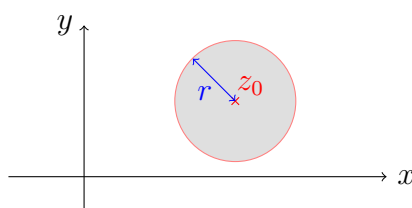
Exercice 1.2. Dans chacun des cas dire si Ω est connexe par arcs, étoilé, convexe.

a) Le disque $D(z_0, r)$

b) Le plan $\mathbb{C}$ privé de l'axe réel négatif $\mathbb{R}_-$.



c) Le complément du disque $\overline{D}(z_0, r)$, i.e. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$.



CHAPITRE 2

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

2.1 Notion de limite

Définition 2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f tend vers ℓ lorsque z tend vers a , noté $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in \Omega, |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 2.1. Lorsqu'elle existe la limite est unique.

Remarque 2.1. La condition $a \in \overline{\Omega}$ assure que quelque soit $\delta > 0$ il existe $z \in \Omega$ tel que $|z - a| < \delta$. C'est cela qui permet de garantir, si elle existe, l'unicité de la limite.

On a bien entendu toutes les propriétés usuelles sur les limites (somme, produit, quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas et a une limite non nulle, composée lorsque c'est possible). Cela peut se montrer facilement à l'aide de la proposition suivante et des propriétés sur les limites de suites données au chapitre précédent.

Proposition 2.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \ell$ si et seulement si

$$\forall (z_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \ell.$$

A partir de la notion de limite on va définir facilement les notions de fonctions continues et de fonctions dérivables comme on le fait dans $\mathbb{R}$. Les propriétés algébriques sont alors les même que dans $\mathbb{R}$ et se montrent exactement de la même façon.

2.2 Continuité

Définition 2.2. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. La fonction f est continue en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Elle est continue sur Ω si elle est continue en tout $z_0 \in \Omega$.

Proposition 2.3. 1) Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continues et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont continues. Si de plus g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.

2) Soient $f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \rightarrow \mathbb{C}$ continues et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est continue sur Ω_f .

Exemple 2.1. Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{C}$. De même pour les fonctions $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$, $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$, $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto |z|^2$. Si P et Q sont deux fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$. On rappelle que si Q est de degré n il possède au plus n racines distinctes, i.e. l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$ a au plus n éléments.

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les principaux théorèmes que vous avez vus concernant les fonctions continues sont : le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que toute fonction continue sur un segment soit bornée et atteigne ses bornes, i.e. elle admet un minimum et un maximum. Ici cela ne peut plus avoir de sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$: si z, z' sont deux nombres complexes arbitraires que signifie $z \leq z'$? On a par contre la généralisation suivante du second résultat.

Théorème 2.1. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors l'ensemble $f(K)$ est compact. En particulier il est borné, i.e. il existe M tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in K$. De plus la fonction $|f| : K \rightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum sur K .

Démonstration. Soit $(w_n)_n \in (f(K))^{\mathbb{N}}$. On veut montrer que $(w_n)_n$ admet une sous-suite qui converge dans $f(K)$, i.e. il existe une sous-suite $(w_{\varphi(n)})_n$ et $w \in f(K)$ tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{\varphi(n)} = w$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition de $f(K)$, il existe $z_n \in K$ tel que $w_n = f(z_n)$. La suite $(z_n)_n$ ainsi construite est dans K qui est compact donc elle admet une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers un certain $z \in K$. Comme f est continue, la suite de terme général $f(z_{\varphi(n)}) = w_{\varphi(n)}$ converge vers $w = f(z) \in f(K)$. La suite $(w_n)_n$ possède donc bien une sous-suite convergente dans $f(K)$, ce qui prouve que $f(K)$ est compact.

Le même raisonnement appliqué à la fonction continue $|f| : K \rightarrow \mathbb{R}$ (c'est une composée de fonctions continues) montre que l'ensemble $|f|(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$. Il est donc borné et fermé. Puisque $|f|(K)$ est borné, le nombre $M := \sup_{z \in K} |f(z)|$ est fini. Par définition du sup il existe $(z_n)_n$ dans K telle que $w_n = |f(z_n)| \rightarrow M$. Mais $w_n \in |f|(K)$ pour tout n et l'ensemble $|f|(K)$ est fermé donc, Proposition 1.4, on a $M = \lim w_n \in |f|(K)$. Autrement dit il existe $z_{\max} \in K$ tel que $|f|(z_{\max}) = M$. La fonction $|f|$ admet donc bien un maximum. Le même raisonnement montre que $|f|$ admet aussi un minimum. $\square$

2.3 Dérivabilité

Pour parler de dérivabilité on va maintenant supposer que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 2.3. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$.

1. On dit que f est dérivable en z_0 si la limite $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe (dans $\mathbb{C}$). On notera alors $f'(z_0)$ cette limite.
2. On dit que f est dérivable, ou holomorphe, sur Ω si f est dérivable en tout $z_0 \in \Omega$.
3. On dit que f est une fonction entière si f est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C}$.

4. On dit que f est de classe C^1 si elle est dérivable et si la fonction $f' : z \mapsto f'(z)$ est continue. Par récurrence elle est C^k , $k \geq 2$, si elle est C^{k-1} et si $f^{(k-1)}$ est C^1 . Elle est C^∞ si elle est C^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.2. De façon équivalente f est dérivable en z_0 si la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$. Attention ici h est complexe !! La limite est alors $f'(z_0)$.

On peut également reformuler la définition de dérivable de la façon suivante : f est dérivable en z_0 , de dérivée $f'(z_0)$, si et seulement si au voisinage de z_0 on a

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|). \quad (2.1)$$

Les propriétés ci-dessous se montrent alors comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4. 1. Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont holomorphes et on a, pour tout $z_0 \in \Omega$,

$$(f + \lambda g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda g'(z_0) \quad \text{et} \quad (fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Si de plus g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe et on a, pour tout $z_0 \in \Omega$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

2. Soient $f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est holomorphe sur Ω_f et on a $(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \times g'(f(z_0))$ pour tout $z_0 \in \Omega_f$.

Exercice 2.1. Montrez la proposition ci-dessus.

Exemple 2.2. 1) Les fonctions polynômes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et leur dérivée se calcule comme pour les fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ (faites-le). Si P et Q sont deux fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$.

2) La fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$. En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Pour tout $h \neq 0$ on a $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{z}_0 + \bar{h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$. Si h est réel on a donc $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = 1 \rightarrow 1$ lorsque $h \rightarrow 0$. Par contre si h est imaginaire pur on a $\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = -1 \rightarrow -1$ lorsque $h \rightarrow 0$. La limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ n'existe donc pas, donc f n'est pas dérivable en z_0 .

3) La fonction définie par $g(z) = |z|^2$ n'est dérivable qu'en $z_0 = 0$. En effet si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $h \neq 0$ on a

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{|z_0 + h|^2 - |z_0|^2}{h} = \frac{z_0 \bar{h} + \bar{z}_0 h + |h|^2}{h} = z_0 \frac{\bar{h}}{h} + \bar{z}_0 + \bar{h}.$$

Les deux derniers termes ont une limite lorsque h tend vers 0. Par contre on a vu que $\frac{\bar{h}}{h}$ n'avait pas de limite, donc le premier terme n'a pas de limite sauf si $z_0 = 0$. Conclusion f n'est pas dérivable sauf en 0 où on a $f'(0) = 0$.

Exercice 2.2. Etudier la dérivabilité des fonctions $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ et $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$.

Définition 2.4. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que F est une primitive de f sur Ω si F est holomorphe sur Ω et vérifie $F' = f$.

Exemple 2.3. Si $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = z^m$ admet pour primitive sur $\mathbb{C}^*$ la fonction définie par $F(z) = \frac{1}{m+1} z^{m+1}$. On verra plus loin, cf Remarque 3.15 à la fin du Chapitre 3, que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Bien qu'à première vue tout semble similaire à ce qu'on fait dans $\mathbb{R}$ on va voir qu'il n'en est rien et que le fait de prendre des (limites de) taux d'accroissements dans $\mathbb{C}$ a de grosses conséquences.

1) Il va être beaucoup plus difficile à une fonction d'être dérivable dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto |x|^2$ par exemple est dérivable dans $\mathbb{R}$ mais on a vu que $z \mapsto |z|^2$ n'était pas dérivable dans $\mathbb{C}$, sauf en 0.

En parlant de fonctions non-dérivables, on a vu que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ était continue sur $\mathbb{C}$ mais dérivable nul part. Essayez de construire une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit continue partout mais dérivable nul part... C'est faisable, mais beaucoup plus difficile.

2) Les fonctions dérivables auront beaucoup de propriétés, qui ne sont pas forcément vraies dans $\mathbb{R}$. La plus frappante est sûrement le fait qu'une fonction holomorphe sera automatiquement C^∞ (et même mieux).

3) Contrairement aux fonctions d'une variable réelle, les fonctions continues n'ont pas forcément de primitive. C'est un peu relié au point précédent : si f a une primitive alors il existe F holomorphe telle que $F' = f$. Donc, d'après ce qu'on a dit dans le point précédent, F sera C^∞ et donc f aussi. En particulier f sera holomorphe. Conclusion : seules les fonctions holomorphes sur Ω peuvent avoir une primitive sur Ω . Attention on ne dit pas que toutes les fonctions holomorphes sur Ω ont une primitive sur Ω . Ce sera par exemple le cas de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

2.4 Dérivabilité dans $\mathbb{C}$ - Différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$

Comme indiqué dans la Partie 1.1 du Chapitre 1 on identifie souvent $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ en utilisant l'application $J : \mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ il est alors naturel de se demander s'il y a une différence entre considérer f comme fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ ou comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, i.e. considérer la fonction $\tilde{f} = J \circ f \circ J^{-1} : (x, y) \mapsto (\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy)))$ définie sur $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega \ni z = x + iy & \xrightarrow{f} & f(z) \in \mathbb{C} \\
 \uparrow J^{-1} & & \downarrow J \\
 \tilde{\Omega} \ni (x, y) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\operatorname{Re}(f(x + iy)), \operatorname{Im}(f(x + iy))) \in \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

Comme on l'a remarqué, la distance dans $\mathbb{C}$ donnée à l'aide du module correspond à la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. On peut donc a priori s'attendre à ce que tout se passe dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}^2$. Concernant la continuité cette idée est correcte.

Proposition 2.5. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. f est continue en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ si et seulement si $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue (en tant que fonction de deux variables réelles) en (x_0, y_0) .

Exercice 2.3. Démontrez la proposition ci-dessus. Il suffit d'écrire les deux définitions " f est continue en $z_0 = x_0 + iy_0$ " et " $\tilde{f}$ est continue en (x_0, y_0) ".

On va voir dans cette partie que ce qui est vrai pour la continuité ne l'est plus en ce qui concerne la dérivabilité et qu'il est plus "difficile" pour une fonction d'être dérivable vue comme fonction dans $\mathbb{C}$ que comme fonction dans $\mathbb{R}^2$.

On rappelle (voir le cours de Fonctions de Plusieurs Variables du S3) que pour des fonctions de deux variables l'analogue de la dérivabilité est la différentiabilité : si $U \subset \mathbb{R}^2$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in U$ alors g est différentiable en (x_0, y_0) si

1. les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent,
2.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{g(x,y) - g(x_0,y_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x-x_0) - \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y-y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

La seconde condition peut se réécrire

$$g(x,y) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y-y_0) + o(\|(x,y) - (x_0,y_0)\|). \quad (2.2)$$

Une condition suffisante pour que g soit différentiable est que les deux dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ existent et soient des fonctions continues (on dit que g est C^1). Lorsque $g = (P, Q)$ est une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ elle est différentiable, resp. C^1 , si et seulement si les deux fonctions P et Q sont différentiables, resp. C^1 . En particulier si les deux fonctions P et Q sont des fonctions polynômes (des deux variables x et y) alors g est de classe C^1 et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.4. 1) Soit f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = \bar{z}$. Alors $\tilde{f}_1(x,y) = (x, -y)$ et $\tilde{f}_1$ est C^1 , et donc différentiable, puisque les deux fonctions $P_1 : (x,y) \mapsto x$ et $Q_1 : (x,y) \mapsto -y$ sont des fonctions polynômes. Pourtant on a vu que f_1 n'était pas dérivable au sens complexe.
2) Soit f_2 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_2(z) = |z|^2$. Alors $\tilde{f}_2(x,y) = (x^2 + y^2, 0)$ et $\tilde{f}_2$ est aussi C^1 puisque $P_2 : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ et $Q_2 : (x,y) \mapsto 0$ sont à nouveau des fonctions polynômes. De même on a vu que f_2 n'était pas dérivable au sens complexe, sauf en 0.

Comme le montre l'exemple ci-dessus on peut trouver des fonctions $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ très simples qui sont dérivables / différentiables en tant que fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ mais dont pourtant les fonctions correspondantes f_1 et f_2 ne sont pas dérivables comme fonctions vues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Dans la suite de cette partie on va chercher à comprendre quel est le lien entre différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et dérivable dans $\mathbb{C}$.

Etant donnée $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on notera $P(x,y) = \operatorname{Re}(f(x+iy))$ et $Q(x,y) = \operatorname{Im}(f(x+iy))$ de façon à ce que $\tilde{f} = (P, Q)$. En utilisant (2.2) on voit que la fonction f est différentiable en (x_0, y_0) si les quatre dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en ce point et si

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_0,y_0) \\ Q(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\|(x,y) - (x_0,y_0)\|). \quad (2.3)$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de $\tilde{f} = (P, Q)$ au point (x_0, y_0) . Si on note $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A (Φ est ce qu'on appelle la différentielle de $\tilde{f}$ au point (x_0, y_0) habituellement notée $D\tilde{f}(x_0, y_0)$), l'identité (2.3) s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, y) &= \tilde{f}(x_0, y_0) + \Phi(x - x_0, y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \\ \iff f(z) &= f(z_0) + J^{-1} \circ \Phi \circ J(z - z_0) + o(|z - z_0|). \end{aligned}$$

Si on compare avec (2.1) on constate que f sera dérivable en z_0 pourvu qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout z on ait $J^{-1} \circ \Phi \circ J(z - z_0) = \lambda \times (z - z_0)$, i.e. tel que l'application $J^{-1} \circ \Phi \circ J$ soit $\mathbb{C}$ -linéaire. On aura alors $\lambda = f'(z_0)$. Cela impose des conditions sur la matrice A (voir TD) et donc sur les dérivées partielles de P et Q , à savoir

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Lemme 2.1. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ alors les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en (x_0, y_0) et on a

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{Re}(f'(z_0)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\operatorname{Im}(f'(z_0)). \quad (2.4)$$

Démonstration. On traite le cas de la fonction P , celui de Q est laissé à titre d'exercice. Pour $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x_0 + h, y_0) \in \tilde{\Omega}$ on a, en utilisant la continuité de la fonction $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$,

$$\begin{aligned} \frac{P(x_0 + h, y_0) - P(x_0, y_0)}{h} &= \frac{\operatorname{Re}(f(z_0 + h)) - \operatorname{Re}(f(z_0))}{h} \\ &\stackrel{h \in \mathbb{R}}{=} \operatorname{Re} \left(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \operatorname{Re}(f'(z_0)), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe et vaut $\operatorname{Re}(f'(z_0))$.

De même pour $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x_0, y_0 + h) \in \tilde{\Omega}$ on a, en utilisant cette fois la continuité de la fonction $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$,

$$\begin{aligned} \frac{P(x_0, y_0 + h) - P(x_0, y_0)}{h} &\stackrel{h \in \mathbb{R}}{=} \operatorname{Re} \left(\frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\operatorname{Im}(f'(z_0)), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$ existe et vaut $-\operatorname{Im}(f'(z_0))$. □

Notation. On note en général $\frac{\partial f}{\partial x}(x + iy) := \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x + iy) := \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$. La notation est naturelle puisque P et Q représentent les parties réelles et imaginaires de f , la seule différence étant que f est définie sur $\mathbb{C}$ tandis que P et

Q le sont sur $\mathbb{R}^2$. En utilisant l'application J qui identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ on a en fait simplement $\frac{\partial f}{\partial x} = J^{-1} \circ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \circ J$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = J^{-1} \circ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \circ J$.

Avec cette notation le Lemme 2.1 s'écrit : si f est dérivable en z_0 alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ existent et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0)$.

Proposition 2.6. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) avec

$$i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \iff \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (2.5)$$

Ces deux égalités s'appellent les conditions de Cauchy-Riemann. Dans ce cas on a

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Démonstration. Supposons que f est dérivable en z_0 . D'après le Lemme 2.1 les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existent en (x_0, y_0) . Si $z = x + iy \in \Omega$ on a, d'après (2.4),

$$\begin{aligned} & P(x, y) - P(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0) \\ &= \operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(z_0)) - \operatorname{Re}(f'(z_0)) \times \operatorname{Re}(z - z_0) + \operatorname{Im}(f'(z_0)) \times \operatorname{Im}(z - z_0) \\ &= \operatorname{Re}(f(z)) - \operatorname{Re}(f(z_0)) - \operatorname{Re}(f'(z_0)(z - z_0)) \\ &= \operatorname{Re}(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \left| P(x, y) - P(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right| \\ &= \left| \operatorname{Re}(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) \right| \\ &\leq |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \quad \text{car } |\operatorname{Re}(w)| \leq |w| \text{ pour tout } w \in \mathbb{C} \\ &= o(|z - z_0|) \quad \text{car } f \text{ est dérivable en } z_0 \\ &= o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|), \end{aligned}$$

ce qui prouve que P est différentiable en (x_0, y_0) . Le raisonnement est le même pour Q en remplaçant Re par Im .

Montrons maintenant la réciproque. On suppose que P et Q sont différentiables en (x_0, y_0) et que (2.5) est vérifiée. On a alors, pour $z = x + iy \in \Omega$ et en utilisant (2.5),

$$\begin{aligned} f(z) &= P(x, y) + iQ(x, y) \\ &= P(x_0, y_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + iQ(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|) \\ &= f(z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0)(z - z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \end{aligned}$$

et donc $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe, i.e. f est dérivable en z_0 avec

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0),$$

où on utilise à nouveau (2.5) pour obtenir la dernière égalité. $\square$

Remarque 2.3. Lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent on utilise également les notations suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

La proposition ci-dessus peut alors se traduire sous la forme : f est dérivable en z_0 si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en z_0 avec de plus $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$. Dans ce cas $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Puisqu'une fonction holomorphe est différentiable si on la voit comme fonction sur $\mathbb{R}^2$, toutes les propriétés valables pour les fonctions différentiables sont vraies pour les fonctions holomorphes. On utilisera la propriété suivante qui est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis (voir le cours de fonctions de plusieurs variables de L2). On en donnera une autre preuve dans la Section 4.4.

Proposition 2.7. Si Ω est un domaine de $\mathbb{C}$, i.e. un ouvert connexe par arcs, et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe de dérivée nulle alors f est constante.

Remarque 2.4. Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ le résultat analogue repose aussi sur les accroissements finis et n'est vrai que pour les fonctions définies sur un intervalle. L'hypothèse "intervalle" est ici remplacée par "connexe par arcs" : l'ensemble de définition doit être en un seul morceau.

Les conditions de Cauchy-Riemann peuvent paraître anodines au premier abord mais ont en fait de grosses conséquences. Si une fonction f est holomorphe alors il y a un lien très fort entre ses parties réelles et imaginaires (c'est ce que disent les conditions de Cauchy-Riemann) : si on connaît l'une alors essentiellement on connaît l'autre. Voici quelques propriétés qui en découlent. Elles seront montrées en TD.

- Si une fonction holomorphe sur un domaine Ω est à valeurs réelles alors cette fonction est constante.
- Si la partie réelle, resp. imaginaire, d'une fonction holomorphe sur un domaine Ω est constante alors la fonction est constante.
- Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe sur le domaine Ω et si $\bar{f} : z \mapsto \overline{f(z)}$ est aussi holomorphe, alors f est constante.
- Si les parties réelles P et imaginaires Q de f sont des fonctions polynômes des variables x et y , alors la fonction f est une fonction polynôme de la variable $z = x + iy$.

CHAPITRE 3

FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE ENTIÈRE

Les seuls exemples de fonctions dérivables dans $\mathbb{C}$ qu'on a vus jusqu'ici sont ceux des fonctions polynômes et des quotients de fonctions polynômes. Afin d'enrichir cette "collection" de fonctions dérivables l'étape naturelle suivante est d'essayer les polynômes de "degré infini", autrement dit les fonctions définies par des séries entières.

3.1 Suites et séries de fonctions de la variable complexe

Certains des résultats que vous avez vus en L2 sur les suites et séries de fonctions d'une variable réelle se généralisent facilement au cas des fonctions d'une variable complexe. On les utilisera par la suite surtout dans le cadre des séries entières.

Définition 3.1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que

1. $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si pour tout $z \in \Omega$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z)$.
2. $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$.

La convergence uniforme implique bien entendu la convergence simple. Son intérêt se trouve par exemple dans la propriété suivante.

Proposition 3.1. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur Ω alors sa limite f est continue sur Ω .

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $z \in \Omega$ vérifie $|z - z_0| < \delta$ alors $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |(f(z) - f_n(z)) + (f_n(z) - f_n(z_0)) + (f_n(z_0) - f(z_0))| \\ &\leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq 2 \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z_0) - f(z_0)|. \end{aligned}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pour ce N on a donc pour tout $z \in \Omega$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_N(z) - f_N(z_0)|.$$

Puisque f_N est continue il existe $\delta > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta$ alors $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Finalement pour tout z tel que $|z - z_0| < \delta$ on a $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ce qui prouve que f est continue en z_0 . C'est vrai pour tout $z_0 \in \Omega$ donc f est continue sur Ω . $\square$

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, même à valeurs complexes, on a également le résultat suivant sur l'interversion limite/intégrale.

Proposition 3.2. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.*

Remarque 3.1. 1. La convergence uniforme garantit que f est continue donc l'intégrale de f a un sens.

2. La convergence de la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n$ fait partie du résultat.

3. Lorsque la convergence n'est pas uniforme, mais qu'on a juste convergence simple, les deux propriétés ci-dessus (continuité de la limite et interversion limite / intégrale) sont fausses en général (voir les cours Intégration et Analyse 3 de L2).

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b - a) \times \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$$

et le résultat découle de la convergence uniforme et du théorème des gendarmes. $\square$

Remarque 3.2. Dans le cas des fonctions d'une variable réelle vous avez également vu un résultat concernant la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions. Les choses sont un peu différentes (et en fait plus simples) pour les fonctions d'une variable complexe, voir les compléments à la fin du Chapitre 5 (paragraphe 5.5.2).

Dans la suite on utilisera les résultats précédents surtout dans le cadre des séries de fonctions.

Définition 3.2. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. On dit que

- la série $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n f_k \right)_n$ converge simplement vers f . On notera alors $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.
- la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n f_k \right)_n$ converge uniformément vers f , i.e. si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| = 0.$$

3. la série $\sum f_n$ converge normalement s'il existe $(\alpha_n)_n$ telle que $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\sum \alpha_n$ converge. De façon équivalente, $\sum f_n$ converge normalement si la série numérique de terme général $\sup_{z \in \Omega} |f_n(z)|$ converge.

Proposition 3.3. Si la série $\sum f_n$ converge normalement alors elle converge uniformément. En particulier

1. si les f_n sont continues sur Ω alors la fonction définie par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ est continue sur Ω .
2. si les f_n sont définies et continues sur un intervalle $[a, b]$ alors f est continue et
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Démonstration. Soit $(\alpha_n)_n$ telle que $|f_n(z)| \leq \alpha_n$ pour tout $z \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\sum \alpha_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, pour tout $z \in \Omega$ la série $\sum |f_n(z)|$ converge donc, d'après la Proposition 1.6, la série $\sum f_n(z)$ converge. La fonction $f = \sum f_n$ est donc bien définie. De plus, pour tous $m > n$ et tout $z \in \Omega$ on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^m \alpha_k.$$

En passant à la limite $m \rightarrow \infty$ on a ainsi, pour tout $z \in \Omega$, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$ et donc

$\sup_{z \in \Omega} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k$. Le membre de droite est le reste d'une série convergente donc tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit la convergence uniforme de $\sum f_n$ à l'aide du théorème des gendarmes.

Les deux autres propriétés découlent directement de la convergence uniforme et des Propositions 3.1 et 3.2 appliquées à la suite des sommes partielles. $\square$

3.2 Séries entières

Vous avez étudié les séries entières en L2, en vous concentrant principalement sur le cas de la variable réelle, i.e. des séries de la forme $\sum a_n x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$. Les définitions et résultats de ce paragraphe sont totalement similaires dans le cas de la variable complexe, mise à part la preuve de la Proposition 3.13. On démontrera ici “à la main” le résultat sur la dérivation terme à terme puisqu'on n'a pas, pour le moment, de propriétés générales sur la dérivation des séries de fonctions de la variable complexe.

Définition 3.3. On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition 3.4. On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la quantité

$$R := \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty].$$

$D(0, R)$ est appelé disque de convergence de la série entière.

Remarque 3.3. R est bien défini car l'ensemble $\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$ est non-vide (il contient 0). Si $R = +\infty$ on a simplement $D(0, R) = \mathbb{C}$.

La propriété élémentaire suivante sera régulièrement utilisée par la suite.

Proposition 3.4. Si $0 \leq r_1 \leq r_2$ et $(a_n r_2^n)_n$ est bornée alors $(a_n r_1^n)_n$ est aussi bornée. Par conséquent la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée pour tout $r < R$.

La terminologie rayon de convergence est justifiée par le résultat suivant.

Proposition 3.5. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, donc convergente.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ la série $\sum a_n z^n$ est (grossièrement) divergente.

Démonstration. 1. Si $R = 0$ il n'y a rien à prouver, on suppose donc $R \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ et soit r tel que $|z| < r < R$. Par définition de R la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée, i.e. il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n r^n| \leq M$ pour tout n . On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n z^n| = |a_n r^n| \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

Comme $\frac{|z|}{r} < 1$ la série $\sum M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |a_n z^n|$ converge.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Par définition de R la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée donc ne tend pas vers 0. Nécessairement la série $\sum a_n z^n$ diverge. $\square$

Remarque 3.4. La proposition montre qu'on pourrait définir de façon équivalente le rayon de convergence par $R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la série } \sum a_n r^n \text{ converge}\}$. Il est cependant plus simple en général de savoir si une suite est bornée plutôt que de voir si elle est le terme général d'une série convergente.

On utilise parfois cette Proposition pour avoir des informations sur le rayon de convergence. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ est tel que $\sum a_n z_0^n$ converge alors $R \geq |z_0|$ et si z_0 est tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $R \leq |z_0|$.

Le domaine de convergence de la série entière est donc essentiellement déterminé par son rayon de convergence : elle converge sur $D(0, R)$ et diverge en dehors de $\overline{D}(0, R)$. Par contre le théorème précédent ne dit rien sur la convergence de la série lorsque $|z| = R$.

Exemple 3.1. Les séries entières $\sum z^n$, $\sum \frac{1}{n^2} z^n$ et $\sum \frac{1}{n} z^n$ ont toutes les trois rayon de convergence $R = 1$ (prouvez le). La première diverge pour tout $z \in C(0, 1)$, la deuxième converge pour tout $z \in C(0, 1)$ et on vérifie facilement que la troisième diverge si $z = 1$ et converge si $z = -1$ (on peut en fait montrer qu'elle converge pour tout $z \in C(0, 1) \setminus \{1\}$).

La somme d'une série entière est une fonction f définie a priori sur l'ouvert $D(0, R)$. Afin d'étudier les propriétés de f le résultat suivant jouera un rôle crucial.

Proposition 3.6. *Pour tout $r < R$ la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, r)$. En particulier la fonction f définie sur $D(0, R)$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est continue.*

Démonstration. L'idée de la preuve est similaire à celle de la Proposition 3.5. Soit $r < R$ et ρ tel que $r < \rho < R$. Puisque $\rho < R$ la suite $(a_n \rho^n)_n$ est bornée d'après la Proposition 3.4. Autrement dit il existe $M \geq 0$ tel que $|a_n \rho^n| \leq M$ pour tout n . Pour tout $z \in D(0, r)$ on a

$$|a_n z^n| = |a_n \rho^n| \times \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Comme $\frac{r}{\rho} \in]0, 1[$ la série $\sum M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ converge et donc la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, r)$.

En utilisant la Proposition 3.3 on en déduit que f est continue sur $D(0, r)$ pour tout $r < R$ et donc sur $D(0, R)$. En effet, si $z_0 \in D(0, R)$ il existe r tel que $|z_0| < r < R$. En particulier $z_0 \in D(0, r)$ et comme f est continue sur $D(0, r)$ elle est continue en z_0 . $\square$

Les critères suivants donnent deux moyens de calculer le rayon de convergence. Ils découlent des critères de D'Alembert et de Cauchy pour les séries numériques à termes positifs.

Proposition 3.7 (Règle de D'Alembert). *On suppose que $a_n \neq 0$ pour n assez grand. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ (éventuellement $\ell = +\infty$) alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$, avec la convention $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$.*

Proposition 3.8 (Règle de Cauchy). *Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \ell$ (éventuellement $\ell = +\infty$) alors la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R = \frac{1}{\ell}$, avec les mêmes conventions que ci-dessus.*

Remarque 3.5. *Dans la règle de Cauchy on peut remplacer $\lim$ par $\limsup$. Cette dernière a l'avantage de toujours exister contrairement à la limite. On parle alors de règle d'Hadamard (ou de Cauchy-Hadamard).*

Démonstration. On montre la règle de D'Alembert, celle de Cauchy se montre de la même manière et est laissée à titre d'exercice.

On suppose donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$. Si $z = 0$ la série $\sum a_n z^n$ converge. Soit donc $z \neq 0$. On a alors

$$\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \times |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell |z|.$$

Pour tout z tel que $\ell |z| < 1$ la série converge (règle de D'Alembert pour les séries numériques) et donc, voir la Remarque 3.4, $R \geq |z|$. Ainsi $R \geq \sup\{|z| \mid \ell |z| < 1\} = \frac{1}{\ell}$. Inversement pour tout z tel que $\ell |z| > 1$ la série diverge donc, toujours en utilisant la Remarque 3.4, $R \leq |z|$. Ainsi $R \leq \inf\{|z| \mid \ell |z| > 1\} = \frac{1}{\ell}$. Au final on a bien $R = \frac{1}{\ell}$. $\square$

Remarque 3.6. Ces règles sont souvent utilisées dans la pratique. Il peut cependant parfois être utile de revenir aux critères de D'Alembert ou Cauchy pour les séries numériques. Par exemple si on veut le rayon de convergence de la série $\sum n3^n z^{2n}$. Ici tous les a_{2n+1} sont nuls, et $a_{2n} = n3^n$. Donc on ne peut pas appliquer la règle de D'Alembert pour les séries entières. Par contre si on utilise la règle de D'Alembert pour les séries numériques (à z fixé donc), on a pour tout $z \neq 0$

$$\left| \frac{(n+1)3^{n+1}z^{2(n+1)}}{n3^n z^{2n}} \right| = 3 \frac{n+1}{n} |z|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3|z|^2.$$

On en déduit que la série converge si $3|z|^2 < 1$ et diverge si $3|z|^2 > 1$, et donc que $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

On n'oubliera pas non plus de revenir parfois à la définition. Par exemple, la série $\sum z^{n^2}$ a pour rayon de convergence 1. Notez qu'ici la suite a_n est définie par $a_n = 1$ si n est un carré et $a_n = 0$ sinon, on ne pourra donc même pas essayer d'appliquer la règle de D'Alembert pour les séries entières. A l'aide de la définition on obtient également facilement la propriété de "comparaison" suivante.

Proposition 3.9. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

1. Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_b \leq R_a$.
2. Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

Exemple 3.2. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right) z^n$ est $R = 1$. Cela découle de $\ln \left(1 + \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right) \sim \frac{1}{n}$ (justifiez-le).

Les propriétés générales ci-dessous s'intéressent à la somme et au produit de séries entières.

Proposition 3.10. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , et $\lambda \in \mathbb{C}$. On note f et g les sommes de ces séries sur leur disque de convergence respectif. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + \lambda b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ et sur $D(0, \min\{R_a, R_b\})$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) z^n = f(z) + \lambda g(z)$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, donc la série de terme général $(a_n + \lambda b_n) z^n = a_n z^n + \lambda b_n z^n$ converge et on a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) z^n = f(z) + \lambda g(z)$. Cela prouve, voir la Remarque 3.4, que le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + \lambda b_n) z^n$ vérifie $R \geq |z|$. Comme c'est vrai pour tout $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ on en déduit que $R \geq \min\{R_a, R_b\}$. $\square$

Remarque 3.7. 1. On peut avoir $R > \min\{R_a, R_b\}$. Il suffit de prendre $a_n = -b_n = 1$ pour tout n et $\lambda = 1$. On aura alors $R_a = R_b = 1$ tandis que $a_n - b_n = 0$ et donc $R = +\infty$.

2. Si $R_a \neq R_b$ alors le rayon de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est exactement $R = \min\{R_a, R_b\}$. Prenons le cas $R_a < R_b$. Si $R_a < |z| < R_b$ la série $\sum a_n z^n$ diverge tandis que $\sum b_n z^n$ converge et donc $\sum (a_n + b_n) z^n$ diverge. On en déduit que $R \leq |z|$ (voir la Remarque 3.4). C'est vrai pour tout $R_a < |z| < R_b$ et donc $R \leq R_a$. Combiné avec la proposition ci-dessus on en déduit que $R = R_a = \min\{R_a, R_b\}$.

Afin d'étudier le produit de séries entières on aura besoin du résultat suivant.

Proposition 3.11. *Soit $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ soient absolument convergentes. Alors la série de terme général $\gamma_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k}$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \right). \quad (3.1)$$

La série $\sum \gamma_n$ est appelée produit de Cauchy des séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$.

Remarque 3.8. *Si seule l'une des deux séries $\sum \alpha_n$ ou $\sum \beta_n$ est absolument convergente et que l'autre est convergente mais pas absolument alors on peut montrer que $\sum \gamma_n$ est convergente (mais pas absolument) et que (3.1) reste vraie. Si par contre aucune des deux séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ n'est supposée absolument convergente, tout en étant toutes les deux convergentes, il se peut que la série $\sum \gamma_n$ diverge (voir TD).*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |\gamma_n| &\leq \sum_{n=0}^N \left(\sum_{k=0}^n |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}| \right) && \text{Inégalité triangulaire} \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}| && \text{Intervention des sommes sur } n \text{ et } k \\ &= \sum_{k=0}^N \left(|\alpha_k| \times \sum_{n=k}^N |\beta_{n-k}| \right) \\ &= \sum_{k=0}^N \left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{N-k} |\beta_j| \right) && \text{Décalage d'indice} \\ &\leq \sum_{k=0}^N \left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j| \right) && \text{Termes positifs} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|. && \text{Termes positifs} \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^N |\gamma_n| \right)_N$ est donc bornée. On en déduit que la série $\sum |\gamma_n|$ converge (car c'est une série à termes positifs).

On montre maintenant (3.1). Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{n=0}^N \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^N \beta_n \right) - \sum_{k=0}^N \gamma_k \right| &= \left| \sum_{n,m=0}^N \alpha_n \beta_m - \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^k \alpha_n \beta_{k-n} \right| \\ &= \left| \sum_{n,m=0}^N \alpha_n \beta_m - \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{0 \leq n, m \leq N \\ n+m=k}} \alpha_n \beta_m \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{0 \leq n, m \leq N} \alpha_n \beta_m - \sum_{\substack{0 \leq n, m \leq N \\ n+m \leq N}} \alpha_n \beta_m \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{0 \leq n, m \leq N \\ n+m > N}} \alpha_n \beta_m \right| \\
&\leq \sum_{\substack{0 \leq n, m \leq N \\ n+m > N}} |\alpha_n| \times |\beta_m| && \text{Inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ n+m > N}} |\alpha_n| \times |\beta_m| && \text{Termes positifs} \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{n=0}^k |\alpha_n| \times |\beta_{k-n}|.
\end{aligned}$$

Le membre de droite est le reste de la série de terme général $u_k = \sum_{n=0}^k |\alpha_n| \times |\beta_{k-n}|$. Comme les séries $\sum |\alpha_n|$ et $\sum |\beta_n|$ convergent (absolument), d'après la première partie de la preuve la série $\sum u_k$ converge (absolument) donc son reste tend vers 0. En passant à la limite $N \rightarrow \infty$ on obtient donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N \alpha_n \right) \left(\sum_{n=0}^N \beta_n \right) - \sum_{n=0}^N \gamma_n = 0,$$

et comme les trois séries $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$ et $\sum \gamma_n$ convergent cela prouve (3.1). $\square$

Proposition 3.12. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , et de sommes f et g . Si $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ et sur le disque de rayon $\min\{R_a, R_b\}$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z) \times g(z)$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Alors, d'après la Proposition 3.5, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument donc on peut appliquer la Proposition 3.11. On en déduit que la série de terme général

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = c_n z^n$$

converge et vérifie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)g(z)$. La fin de la preuve est ensuite la même que celle de la Proposition 3.10. $\square$

La question naturelle suivante est celle de la dérivabilité, au sens complexe, des fonctions définies par des séries entières.

Proposition 3.13. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ a pour rayon de convergence R . De plus la fonction f définie sur $D(0, R)$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe et on a, pour tout $z \in D(0, R)$,

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

En raisonnant par récurrence on en déduit le résultat important suivant.

Corollaire 3.1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Sa somme définit une fonction infiniment dérivable sur $D(0, R)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in D(0, R)$ on a

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n z^{n-k}.$$

En particulier on a $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.9. A l'aide des séries entières on peut ainsi fabriquer de nouvelles fonctions holomorphes, en plus des polynômes et des fractions rationnelles. On peut également remarquer que, tout comme pour les polynômes et les fractions rationnelles, ces fonctions sont automatiquement C^∞ (sur leur disque de convergence).

Démonstration de la Proposition. On note R' le rayon de convergence de la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$. Montrons que $R = R'$. Si $r < R'$ la Proposition 3.4 assure que la suite de terme général $b_n = (n+1)a_{n+1}r^n$ est bornée. Or, pour $n \geq 1$,

$$|a_n r^n| = r |a_n r^{n-1}| \leq r \times |n a_n r^{n-1}|$$

donc la suite $(a_n r^n)_n$ est aussi bornée ce qui prouve que $R \geq r$. Comme c'est vrai pour tout $r < R'$ on en déduit que $R \geq R'$. Réciproquement, soit $r < R$ et ρ tel que $r < \rho < R$. On a

$$(n+1)a_{n+1}r^n = \frac{1}{\rho}(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n a_{n+1}\rho^{n+1}.$$

Puisque $\rho < R$ la suite $(a_n \rho^n)_n$ est bornée et comme $\frac{r}{\rho} < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n = 0$.

Finalement la suite $((n+1)a_{n+1}r^n)_n$ tend vers 0 donc est bornée. Cela prouve que $r \leq R'$. Comme c'est vrai pour tout $r < R$ on obtient $R \leq R'$.

Montrons maintenant que f est dérivable sur $D(0, R)$ et que $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Soit $z_0 \in D(0, R)$ et $r < R - |z_0|$, de façon à ce que $D(z_0, r) \subset D(0, R)$ (faites un dessin). Pour tout $z \in D(z_0, r)$, $z \neq z_0$, on a

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}.$$

On doit donc montrer que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

Sur $D(z_0, r)$ on définit la fonction g_n par $g_n(z) = a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$ si $z \neq z_0$ et $g_n(z_0) = n a_n z_0^{n-1}$. Les fonctions g_n sont continues sur $D(z_0, r)$ (expliquez pourquoi). On va montrer que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $D(z_0, r)$. Soit $z \in D(z_0, r)$ et $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} |z^n - z_0^n| &= \left| (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z^{n-1-k} \right| \\ &\leq |z - z_0| \times \sum_{k=0}^{n-1} |z_0|^k |z|^{n-1-k} && \text{Inégalité triangulaire} \\ &\leq |z - z_0| \times \sum_{k=0}^{n-1} (|z_0| + r)^k (|z_0| + r)^{n-1-k} && \text{car } z \in D(z_0, r) \Rightarrow |z| \leq r + |z_0| \\ &= |z - z_0| \times n (|z_0| + r)^{n-1}. \end{aligned}$$

On a donc $|g_n(z)| \leq n |a_n| (|z_0| + r)^{n-1}$ pour tout $z \in D(z_0, r)$, sauf éventuellement z_0 , et $n \geq 1$. On vérifie que ça reste vrai en $z = z_0$. Puisque $|z_0| + r < R$ la série $\sum n |a_n| (|z_0| + r)^{n-1}$ converge donc la série $\sum g_n$ converge normalement sur $D(z_0, r)$. Sa somme est donc continue, en particulier elle est continue en z_0 , i.e.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}. \quad \square$$

Dans tout ce qu'on a fait on a considéré des séries entières "centrées en 0". Si $z_0 \in \mathbb{C}$ on peut de façon analogue considérer des séries entières "centrées en z_0 ", i.e. de la forme $\sum a_n (z - z_0)^n$. Si la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R alors la série $\sum a_n (z - z_0)^n$ converge normalement sur tout disque $D(z_0, r)$ avec $r < R$ et diverge pour tout $z \notin \overline{D}(z_0, R)$. Par ailleurs, si g désigne la somme de la série $\sum a_n z^n$ et f celle de la série $\sum a_n (z - z_0)^n$ alors pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a $f(z) = g(z - z_0)$. Tous les résultats qu'on a vus dans cette section se généralisent donc immédiatement aux fonctions définies par des séries entières de la forme $\sum a_n (z - z_0)^n$. En particulier si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ sur $D(z_0, R)$ alors f est C^∞

et pour tout n on a $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, i.e.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Remarque 3.10. La formule ci-dessus doit vous sembler familière. Pourquoi ?

3.3 La fonction exponentielle

Parmi toutes les fonctions définies par une série entière l'une des plus importantes, si ce n'est la plus importante, est certainement la fonction exponentielle.

Définition-Proposition 3.5. La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$. Sa somme est appelée fonction exponentielle, notée $\exp(z)$ ou e^z .

Démonstration. Il suffit d'appliquer la règle de D'Alembert. $\square$

Définition 3.6. Les fonctions $\cos$ (cosinus) et $\sin$ (sinus) sont définies sur $\mathbb{C}$ par

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On a alors $\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 3.11. 1. Par définition, les restrictions des fonctions exponentielles, sinus et cosinus à $\mathbb{R}$ sont à valeurs réelles (ce sont les sommes de séries entières à coefficients réels). En particulier si $t \in \mathbb{R}$, et puisque $\exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$, on a $\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it))$. Attention, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ les nombres $\cos(z)$ et $\sin(z)$ ne sont pas réels et $\cos(z)$ et $\sin(z)$ ne sont pas les parties réelles et imaginaires de $\exp(iz)$.

2. On définit aussi les fonctions $\cosh$ et $\sinh$ par $\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$ et $\sinh(z) = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$. Par définition on a alors $\cos(z) = \cosh(iz)$ et $\sin(z) = -i \sinh(iz)$. Les fonctions $\cos$ et $\cosh$ sont paires tandis que les fonctions $\sin$ et $\sinh$ sont impaires.

Dans cette section on va établir un certain nombre de propriétés de la fonction exponentielle, et leur lien avec les fonctions cosinus et sinus, en n'utilisant que les Définitions 3.5 et 3.6 et cela sans rien présupposer de connu sur ces fonctions y compris lorsque $z = x$ est réel. On ne suppose pas non plus avoir connaissance du nombre π que l'on va construire à l'occasion. On verra plus loin, voir la Remarque 5.5 page 60, que cette définition coïncide bien avec celle usuelle reliant le rayon d'un cercle et son périmètre.

Théorème 3.1. La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(0) = 1$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
3. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\exp(z) \neq 0$ et $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.
5. La fonction $\exp$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifie $\exp'(z) = \exp(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. De même les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et vérifient $\cos'(z) = -\sin(z)$ et $\sin'(z) = \cos(z)$.
6. La restriction de $\exp$ à $\mathbb{R}$ définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.
7. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$. En particulier $|\exp(z)| = 1$ si et seulement si $z = it \in i\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a alors $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.
8. Il existe un unique réel positif, noté π , tel que $e^{i\pi/2} = i$ et tel que $e^z = 1$ si et seulement si $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$, i.e. $z = 2in\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. On a alors $\exp(i\pi) = -1$.
9. La fonction $\exp$ est périodique de période $2i\pi$. Par conséquent les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont périodiques de période 2π .

10. La fonction $t \mapsto \exp(it)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Pour tout $z \in \mathbb{U}$ il existe un unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $z = \exp(it)$ et pour tout $t' \in \mathbb{R}$ on a $z = \exp(it')$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t' = t + 2n\pi$.

11. La fonction $\exp$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Si $z \in \mathbb{C}^*$ on a $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. La propriété 10. assure alors qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \exp(it)$ et que t est unique à multiple de 2π près. Cela conduit à la définition :

Définition 3.7. Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. Tout nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \exp(it)$ est appelé un argument de z .

La proposition qui suit découle directement de la propriété 10. du théorème.

Proposition 3.14. Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors z possède un unique argument à addition d'un multiple de 2π près. Ainsi étant donné n'importe quel intervalle I semi-ouvert de longueur 2π , i.e. de la forme $I = [a, a + 2\pi[$ ou $I =]a, a + 2\pi]$, tout nombre complexe non nul admet un unique argument dans I .

La suite de cette section est consacrée à démontrer en partie le Théorème 3.1. On va voir que les propriétés 1. à 7. sont assez simples à prouver. La suite demande un peu plus de travail. En particulier la propriété 8. est délicate. Sa preuve, ainsi que celles des propriétés 10. et 11., se trouve dans la section Compléments en fin de chapitre.

- La propriété 1. est immédiate par définition.

- Les propriétés de la conjugaison assurent que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\overline{\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^N \frac{\bar{z}^n}{n!}$ et la propriété 2. découle alors de la continuité de la fonction $z \mapsto \bar{z}$:

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z}).$$

- La propriété 3. utilise la Proposition 3.11. Soient $\alpha_n = \frac{z_1^n}{n!}$ et $\beta_n = \frac{z_2^n}{n!}$. Ces séries convergent absolument donc on a $\exp(z_1) \exp(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$ où

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^n \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!},$$

i.e. $\exp(z_1) \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$.

- En prenant alors $z_1 = z = -z_2$ on obtient $\exp(z) \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$ ce qui prouve la propriété 4.

- La propriété 5. découle directement de la Proposition 3.13. En particulier on a montré que $\exp(0) = 1$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On retrouve ainsi bien la définition de la fonction exponentielle que vous avez vue en terminale (et dont vous avez jusque là admis l'existence!).

- La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après 5. et vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp'(x) = \exp(x) = \exp(x/2) \exp(x/2) > 0$$

puisque $\exp(x/2) \in \mathbb{R}^*$. La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$. Pour tout $x > 0$ la série définissant la fonction exponentielle est à termes positifs donc $\exp(x) \geq 1 + x$ (sa somme partielle pour $n = 1$) ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$. En utilisant $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ on en déduit la limite en $-\infty$. Cela prouve la propriété 6.

Remarque 3.12. Pour $x > 0$, toujours en utilisant que la fonction exponentielle est la somme d'une série à termes positifs, on peut écrire $\exp(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc $\frac{\exp(x)}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}$. On montre ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$ pour tout entier n (croissances comparées).

- Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)}$. En utilisant 2. et 3. on a donc $|\exp(z)|^2 = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\operatorname{Re}(z)) = (\exp(\operatorname{Re}(z)))^2$. Comme $|\exp(z)|$ et $\exp(\operatorname{Re}(z))$ sont strictement positifs on a bien $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$ et donc $|\exp(z)| = 1$ si et seulement si $\exp(\operatorname{Re}(z)) = 1$, i.e. si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = 0$ puisque $\exp$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ d'après 6. Finalement, si $t \in \mathbb{R}$ on a vu que $\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$ et $\sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it))$ donc $1 = |\exp(it)|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$. Cela prouve la propriété 7.

- La propriété 9. (périodicité de la fonction exponentielle) découle directement de la propriété 3. et de $\exp(2i\pi) = 1$.

3.4 Logarithme complexe

Comme dans $\mathbb{R}$ on va chercher à *inverser* la fonction exponentielle, i.e. trouver une fonction f telle que $\exp(f(z)) = z$. D'une part on a vu que $\exp$ était surjective sur $\mathbb{C}^*$, en particulier elle ne s'annule pas. Il va donc falloir au moins restreindre l'ensemble de définition d'un éventuel logarithme à $\mathbb{C}^*$. D'autre part, et c'est le plus gros problème, la fonction $\exp$ n'est pas injective! N'importe quel $z \in \mathbb{C}^*$ a plusieurs antécédents par la fonction exponentielle, et même une infinité. On sait cependant de "quelle façon" elle n'est pas injective. En effet, $\exp(w_1) = \exp(w_2)$ si et seulement si $\exp(w_1 - w_2) = 1$ et donc si et seulement si $w_1 - w_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$ (c'est le 8. du Théorème 3.1). En d'autres termes si $f(z)$ est un "logarithme" de z alors tout nombre de la forme $f(z) + 2in\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, en est également un (et ils sont tous de cette forme).

 **Attention !** Rien n'interdit pour le moment que l'entier n dépende de z .

Plus précisément, si $z \neq 0$ et si on écrit $z = |z| \exp(i\arg(z))$ où $\arg(z)$ est un argument de z (n'importe lequel) alors

$$\exp(f(z)) = z \iff \exp(f(z)) = |z| \exp(i\arg(z)) \iff \exp(f(z)) = \exp(\ln(|z|) + i\arg(z))$$

où $\ln$ est, comme d'habitude, la bijection réciproque de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (la fonction $\ln$ est bien définie d'après le 6. du Théorème 3.1). On a donc envie d'écrire $f(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$ et on retrouve le fait que le logarithme de z n'est défini qu'à l'addition d'un multiple entier de $2i\pi$ près puisque l'argument n'est défini qu'à l'addition d'un multiple entier de 2π près.

Définition 3.8. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme sur Ω si f est continue et vérifie $\exp(f(z)) = z$ pour tout $z \in \Omega$.

Avec ce qu'on a dit ci-dessus, si une détermination du logarithme existe sur Ω elle n'est pas unique puisqu'on peut lui ajouter un multiple entier de $2i\pi$. C'est en fait essentiellement la seule possibilité. On rappelle qu'un domaine Ω est un ouvert connexe par arcs.

Proposition 3.15. Si Ω est un domaine de $\mathbb{C}$ et si f et g sont deux déterminations du logarithme sur Ω alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = g(z) + 2ik\pi$ pour tout $z \in \Omega$.

Remarque 3.13. Ce que dit la proposition ci-dessus c'est que si on se place sur un ensemble Ω connexe par arcs alors l'entier n dans l'écriture de la détermination d'un logarithme ne dépend pas de z .

Démonstration. Pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = z = \exp(g(z))$ donc $\exp(f(z) - g(z)) = 1$. D'après le Théorème 3.1, pour tout $z \in \Omega$ il existe $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) - g(z) = 2ik(z)\pi$. Ce que dit la proposition c'est qu'en fait $k(z)$ ne dépend pas de z . On veut donc montrer que la fonction $k : \Omega \ni z \mapsto k(z) \in \mathbb{Z}$ est constante.

Soient $z_1, z_2 \in \Omega$, il faut montrer que $k(z_1) = k(z_2)$. Comme les fonctions f et g sont continues la fonction k est aussi continue. L'idée est de pouvoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires : pour aller d'un entier à un autre, s'ils sont différents il faudrait passer par des valeurs non-entières ce qui est exclus. Pour cela il faut d'abord se ramener à une fonction d'une variable réelle. Puisque Ω est connexe par arcs il existe une fonction continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ et $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout t . La fonction $\varphi = k \circ \gamma : t \mapsto k(\gamma(t))$ est ainsi une fonction d'une variable réelle, continue sur $[a, b]$ (composée de fonctions continues) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et même dans $\mathbb{Z}$. En particulier elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. Si $\varphi(a) = k(z_1) \neq k(z_2) = \varphi(b)$ la fonction φ prendrait toutes les valeurs comprises entre $k(z_1)$ et $k(z_2)$ y compris donc des valeurs non entières. C'est impossible et donc $k(z_1) = k(z_2)$. $\square$

Dans l'idéal on aimerait prendre Ω le plus grand possible, et donc $\Omega = \mathbb{C}^*$. On va voir que ce n'est pas possible, i.e. il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

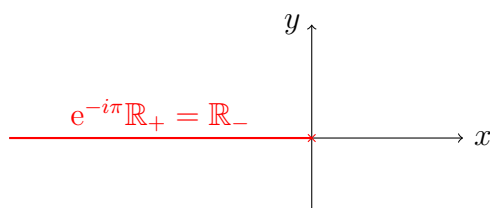
Proposition 3.16. Si Ω est un ouvert contenant $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ alors il n'existe pas de détermination du logarithme sur Ω . En particulier il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'on ait une détermination du logarithme f sur Ω . Comme $\mathbb{U} \subset \Omega$ on peut définir la fonction $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ par $g(t) = f(\exp(it))$. En particulier on a $g(2\pi) = f(\exp(2i\pi)) = f(\exp(0)) = g(0)$. Par ailleurs, comme f est une détermination du logarithme on doit avoir $\exp(f(z)) = z$ et donc $\exp(g(t)) = \exp(f(\exp(it))) = \exp(it)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$ il existe $k(t) \in \mathbb{Z}$ tel que $g(t) = it + 2ik(t)\pi$. Comme la fonction g est continue la fonction $k(t)$ aussi et elle est donc constante (c'est le même argument que celui utilisé dans la Proposition 3.15). On note k sa valeur. Ainsi $g(0) = 2ik\pi$ tandis que $g(2\pi) = 2i\pi + 2ik\pi$. Cela contredit $g(0) = g(2\pi)$.

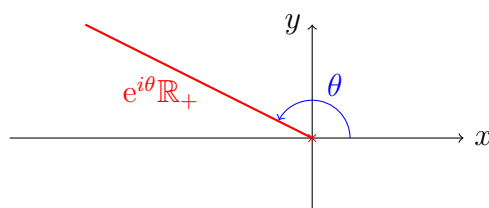
Remarque 3.14. La proposition ci-dessus est en fait plus générale. On peut voir dans la preuve que ce qui pose problème est le fait d'avoir "fait tout un tour autour de 0". Si Ω est un ouvert contenant un chemin fermé "entourant" l'origine on ne pourra pas trouver de détermination du logarithme sur Ω . Pour espérer trouver une détermination du logarithme il faut "couper" $\mathbb{C}$ de façon à ne pas pouvoir faire un tel tour.

Définition-Proposition 3.9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \forall r \geq 0, z \neq r \exp(i\theta)\}$. Alors la fonction exponentielle est bijective de $\{x+iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}, y \in]\theta, \theta+2\pi[\}$ dans Ω_θ . Sa bijection réciproque f_θ est une détermination du logarithme sur Ω_θ . Elle est donnée par $f_\theta(z) = \ln(|z|) + i\arg_\theta(z)$ où $\arg_\theta(z)$ est l'unique argument de z dans l'intervalle $]\theta, \theta+2\pi[$.

Si on prend $\theta = -\pi$ on parle de détermination principale du logarithme et on la note Log . Sa restriction à $]0, +\infty[$ coïncide avec le logarithme népérien.



Domaine de définition du logarithme principal

Domaine de définition de f_θ

Démonstration. Avec tout ce qu'on a fait précédemment la seule chose à justifier est la continuité de ces fonctions (par définition une détermination du logarithme est continue). On le fait dans le cas $\theta = -\pi$.

Si θ est un argument de $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ on a $x = |z| \cos(\theta)$ et $y = |z| \sin(\theta)$. De plus, si $\theta \in]-\pi, \pi[$ on vérifie (faites-le!) que $\frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. On en déduit que pour tout $z = x + iy \in \Omega_{-\pi} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ on a

$$\arg_{-\pi}(x + iy) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

et donc

$$\text{Log}(x + iy) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + i2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

La fonction de deux variables réelles $(x, y) \mapsto \left(\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right)$ est continue (composée, quotient,...) et donc, d'après la Proposition 2.5, la fonction Log est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ $\square$

Dans $\mathbb{R}$ l'autre propriété importante de la fonction logarithme est qu'elle est dérivable et surtout que sa dérivée est la fonction inverse. On a l'analogue dans $\mathbb{C}$: les déterminations du logarithme sont, à constante près, les primitives de la fonction inverse.

Proposition 3.17. Soit Ω un domaine inclus dans $\mathbb{C}^*$.

1. Si f est une détermination du logarithme sur Ω alors f est holomorphe sur Ω et vérifie $f'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega$.
2. Réciproquement, si f est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur Ω alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) - \alpha$ est une détermination du logarithme sur Ω .

Remarque 3.15. En utilisant la Proposition 3.16 on en déduit en particulier que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ bien qu'elle y soit continue et même infiniment dérivable. Par contre elle en a sur les domaines $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$.

Démonstration. 1. Soit f une détermination du logarithme sur Ω et $z_0 \in \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = z$ et donc en particulier $f(z) \neq f(z_0)$ si $z \neq z_0$ (sinon on aurait $\exp(f(z)) = \exp(f(z_0))$). De plus la fonction f est continue donc, par composition de limites et puisque $\exp' = \exp$ on a, pour tout $z \neq z_0$,

$$\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{\exp(f(z)) - \exp(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \exp'(f(z_0)) = \exp(f(z_0)) = z_0.$$

Puisque $z_0 \neq 0$ on en déduit que $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z_0}$ ce qui prouve que f est dérivable en z_0 avec $f'(z_0) = \frac{1}{z_0}$.

2. Soit f une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur Ω . En particulier la fonction f est holomorphe avec $f'(z) = \frac{1}{z}$ donc la fonction définie sur Ω par $g(z) = \frac{\exp(f(z))}{z}$ est holomorphe sur Ω ($0 \notin \Omega$) et vérifie

$$g'(z) = \frac{zf'(z)\exp(f(z)) - \exp(f(z))}{z^2} = 0.$$

Comme Ω est connexe par arcs on peut utiliser la Proposition 2.7 ce qui prouve que g est constante. On note κ sa valeur. Pour tout $z \in \Omega$ on a donc $\exp(f(z)) = \kappa z$. Comme $\exp$ ne s'annule pas on a nécessairement $\kappa \in \mathbb{C}^*$ et puisqu'elle est surjective sur $\mathbb{C}^*$ il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\kappa = \exp(\alpha)$. Ainsi pour tout $z \in \Omega$ on a $\exp(f(z)) = \exp(\alpha)z \Leftrightarrow \exp(f(z) - \alpha) = z$. La fonction $f(z) - \alpha$ est donc bien une détermination du logarithme. $\square$

On termine cette section sur le logarithme en faisant le lien avec les séries entières.

Proposition 3.18. La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour tout $z \in D(1, 1)$ on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n = \text{Log}(z)$ la détermination principale du logarithme.

De façon équivalente, pour tout $z \in D(0, 1)$ on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = \text{Log}(1+z)$.

Démonstration. Le rayon de convergence de la série entière s'obtient facilement avec la règle de D'Alembert. Si on note $f(z)$ la somme de cette série la fonction f est donc holomorphe dans $D(1, 1)$ et pour tout $z \in D(1, 1)$, i.e. tel que $|z-1| < 1$, on a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \stackrel{|z-1|<1}{=} \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

La fonction f est donc une primitive de $\frac{1}{z}$ sur $D(1, 1)$. C'est donc, à constante près, une détermination du logarithme sur $D(1, 1)$. Comme la fonction Log est aussi une telle détermination sur le domaine $D(1, 1)$, d'après la Proposition 3.15 il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \text{Log}(z) + \alpha$ pour tout $z \in D(1, 1)$. Or $f(1) = 0 = \text{Log}(1)$ donc $\alpha = 0$ et $f(z) = \text{Log}(z)$ pour tout $z \in D(1, 1)$. $\square$

Remarque 3.16. Attention, la fonction Log est définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ mais n'est égale à $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ que si $z \in D(1,1)$. Une telle situation arrive souvent. Pensez par exemple à la fonction g définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $g(z) = \frac{1}{1-z}$ mais qui ne coïncide avec la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ que si $|z| < 1$ (si $|z| \geq 1$ la série diverge de toutes façons).

3.5 Complément : fin de la preuve du Théorème 3.1

• Pour montrer le 8. du théorème on va utiliser les fonctions $\cos$ et $\sin$ sur $\mathbb{R}$. On aura pour cela besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1. Soit $(a_n)_n$ une suite (réelle) décroissante qui tend vers 0 et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série alternée $\sum (-1)^n a_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S_{2n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \leq S_{2n}.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$. La suite $(S_{2n})_n$ est donc décroissante et converge vers $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, on a donc nécessairement $S_{2n} \geq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. L'autre inégalité s'obtient de même en montrant que la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante. $\square$

On va maintenant considérer la fonction $\cos$ sur l'intervalle $[0, 2]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}$. En particulier $\cos(2) = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}$. On a une série alternée avec $a_n = \frac{4^n}{(2n)!}$. On vérifie que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} \leq 1$ pour tout $n \geq 2$ (la suite a_n n'est pas décroissante à partir de $n = 0$ c'est pour cela qu'on a isolé les deux premiers termes). D'après le lemme on a donc $\cos(2) \leq -1 + \frac{(-1)^2 2^4}{4!} = -\frac{1}{3} < 0$. On montre maintenant que $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, 2]$. D'après 5. la fonction $\cos$ est dérivable et vérifie $\cos'(t) = -\sin(t)$. On va à nouveau utiliser le lemme, cette fois à la fonction $\sin$. On a bien une série alternée avec cette fois $a_n = \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Si $t \in]0, 2]$ on a bien $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{t^2}{(2n+3)(2n+2)} \leq \frac{4}{6} < 1$, et donc

$$\sin(t) \geq \sum_{n=0}^1 (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t - \frac{t^3}{6} = \frac{t}{6}(6 - t^2) > 0, \quad \forall t \in]0, 2].$$

La fonction $\cos$ est donc continue strictement décroissante sur $[0, 2]$ et vérifie $\cos(0) = 1 > 0$ (par définition de $\cos$ à l'aide de la série entière !) et $\cos(2) < 0$. Il existe donc un unique $t_0 \in]0, 2[$ tel que $\cos(t_0) = 0$. On pose $\pi = 2t_0$. On a alors $\sin^2(\pi/2) = 1 - \cos^2(\pi/2) = 1$ et comme $\sin(t) > 0$ sur $]0, 2]$ et que $\pi/2 \in]0, 2]$ on en déduit que $\sin(\pi/2) = 1$. Finalement $\exp(i\pi/2) = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$. On a alors, en utilisant 3., $\exp(i\pi) = \exp(i\pi/2) \exp(i\pi/2) = i^2 = -1$ et de même $\exp(2i\pi) = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient facilement par récurrence que $\exp(2in\pi) = 1$ et le résultat reste vrai pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ en utilisant 2. avec $z = 2in\pi$.

Il reste à montrer que si $\exp(z) = 1$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2in\pi$. Soit donc un tel $z = x + iy$. Puisque $\exp(z) = 1$ est de module 1, d'après 7. on a $x = 0$. Soit maintenant n la partie entière du nombre réel $\frac{y}{2\pi}$ et $t = y - 2n\pi$. On va montrer que $t = 0$ ce qui prouvera que $z = iy \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Par définition de la partie entière on a $t \in [0, 2\pi[$ et $\exp(it) = \exp(iy - i2n\pi) = \exp(iy) \exp(-i2n\pi) = 1$. On considère alors le nombre complexe $\exp(it/4)$ mis sous forme algébrique, i.e. $\exp(it/4) = u + iv$ avec $u = \cos(\frac{t}{4})$ et $v = \sin(\frac{t}{4})$. Comme $t/4 \in [0, \pi/2[$ l'étude des fonctions cos et sin effectuée ci-dessus montre que $0 < u \leq 1$ et $0 \leq v < 1$ avec $u = 1$ et $v = 0$ si et seulement si $t = 0$. D'autre part en utilisant 3. on a

$$1 = \exp(it) = (\exp(it/4))^4 = (u + iv)^4 = u^4 + v^4 - 6u^2v^2 + 4i(u^3v - uv^3),$$

donc $1 = u^4 + v^4 - 6u^2v^2$ et $0 = uv(u^2 - v^2)$. Si $v \neq 0$ la seconde égalité donne $u^2 - v^2 = 0$ et donc $u = v$ (u et v sont tous les deux positifs). Mais alors $u^4 + v^4 - 6u^2v^2 = -4u^2$ ne peut pas être égal à 1. Ainsi $v = 0$ donc $u = 1$ et on a bien $t = 0$.

Pour finir la preuve de 8. il reste à montrer l'unicité d'un tel nombre positif. Soit donc $\alpha > 0$ vérifiant ces propriétés. En particulier $e^{2i\alpha} = 1$ donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = n\pi$, et en intervertissant les rôles de α et π il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi = m\alpha$ et donc $\alpha = nm\alpha$. Les nombres α et π sont tous les deux strictement positifs donc $n, m \in \mathbb{N}^*$ et on en déduit que $n = m = 1$, i.e. $\alpha = \pi$.

• On montre maintenant que la fonction $t \mapsto \exp(it)$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Soit donc $z \in \mathbb{U}$, on veut montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = \exp(it)$. Si $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$ sont positifs, comme $x^2 + y^2 = 1$ on a $0 \leq x \leq 1$ donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction cos sur $[0, \pi/2]$ il existe $t \in [0, \pi/2]$ tel que $x = \cos(t)$. On a alors $y^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$ et comme y et $\sin(t)$ sont positifs (y par hypothèse et $\sin(t)$ d'après l'étude précédente) on a $y = \sin(t)$. Finalement on a bien $z = x + iy = \exp(it)$. Si x est positif et y est négatif on applique ce qui précède à $\bar{z} = x - iy$ donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{z} = \exp(it)$ et donc $z = \overline{\exp(it)} = \exp(-it) = \exp(i\pi) \exp(it) = \exp(i(t + \pi))$. Le résultat est donc vrai pour tout z de partie réelle positive. Finalement si $x = \operatorname{Re}(z) < 0$ on applique ce qui précède à $-z$. Il existe donc t tel que $-z = \exp(it)$ et donc $z = -\exp(it) = \exp(i\pi) \exp(it) = \exp(i(t + \pi))$. La fonction $t \mapsto \exp(it)$ est donc bien surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$.

On passe à la deuxième partie de la propriété 10., i.e. si $z \in \mathbb{U}$ il existe un unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $z = \exp(it)$ et pour tout $t' \in \mathbb{R}$ on a $z = \exp(it')$ ssi il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t' = t + 2n\pi$. Soit donc $z \in \mathbb{U}$. Si $t, t' \in \mathbb{R}$ sont tels que $z = \exp(it) = \exp(it')$ alors d'après 3. on a $\exp(i(t' - t)) = 1$ et donc d'après 8. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $t' = t + 2n\pi$. De plus, si $z \in \mathbb{U}$ et $t' \in \mathbb{R}$ vérifient $z = \exp(it')$ alors en prenant n la partie entière de $\frac{t'}{2\pi}$ et $t = t' - 2n\pi$ on a bien $t \in [0, 2\pi[$ et $\exp(it) = \exp(it') \exp(-i2n\pi) = z$. Enfin si $t, t' \in [0, 2\pi[$ sont tels que $\exp(it) = \exp(it')$ on a $t' - t \in] - 2\pi, 2\pi[$ et $t' - t \in 2\pi\mathbb{Z}$ donc nécessairement $t' - t = 0$, i.e. $t = t'$. La propriété 10. est donc bien démontrée.

• Il reste finalement à montrer que $\exp$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$ on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(z) = w$. On a $\frac{w}{|w|} \in \mathbb{U}$ donc d'après 10. il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{w}{|w|} = \exp(iy)$, i.e. $w = |w| \exp(iy)$. Mais $|w| \in]0, +\infty[$ donc d'après 6. il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(x) = |w|$ et ainsi $w = |w| \exp(iy) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x + iy)$ ce qui prouve que $\exp$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

CHAPITRE 4

FONCTIONS ANALYTIQUES

Dans le chapitre précédent on est parti d'une série entière, on définit ainsi une fonction (infiniment dérivable) sur un disque ouvert. Dans ce chapitre on va partir du point de vue inverse, à savoir étudier les fonctions que l'on pourra écrire comme somme d'une série entière au voisinage de n'importe quel point de son ensemble de définition. C'est ce qu'on appellera les fonctions analytiques. On étudiera quelques propriétés remarquables de ces fonctions, avant de montrer le résultat particulièrement étonnant : toutes les fonctions de classe C^1 sont analytiques, et donc infiniment dérivables.

4.1 Séries entières et fonctions analytiques

Définition 4.1. Soit Ω un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est développable en série entière en z_0 , noté DSE en z_0 s'il existe une série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ de rayon de convergence R non nul et $r \in]0, R[$ tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sur $D(z_0, r)$. Autrement dit, f est DSE en z_0 si f coïncide avec la somme d'une série entière sur un voisinage de z_0 .

La proposition suivante suit directement de ce qu'on a vu sur les séries entières (Section 3.2).

Proposition 4.1. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est DSE en z_0 alors il existe $r > 0$ tel que f est C^∞ sur $D(z_0, r)$ et pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n. \quad (4.1)$$

En particulier, s'il existe le DSE en z_0 est unique.

Exemple 4.1. Une fonction polynomiale P est DSE en tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et si $n = \deg(P)$ alors

$$P(z) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Exemple 4.2. La fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est DSE en $z_0 = 0$. Pour tout $z \in D(0, 1)$ on a en effet $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Exemple 4.3. On a vu à la fin du chapitre précédent, cf Proposition 3.18, que la fonction Log (logarithme principal) était DSE en $z_0 = 1$.

Exemple 4.4. Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$. En quel(s) z_0 est-elle DSE? Etant donné $z_0 \neq 0$ on cherche à écrire, au voisinage de z_0 , la fonction f sous la forme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. On va donc naturellement chercher à faire apparaître $z - z_0$.

On écrit $f(z) = \frac{1}{z - z_0 + z_0} = \frac{1}{z_0} \times \frac{1}{1 + \frac{z - z_0}{z_0}}$. Si $\left| \frac{z - z_0}{z_0} \right| < 1$, i.e. si $z \in D(z_0, |z_0|)$, on a alors

$$f(z) = \frac{1}{z_0} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z - z_0}{z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

La fonction f est donc DSE en n'importe quel $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Définition 4.2. Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est analytique sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ la fonction f est DSE en z_0 .

Exemple 4.5. L'Exemple 4.4 montre que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Les propositions qui suivent découlent directement de ce qu'on a fait sur les séries entières.

Proposition 4.2. Soit $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont analytiques sur Ω .

Proposition 4.3. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique alors elle est infiniment dérivable et pour tout k sa dérivée $f^{(k)}$ est analytique.

Exercice 4.1. Démontrez ces deux propositions.

Les fonctions polynômiales sont évidemment analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier. On montrera dans la Section 4.4 qu'en fait toutes les fonctions de classe C^1 sont analytiques sur leur ensemble de définition, et de même pour toutes les fonctions dérivables (voir le Chapitre 5).

Exercice 4.2. Montrer que la fonction exponentielle est analytique. Indication : comme dans l'Exemple 4.4 ci-dessus, si $z_0 \in \mathbb{C}$ écrire $z = z_0 + (z - z_0)$.

4.2 Zéros isolés et prolongement analytique

Le fait qu'une fonction soit analytique a des conséquences importantes (en plus du côté infiniment dérivable). Pouvoir développer en série entière permet d'avoir des informations dans tout un disque (le disque de convergence de la série entière) à partir seulement d'informations au voisinage d'un point z_0 (ces informations permettent d'obtenir les dérivées successives $f^{(n)}(z_0)$ et donc la série entière, voir (4.1)).

Proposition 4.4. Soit Ω un domaine et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytique. S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors f est nulle.

Remarque 4.1. 1. Un tel résultat est faux si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ , sans supposer qu'elle est analytique. Vous pouvez montrer que la fonction définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant f n'est pas nulle. Vous pouvez également vérifier qu'elle n'est pas DSE en 0, et donc pas analytique.

2. Si on suppose que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ alors en considérant $g(z) = f(z) - f(z_0)$ on en déduit que f est constante ($g^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc g est nulle). Plus généralement si on suppose que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq N + 1$ alors en considérant

$g(z) = f(z) - \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ on en déduit que f est une fonction polynôme de degré au plus N .

Remarque 4.2. On peut avoir l'impression que demander à toutes les dérivées en un point d'être nulles est une condition forte. On peut voir cela autrement. Si f est analytique sur un domaine Ω et est nulle sur un ouvert non-vide $\Omega_0 \subset \Omega$, même si Ω_0 est "minuscule", alors f est nulle partout ! En effet soit Ω_0 un tel ouvert et $z_0 \in \Omega_0$. Comme f est nulle sur tout Ω_0 toutes ses dérivées sont nulles sur Ω_0 (dérivées de la fonction constante égale à 0 sur Ω_0). En particulier $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc f est nulle (sur tout Ω !).

Démonstration. Soit $Z = \{z \in \Omega \mid f^{(n)}(z) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$. On va montrer que $Z = \Omega$ ce qui prouvera en particulier que $f(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$.

On commence par montrer que l'ensemble Z possède les deux propriétés suivantes :

1. Z est ouvert,
 2. Si $(z_k)_k$ est une suite d'éléments de Z telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z \in \Omega$ alors $z \in Z$. On dit que Z est un fermé de Ω (on a supposé que la limite était au moins dans Ω).
1. Soit $z_1 \in Z \subset \Omega$. f est analytique sur Ω donc il existe $r > 0$ tel que sur $D(z_1, r)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!} (z - z_1)^n$. Comme $z_1 \in Z$ la fonction f est donc constante égale à zéro sur $D(z_1, r)$ et donc $D(z_1, r) \subset Z$. L'ensemble Z est bien ouvert.
2. Soit $(z_k)_k$ dans Z telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z \in \Omega$. Si $n \in \mathbb{N}$ on a donc $f^{(n)}(z_k) = 0$ pour tout k et comme $f^{(n)}$ est continue sur Ω , en particulier en z , on en déduit que $f^{(n)}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n)}(z_k) = 0$ (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse $z \in \Omega$). C'est vrai pour tout n donc $z \in Z$.

On va en déduire que $Z = \Omega$. Par définition de Z on sait déjà que $Z \subset \Omega$ et il suffit de montrer que $\Omega \subset Z$, i.e. pour tout $z_1 \in \Omega$ on a $z_1 \in Z$. Soit donc $z_1 \in \Omega$. L'hypothèse de la proposition est qu'il existe $z_0 \in Z$. Comme Ω est un domaine il est connexe par arcs. Donc il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue tel que $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$ et $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0, 1]$. On considère $J = \{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in Z\}$. On va montrer que $1 \in J$ et donc que $z_1 = \gamma(1) \in Z$.

L'ensemble J est borné (il est inclus dans $[0, 1]$) et non-vide puisque $0 \in J$. Il admet donc une borne supérieure T . Par définition de la borne supérieure il existe $(t_k)_k \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $t_k \rightarrow T$. Par définition de J pour tout k on a $z_k = \gamma(t_k) \in Z$ et par continuité de γ on a $z_k \rightarrow \gamma(T) =: z \in \Omega$. La propriété 2. ci-dessus prouve que $z \in Z$ et donc $T \in J$. Montrons enfin que $T = 1$. Par la propriété 1. Z est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(z, \varepsilon) \subset Z$.

Puisque γ est continue il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - T| < \delta$ alors $|\gamma(t) - z| = |\gamma(t) - \gamma(T)| < \varepsilon$ et donc $\gamma(t) \in Z$. Autrement dit $]T - \delta, T + \delta[\cap [0, 1] \subset J$. Si $T < 1$ on pourra trouver $t \in]T - \delta, T + \delta[\cap [0, 1]$ avec $t > T$, cela contredit la définition de $T = \sup J$.

Remarque 4.3. *Ce qu'on a montré ci-dessus est qu'en fait si Ω est connexe par arcs alors un sous-ensemble non-vide de Ω (ici Z) qui est à la fois ouvert et fermé dans Ω est égal à Ω tout entier. Un ensemble qui vérifie cette propriété est dit connexe et on a donc montré que si Ω est connexe par arcs alors Ω est connexe. Dans la plupart des livres on trouve en fait comme définition d'un domaine que c'est un ouvert connexe. On peut en fait montrer que pour les ouverts de $\mathbb{C}$ les deux notions de connexe et connexe par arcs coïncident. La notion d'ensemble connexe par arcs est plus intuitive que celle de connexe, c'est pour ça qu'on l'a choisie dans la définition d'un domaine.*

Remarque 4.4. *Le seul endroit de la preuve où on a utilisé la connexité par arcs de Ω est pour affirmer que n'importe quel $z_1 \in \Omega$ pouvait être relié à z_0 par un chemin. Si Ω n'est pas connexe par arcs ce qu'on obtient c'est que l'ensemble Z contient au moins les points z_1 qui peuvent être reliés à z_0 par un chemin. C'est ce qu'on appelle la composante connexe par arcs de Ω contenant z_0 , et on montre donc que la fonction f est nulle sur, au moins, la composante connexe par arcs de Ω contenant z_0 .*

Théorème 4.1. *[Principe des zéros isolés] Soit Ω un domaine et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non-nulle. Alors l'ensemble $Z(f) := \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$ des zéros de f est un ensemble discret, i.e. tout zéro de f est isolé : pour tout $z_0 \in Z(f)$ il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \cap Z(f) = \emptyset$, autrement dit pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a $f(z) \neq 0$.*

Démonstration. Soit f analytique non-nulle et $z_0 \in Z(f)$. D'après la proposition précédente il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (sinon f serait nulle). Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. Comme f est DSE en z_0 il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n = (z-z_0)^{n_0} \left[\frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^{n-n_0} \right]. \quad (4.2)$$

Le terme entre crochets est la somme d'une série entière sur $D(z_0, R)$. Sa somme $g(z)$ est donc continue, en particulier $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0) = \frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} \neq 0$. Donc il existe $0 < r < R$ tel que g ne s'annule pas sur $D(z_0, r)$. Comme $(z-z_0)^{n_0}$ ne peut s'annuler qu'en z_0 on en déduit que pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a $f(z) \neq 0$. $\square$

Comme le montre la preuve, l'important est que f soit analytique et pas qu'elle soit définie sur $\mathbb{C}$. On peut définir de façon analogue la notion de fonction analytique pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et le résultat reste vrai. Par contre il est faux si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est seulement C^∞ .

Exercice 4.3. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ si $x > 0$. Montrer que f est C^∞ . Quel est l'ensemble des zéros de f ? Comparez également ce qui se passe ici avec le résultat de la Proposition 4.4.*

Corollaire 4.1. *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non-nulle. Pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$ la fonction f admet un nombre fini de zéros dans K . Par conséquent l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est au plus dénombrable.*

Démonstration. Voir la feuille de TD.

Remarque 4.5. L'équation (4.2) montre que si f est analytique non nulle alors pour tout zéro z_0 de f il existe $n_0 \geq 1$ tel que $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$ avec g telle que $g(z_0) \neq 0$. De plus cet entier est donné par $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. On verra par la suite que g est alors analytique (on sait au moins qu'elle est DSE en z_0). Par analogie avec les polynômes on a la définition suivante.

Définition 4.3. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ non nulle et $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ est appelé l'ordre de z_0 (en tant que zéro de f).

Corollaire 4.2. Soit Ω un domaine et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ l'ensemble $f^{-1}(\{\alpha\}) = \{z \in \Omega \mid f(z) = \alpha\}$ est soit discret soit égal à Ω .

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On considère la fonction $g(z) = f(z) - \alpha$. Si $f^{-1}(\{\alpha\}) \neq \Omega$ la fonction g est analytique non-nulle donc l'ensemble $Z(g)$ de ses zéros est un ensemble discret. Mais on a précisément $Z(g) = f^{-1}(\{\alpha\})$. $\square$

Corollaire 4.3. Soit Ω un domaine et $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Si l'ensemble $A = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$.

Démonstration. La fonction $f - g$ est analytique et $A = Z(f - g)$. Si A admet un point d'accumulation dans Ω , par continuité de $f - g$ celui-ci est dans A . Ainsi $A = Z(f - g)$ n'est pas discret et donc $A = \Omega$, i.e. $f - g = 0$. $\square$

Théorème 4.2. [Principe du prolongement analytique] Soit Ω un domaine, $\Omega_0 \subset \Omega$ un ouvert non-vide et $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors f admet au plus un prolongement analytique sur Ω , i.e. si $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sont analytiques telles que pour tout $z \in \Omega_0$ on a $f_1(z) = f_2(z) = f(z)$ alors $f_1 = f_2$.

Démonstration. Soient f_1, f_2 deux prolongements de f . $A = \{z \in \Omega \mid f_1(z) = f_2(z)\}$ contient Ω_0 et a donc un point d'accumulation dans Ω (Exercice 1.5). Donc $A = \Omega$.

Remarque 4.6. Ce résultat est à relier avec ce qu'on a dit dans la Remarque 4.2 : si on connaît une fonction analytique f sur un sous-ensemble ouvert Ω_0 d'un domaine Ω , aussi petit soit Ω_0 , alors on connaît f sur Ω tout entier.

4.3 Formule de Cauchy pour les fonctions analytiques

On a vu que les coefficients du DSE en z_0 d'une fonction analytique f étaient naturellement reliés aux dérivées successives de f en z_0 , voir (4.1). Le résultat suivant montre comment on peut également les obtenir uniquement à l'aide des valeurs de f , sans utiliser les dérivées de cette dernière.

Proposition 4.5. Soit $\sum a_n(z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ (éventuellement $R = +\infty$) et f sa somme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in]0, R[$ on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt. \quad (4.3)$$

Remarque 4.7. Pour $n = 0$ la formule ci-dessus devient, puisque $a_0 = f(z_0)$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt. \quad (4.4)$$

Pour une fonction f définie par une série entière centrée en z_0 , la valeur de f en z_0 est égale à la moyenne des valeurs de f le long d'un cercle de centre z_0 (de n'importe quel rayon r plus petit que le rayon de convergence). C'est ce qu'on appelle une formule de la moyenne.

Démonstration. Soit $r \in]0, R[$. Par définition de f on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(z_0 + re^{it}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{imt}.$$

C'est ce qu'on appelle une série trigonométrique (voir le cours sur les séries de Fourier au S6). Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$ on a $|a_m r^m e^{imt} e^{-int}| = |a_m r^m|$ et, puisque $r < R$, la série $\sum |a_m r^m|$ converge. Ainsi la série de fonctions $\sum_m a_m r^m e^{imt} e^{-int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0, 2\pi]$. On peut donc intervertir série et intégrale dans le calcul suivant

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{imt} e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_m r^m e^{i(m-n)t} dt. \quad (4.5)$$

On vérifie facilement que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$ on a $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \left[\frac{1}{ik} e^{ikt} \right]_0^{2\pi} = 0$. Ainsi toutes les intégrales dans (4.5) sont nulles sauf celle pour $m = n$. Et on a finalement

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_n r^n dt = a_n r^n.$$

□

La formule de la moyenne montre qu'on peut obtenir la valeur d'une fonction analytique en un point z_0 à partir de ses valeurs le long d'un cercle centré en z_0 . La formule de Cauchy ci-dessous montre qu'on peut en fait obtenir sa valeur en n'importe quel point à l'intérieur d'un disque à l'aide de ses valeurs sur le cercle (à condition que le rayon soit assez petit). Autrement dit, les valeurs d'une fonction analytique sur un cercle déterminent entièrement la fonction à l'intérieur de ce cercle (ça ce n'est pas étonnant à cause du principe de prolongement analytique), et ce de façon "explicite". La formule (4.6) ci-dessous jouera un rôle essentiel dans la section suivante pour montrer que, de façon surprenante, n'importe quelle fonction C^1 est analytique (et donc C^∞).

Théorème 4.3. [Formule de Cauchy] Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytique, $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que f soit DSE sur $D(z_0, R)$. Alors pour tout $r \in]0, R[$ on a, pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt. \quad (4.6)$$

Remarque 4.8. 1) Si on prend $z = z_0$ on retrouve la formule de la moyenne (4.4).

2) La fonction constante égale à 1 est bien entendu analytique, avec $R = +\infty$ quel que soit z_0 . Dans ce cas la formule (4.6) donne, pour tout $r > 0$ et tout $z \in D(z_0, r)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt = 1. \quad (4.7)$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$, $(a_n)_n$ et $R > 0$ tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sur $D(z_0, R)$.

Soient également $0 < r < R$ et $z \in D(z_0, r)$. D'après (4.3) on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt \right) (z - z_0)^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} (z - z_0)^n dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si on peut intervertir série et intégrale on aura alors, puisque $\left| \frac{z - z_0}{re^{it}} \right| < 1$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + re^{it}) \left(\frac{z - z_0}{re^{it}} \right)^n \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \times \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{re^{it}}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \times \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt, \end{aligned}$$

ce qui est bien (4.6).

Il reste à justifier qu'on peut bien intervertir série et intégrale dans (4.8). Pour cela il suffit de montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(t) = \frac{1}{r^n} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} (z - z_0)^n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. La fonction f est continue sur $C(z_0, r)$ donc y est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|f_n(t)| = \left| \frac{1}{r^n} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} (z - z_0)^n \right| \leq M \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n.$$

Comme $z \in D(z_0, r)$ on a $\left| \frac{z - z_0}{r} \right| < 1$ donc la série $\sum M \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n$ converge, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum f_n$ bien converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

4.4 Analyticité des fonctions C^1

On va établir dans cette section qu'une fonction C^1 , i.e. holomorphe avec f' continue, est forcément analytique et donc en particulier C^∞ . Cela permettra également de préciser le rayon de convergence R du DSE en un point z_0 d'une fonction analytique (pour le moment si f est analytique on sait juste qu'un tel R existe mais rien de plus).

Soit donc f une fonction de classe C^1 sur Ω et $z_0 \in \Omega$. On souhaite montrer que f s'écrit comme somme d'une série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ sur un certain disque $D(z_0, R)$ (c'est ce que signifie " f est analytique"). Une première étape serait de savoir ce que peuvent être les coefficients a_n : il est plus facile de montrer un résultat de la forme "Soit $a_n = \dots$, montrons que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ pour $z \in D(0, R)$ avec $R = \dots$ " que de montrer "il existe des a_n (qu'on ne connaît pas) tels que...". La Proposition 4.5 montre que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sur $D(z_0, R)$ alors nécessairement pour tout $r \in]0, R[$ on doit avoir

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt. \quad (4.9)$$

Etant donnée f de classe C^1 on va donc naturellement considérer ces coefficients et la série entière associée. Notons qu'a priori les a_n dépendent de r (on a vu que ce n'était pas le cas si f était analytique mais c'est justement ce qu'on veut montrer). On notera donc $a_n(r)$ la quantité définie par le membre de droite de (4.9).

Lemme 4.1. *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors pour tout $r \in]0, R[$ la série entière $\sum a_n(r)(z - z_0)^n$, où*

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt,$$

a un rayon de convergence au moins égal à r . De plus pour tout $z \in D(z_0, r)$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt. \quad (4.10)$$

Le lemme ci-dessus ne montre pas encore que la série entière $\sum a_n(r)(z - z_0)^n$ a pour somme $f(z)$. Cependant on peut reconnaître dans le membre de droite de (4.10) l'expression qui apparaît dans la formule de Cauchy (4.6). A nouveau, si f était analytique on pourrait affirmer que cette quantité coïncide avec $f(z)$. On montrera que cela reste vrai même si on suppose juste que f est C^1 (voir le Lemme 4.2 ci-dessous).

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que celle de la formule de Cauchy (Théorème 4.3).

La fonction f est continue sur $C(z_0, r)$ donc y est bornée. Il existe donc $M_r \geq 0$ tel que pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $|f(z_0 + re^{it})| \leq M_r$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|r^n a_n(r)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it}) e^{-int}| dt \leq M_r.$$

La suite $(a_n(r)r^n)_n$ est donc bornée ce qui prouve bien que le rayon de convergence de la série $\sum a_n(r)(z - z_0)^n$ est au moins égal à r .

Soit maintenant $z \in D(z_0, r)$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt \right) (z - z_0)^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \times \left(\frac{z - z_0}{re^{it}} \right)^n dt. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $\left| f(z_0 + re^{it}) \times \left(\frac{z - z_0}{re^{it}} \right)^n \right| \leq M_r \left| \frac{z - z_0}{r} \right|^n$. Comme $z \in D(z_0, r)$ on a $\left| \frac{z - z_0}{r} \right| < 1$. La série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(t) = f(z_0 + re^{it}) \times \left(\frac{z - z_0}{re^{it}} \right)^n$ converge donc normalement sur $[0, 2\pi]$. On peut ainsi intervertir série et intégrale et la fin de la preuve est identique à celle du Théorème 4.3. $\square$

Lemme 4.2. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors pour tout $r \in]0, R[$ et tout $z \in D(z_0, r)$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt = f(z).$$

Démonstration. Soit $r \in]0, R[$ et $z \in D(z_0, r)$. D'après (4.7) on a $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt = 1$ et donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt.$$

On souhaite donc montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt.$$

On considère pour ça la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(s(z_0 + re^{it}) + (1-s)z)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt,$$

et on veut donc montrer que $g(0) = g(1)$. On va en fait montrer que g est constante.

La fonction g est définie comme une intégrale à paramètres $g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(s, t) dt$ où $\Phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $\Phi(s, t) = \frac{f(s(z_0 + re^{it}) + (1-s)z)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it}$. C'est une fonction de classe C^1 (en tant que fonction de 2 variables réelles) car composée / produit / quotient de fonctions C^1 . Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (voir le cours d'Intégration du S4) garantit que la fonction g est C^1 (on a une intégrale sur un segment) et que

$$g'(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'((s(z_0 + re^{it}) + (1-s)z)) re^{it} dt.$$

Si $s \neq 0$ on reconnaît alors sous le signe intégrale la dérivée (par rapport à la variable d'intégration t) de la fonction $t \mapsto \frac{1}{is} f((s(z_0 + re^{it}) + (1-s)z))$. De plus cette dernière fonction prend la même valeur en $t = 0$ et $t = 2\pi$ (la fonction $t \mapsto e^{it}$ est 2π -périodique), donc pour $s \neq 0$ on a

$$g'(s) = \frac{1}{2i\pi s} [f((s(z_0 + re^{it}) + (1-s)z))]_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

On vérifie par ailleurs facilement que $g'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z) re^{it} dt = 0$. (On aurait aussi pu utiliser le fait que g est C^1 pour justifier que $g'(0) = 0$.) La fonction g' est nulle sur $[0, 1]$ donc g est constante et en particulier

$$g(1) = g(0) \iff \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt = f(z).$$

□

En combinant les deux lemmes précédents on obtient donc que pour tout $r \in]0, R[$ et tout $z \in D(z_0, r)$ on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)(z - z_0)^n = f(z)$, i.e. on a montré que f était bien DSE en z_0 puisqu'on a trouvé un disque de rayon non nul (n'importe quel $r < R$ convient) dans lequel f s'écrit comme la somme d'une série entière. On peut en déduire finalement que les $a_n(r)$ ne dépendent pas de r et que ce développement est valable dans tout $D(z_0, R)$.

En effet, puisque f est DSE en z_0 , par unicité du développement en série entière les coefficients de ce développement ne dépendent pas du choix de $r < R$ et on peut les noter simplement a_n . Enfin, si $z \in D(z_0, R)$ il suffit de choisir $r \in]|z - z_0|, R[$ (de façon à ce que $z \in D(z_0, r)$) pour s'assurer que la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge. La série converge donc dans tout $D(z_0, R)$ ce qui garantit bien que son rayon de convergence est au moins égal à R . En résumé on a montré le théorème suivant.

Théorème 4.4. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt$ ne dépend pas de $r \in]0, R[$,
2. la série entière $\sum a_n(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R ,
3. pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Par conséquent la fonction f est analytique sur Ω (donc C^∞) et pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ on a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 < r < R. \quad (4.11)$$

On peut tout de suite en déduire que dès que f est C^1 , comme elle est analytique, en plus d'être C^∞ elle vérifie les résultats montrés dans les sections précédentes : principe des zéros isolés, du prolongement analytique et formules de la moyenne et de Cauchy. On peut, par exemple, également en déduire une autre preuve de la Proposition 2.7.

Démonstration de le Proposition 2.7. Puisque f' est constante égale à 0 c'est une fonction continue, i.e. f est C^1 . La fonction f est donc analytique sur Ω qui est un domaine. Comme f' est nulle toutes les dérivées successives de f sont nulles aussi et la fonction f est donc constante, voir la Remarque 4.2. $\square$

On a montré dans la Section 4.1 que la somme et le produit de fonctions analytiques étaient analytiques. On n'a cependant pas parlé du quotient ni de la composée. Cela reste bien entendu vrai mais la preuve directement à partir de la définition de fonction analytique n'est pas immédiate à écrire. Avec le théorème précédent ça devient presque évident.

Proposition 4.6. 1. Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques telles que g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est analytique sur Ω .

2. Soient $f : \Omega_f \rightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \rightarrow \mathbb{C}$ analytiques et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est analytique sur Ω_f .

Démonstration. La preuve est la même dans les deux cas. Comme f et g sont analytiques elles sont C^1 . Donc $\frac{f}{g}$, resp. $g \circ f$, est C^1 et donc analytique d'après le Théorème 4.4. $\square$

Lorsqu'on a une fonction analytique elle est, par définition, DSE en tout point z_0 de son ensemble de définition. Par contre on ne sait rien a priori sur le rayon de convergence du développement en z_0 . Le théorème ci-dessus permet de préciser celui-ci.

Proposition 4.7. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ est tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ alors le rayon de convergence du DSE de f en z_0 est au moins égal à R , i.e. (4.1) est vraie sur tout disque $D(z_0, R)$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Si f est analytique elle est C^1 donc d'après le Théorème 4.4 DSE en z_0 avec rayon de convergence au moins R . $\square$

Exemple 4.6. La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$. On a vu dans l'Exemple 4.4 que son DSE en z_0 avait pour rayon de convergence $|z_0|$. Le disque $D(z_0, |z_0|)$ est bien le plus grand disque centré en z_0 et inclus dans $\mathbb{C}^*$.

On revient enfin sur la formule de Cauchy (Théorème 4.3) en précisant pour quels rayons celle-ci a lieu. On a vu, pour les fonctions analytiques et donc désormais pour les fonctions C^1 , que c'était pour tout rayon r inférieur au rayon de convergence du DSE de f en z_0 . Combiné avec la Proposition 4.7 on obtient la version suivante.

Théorème 4.5. [Formule de Cauchy] Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Alors pour tout $r \in]0, R[$ on a, pour tout $z \in D(z_0, r)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt. \quad (4.12)$$

Remarque 4.9. Le membre de droite de (4.12) a en fait un sens dès que $z_0 + re^{it} - z \neq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$, i.e. $z \notin C(z_0, r)$. Si $z \in D(z_0, r)$ le théorème affirme qu'il est égal à $f(z)$. Le même raisonnement que celui fait dans la preuve du Lemme 4.2 montre que la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$g(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(s(z_0 + re^{it}) + (1-s)z)}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt$$

est constante même si z est à l'extérieur du cercle $C(z_0, r)$, i.e. $|z - z_0| > r$. Si $z \in D(z_0, r)$ on a vu alors que $g(0) = f(z)$. Si par contre $|z - z_0| > r$ on peut montrer qu'alors $g(0) = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{f(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} dt \\ &= -\frac{f(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{z - z_0} \times \frac{1}{1 - \frac{re^{it}}{z - z_0}} dt \\ &= -\frac{f(z)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{it}}{z - z_0} \right)^n dt. \end{aligned}$$

La convergence normale de la série de fonction $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{re^{it}}{z - z_0} \right)^n$ sur $[0, 2\pi]$ (faites-le) garantit qu'on peut, là encore, intervertir série et intégrale. On a ainsi

$$g(0) = -\frac{f(z)}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{re^{it}}{z - z_0} \right)^n dt = -\frac{f(z)}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{z - z_0} \right)^n \int_0^{2\pi} e^{int} dt,$$

et on vérifie facilement que pour tout $n \geq 1$ on a $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$. Finalement $g(0) = 0$ et donc pour tout z tel que $|z - z_0| > r$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt = 0. \quad (4.13)$$

On reviendra sur la formule de Cauchy et sur (4.13) dans le chapitre suivante, et en particulier dans la Section 5.4.

4.5 Théorème de Liouville et principe du maximum

On termine ce chapitre avec deux résultats importants sur les fonctions de classe C^1 (ou analytiques), le Théorème de Liouville et le principe du maximum.

4.5.1 Théorème de Liouville

Théorème 4.6 (Liouville). Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 et bornée alors f est constante.

Remarque 4.10. Ce résultat est totalement faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si on suppose qu'elles sont analytiques. La fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique et bornée mais n'est pas constante.

Démonstration. Soit $n \geq 1$. Comme f est C^1 sur $\mathbb{C}$, d'après le Théorème 4.4 appliqué en $z_0 = 0$, pour tout $r > 0$ (on a ici $R = +\infty$ puisque f est C^1 sur $\mathbb{C}$ tout entier) on a

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt.$$

Soit $M \geq 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout z (f est bornée par hypothèse). On a donc, pour tout $r > 0$,

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{it}) e^{-int}| dt \leq \frac{Mn!}{r^n}.$$

En faisant tendre r vers l'infini (l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $r > 0$) on en déduit que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est constante égale à $f(0)$. $\square$

On donne comme application du théorème de Liouville une (des nombreuses) démonstration du théorème de D'Alembert-Gauss, aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 4.7 (D'Alembert-Gauss). *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. On raisonne par contraposition en supposant que P n'a aucune racine et en montrant que alors P est constant. La fonction $z \mapsto P(z)$ est C^1 sur $\mathbb{C}$ (elle est même évidemment analytique) et ne s'annule pas donc la fonction $f = \frac{1}{P}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{C}$. Il suffit alors de montrer que f est bornée. D'après le théorème de Liouville elle sera constante donc la fonction P le sera aussi. On écrit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ avec $a_n \neq 0$ (tous les coefficients ne sont pas nuls sinon P serait nul et aurait donc des racines). On a, pour $z \neq 0$,

$$f(z) = \frac{1}{P}(z) = \frac{1}{z^n} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right)^{-1}$$

Comme $a_n \neq 0$ on en déduit que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$. Il existe donc $R > 0$ tel que si $|z| > R$ on a $|f(z)| \leq 1$. Par ailleurs $\overline{D}(0, R)$ est compact et la fonction f est continue donc il existe $M \geq 0$ tel que si $|z| \leq R$ on a $|f(z)| \leq M$. Finalement pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \leq \max(1, M)$. f est donc bien bornée.

4.5.2 Principe du maximum

Proposition 4.8. *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 . Alors pour tous $z_0 \in \Omega$, R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $0 < r < R$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt. \quad (4.14)$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$, R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $r \in]0, R[$. D'après le Théorème 4.4 pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ avec $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

La Proposition 3.6 assure que la suite de fonctions $(f_N)_N$ définies par $f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n (z - z_0)^n$ converge uniformément vers f sur $\overline{D}(z_0, r)$ et donc en particulier sur $C(z_0, r)$. Autrement dit la suite de fonctions $(g_N)_N$ définies sur $[0, 2\pi]$ par $g_N(t) = f_N(z_0 + re^{it}) = \sum_{n=0}^N a_n r^n e^{int}$ converge uniformément vers $g(t) = f(z_0 + re^{it})$. On vérifie ensuite que le membre de droite

de (4.14) est $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt$ tandis que le membre de gauche est $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2 dt$. En effet, pour tout N on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g_N(t)} g_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \overline{a_n r^n e^{int}} a_m r^m e^{imt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \overline{a_n} a_m r^{n+m} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt. \end{aligned}$$

On calcule facilement que $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = 2\pi$ si $n = m$ et vaut 0 sinon. D'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^N \overline{a_n} a_n r^{2n} = \sum_{n=0}^N |a_n|^2 r^{2n}$$

et on a donc bien $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.

Pour montrer (4.14) il faut donc justifier que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt$. Il suffit pour cela de montrer que la suite de fonctions $(|g_N|^2)_N$ converge uniformément vers $|g|^2$, sachant que $(g_N)_N$ converge uniformément vers g . Pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$\begin{aligned} \left| |g_N(t)|^2 - |g(t)|^2 \right| &= |\overline{g_N(t)} g_N(t) - \overline{g(t)} g(t)| \\ &= |(\overline{g_N(t)} - \overline{g(t)}) g_N(t) + \overline{g(t)} (g_N(t) - g(t))| \\ &\leq |\overline{g_N(t)} - \overline{g(t)}| \times |g_N(t)| + |\overline{g(t)}| \times |g_N(t) - g(t)| \\ &= |g_N(t) - g(t)| \times (|g_N(t)| + |g(t)|) \\ &\leq |g_N(t) - g(t)| \times (|g_N(t) - g(t)| + 2|g(t)|). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| |g_N(t)|^2 - |g(t)|^2 \right| \leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} |g_N(t) - g(t)| \times \left(\sup_{t \in [0, 2\pi]} |g_N(t) - g(t)| + 2 \sup_{t \in [0, 2\pi]} |g(t)| \right),$$

et comme $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |g_N(t) - g(t)| = 0$ (c'est la convergence uniforme de g_N vers g) on a

bien $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| |g_N(t)|^2 - |g(t)|^2 \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, i.e. $|g_N|^2$ converge uniformément vers $|g|^2$. $\square$

Théorème 4.8. [Principe du maximum] Soit Ω un domaine et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 . Si $|f|$ admet un maximum local en z_0 alors f est constante.

Remarque 4.11. Encore une fois ce résultat est totalement faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si la fonction est analytique comme le montre l'exemple de la fonction $\sin$.

Démonstration. Supposons que $|f|$ admette un maximum local en z_0 . Il existe $r > 0$ tel que pour tout $z \in \overline{D}(z_0, r)$ on a $|f(z_0)| \geq |f(z)|$. En particulier pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ et donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 dt = |f(z_0)|^2.$$

D'après (4.14) on a donc $|f(z_0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} \leq |f(z_0)|^2$. On en déduit que $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc, puisque f est C^1 et donc analytique, f est constante égale à $f(z_0)$ d'après la Proposition 4.4. $\square$

Définition 4.4. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ on appelle frontière, ou bord, de Ω l'ensemble $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$. En particulier si Ω est ouvert on a $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

Exemple 4.7. Si $\Omega = D(z_0, R)$ alors $\partial\Omega = C(z_0, R)$.

Théorème 4.9. [Principe du maximum, version globale] Soit Ω un domaine borné et f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe C^1 sur Ω . Alors f est bornée et $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$.

Si de plus il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ alors f est constante.

Important ! Si on a une fonction continue sur un compact K on sait d'après le Théorème 2.1 que $|f|$ admet un maximum. Ce que dit le principe du maximum c'est que, si K est de la forme $K = \overline{\Omega}$ avec Ω ouvert et qu'en plus f est C^1 sur Ω , alors le maximum de $|f|$ est atteint sur le bord de Ω , et uniquement sur le bord sauf si f (et pas seulement $|f|$) est constante.

Démonstration. Ω est borné donc, d'après le Corollaire 1.2, $\overline{\Omega}$ est compact. Comme f est continue le Théorème 2.1 assure que f est bornée et que $|f|$ admet un maximum. Le même argument prouve que $|f|$ admet un maximum sur $\partial\Omega$. Cet ensemble est en effet fermé, c'est l'intersection des deux fermés $\overline{\Omega}$ et Ω^c , et borné, puisque inclus dans $\overline{\Omega}$, donc il est compact.

Comme $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$ on a évidemment $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| \geq \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$. On montre l'autre inégalité.

Soit $z_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $|f(z_0)| = \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|$. On a soit $z_0 \in \partial\Omega$ soit $z_0 \in \Omega$. Si $z_0 \in \partial\Omega$ on a alors

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = |f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Si par contre $z_0 \in \Omega$ alors z_0 est un maximum local de $|f| : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. D'après le Théorème 4.8 on en déduit que f est constante sur Ω et donc par continuité elle est constante sur $\overline{\Omega}$. En effet supposons que $f(z) = C$ pour tout $z \in \Omega$. Soit $z \in \overline{\Omega}$, alors il existe $(z_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \rightarrow z$ mais $f(z_n) = C$ pour tout n et comme f est continue elle converge vers $f(z) = \lim f(z_n) = C$. Si f est constante sur $\overline{\Omega}$ on a évidemment $\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$.

Finalement l'argument ci-dessus montre bien que si $z_0 \in \Omega$ est tel que $|f(z_0)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$ alors f est constante. $\square$

CHAPITRE 5

INTÉGRALES ET PRIMITIVES

On s'est intéressé jusqu'ici aux propriétés des fonctions dérivables, et surtout C^1 , d'une variable complexe. On va maintenant s'intéresser dans un sens à la question "réciproque" de celle de dérivabilité, celle de l'existence de primitives d'une fonction f donnée (dans $\mathbb{R}$ il suffit que f soit continue pour avoir une primitive) et à la notion étroitement liée d'intégrale le long d'un chemin.

Ce qu'on a vu au chapitre précédent, en particulier le Théorème 4.4, entraîne immédiatement la propriété suivante : une fonction continue qui admet une primitive est forcément une fonction analytique. En effet, soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue et supposons que f admette une primitive F . Dans ce cas F est dérivable avec $F' = f$, et comme f est continue F est C^1 et donc analytique. Sa dérivée f est donc aussi analytique (en particulier dérivable). Ainsi, une fonction continue qui n'est pas dérivable, comme la fonction $f : z \mapsto \bar{z}$, ne peut pas avoir de primitive. Cependant même une fonction analytique n'a pas forcément de primitive (du moins sur tout son ensemble de définition). On en a vu un exemple dans la Section 3.4, la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ est définie et analytique sur $\Omega = \mathbb{C}^*$ mais n'y admet pas de primitive, voir la Remarque 3.15.

Afin de voir comment trouver une primitive d'une fonction f donnée on peut se rappeler ce qu'on a fait dans $\mathbb{R}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, avec I un intervalle, et $x_0 \in I$ alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ est une primitive de f . C'est comme ça que vous avez justifié l'existence de primitives pour les fonctions continues. L'idée est de faire la même chose dans $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ avec Ω un domaine et $z_0 \in \Omega$, pour tout $z \in \Omega$ on choisit un chemin γ allant de z_0 à z (un tel γ existe puisque Ω est un domaine donc connexe par arcs) et on "définit" l'intégrale de f le long du chemin γ , i.e. $F(z) = \int_{\gamma} f(w) dw$. Il y a alors immédiatement plusieurs questions qui se posent :

1. Que veut dire cette intégrale ?
2. Une fois qu'on aura défini une telle intégrale, celle-ci dépend-elle du choix du chemin γ reliant z_0 à z ? Si $F(z)$ dépend du choix du chemin γ pourquoi y en aurait-il un meilleur qu'un autre ? Remarquons que ce problème ne se pose pas dans $\mathbb{R}$ puisque pour aller de x_0 à x il n'y a qu'un chemin : le segment d'extrémités x_0 et x . On va voir que dans $\mathbb{C}$ ce n'est pas aussi évident et que l'intégrale peut dépendre du choix du chemin.

3. Si cette intégrale ne dépend pas du chemin, définit-on ainsi une primitive de f ?

Dans la première partie de ce chapitre on va essayer de répondre à ces questions. On obtiendra au passage comme conséquence que toute fonction holomorphe (dérivable) est automatiquement C^1 , et donc analytique. Ainsi tous les résultats du chapitre précédent resteront vrais en remplaçant l'hypothèse " f est C^1 " par " f est holomorphe". Un cas important de chemin sera celui de ce qu'on appelle les lacets, lorsque point de départ et d'arrivée coïncident. On reviendra en particulier sur la formule de Cauchy, que l'on généralisera.

5.1 Intégrale le long d'un chemin

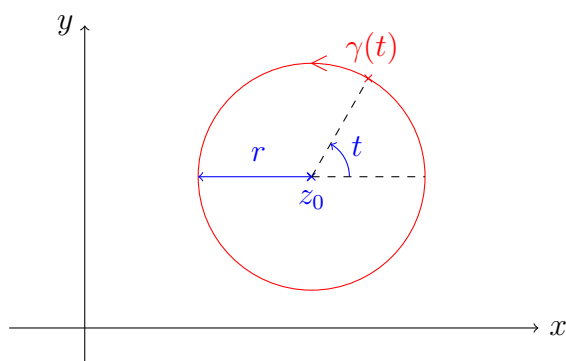
Définition 5.1. 1. On appelle chemin toute application $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue et C^1 par morceaux. L'image du chemin γ est l'ensemble $\Gamma = \gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$.

2. Un chemin est dit fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$, i.e. les points de départ et d'arrivée sont identiques.

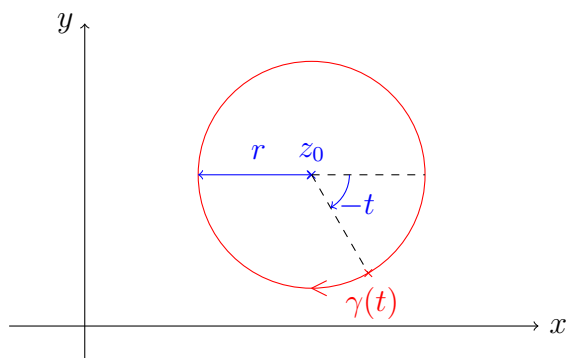
3. Un chemin est dit simple si γ est injectif sur $[a, b]$, i.e. mis à part éventuellement à ses extrémités Γ ne passe pas deux fois par le même "point de $\mathbb{C}$ ".

4. Un chemin fermé simple est appelé un lacet.

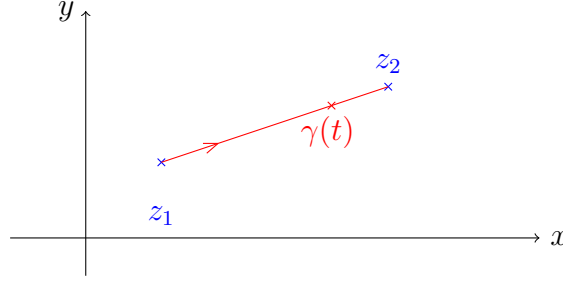
Exemple 5.1. 1. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ alors γ est un lacet dont l'image est le cercle $C(z_0, r)$ parcouru dans le sens trigonométrique.



2. Si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_0 + re^{-it}$ alors γ est un lacet dont l'image est le cercle $C(z_0, r)$ parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique.



3. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = (1 - t)z_1 + tz_2$ alors γ est un chemin simple dont l'image est le segment $[z_1, z_2]$ (parcouru de z_1 vers z_2).



Définition 5.2. Soit Ω un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin dont l'image est incluse dans Ω , i.e. tel que $\gamma([a, b]) \subset \Omega$. On appelle intégrale de f le long de γ la quantité

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (5.1)$$

Remarque 5.1. Lorsque γ est de classe C^1 il n'y a pas de problème dans la définition ci-dessus. Lorsque la fonction γ est seulement C^1 par morceaux il existe une subdivision $a = t_0 < \dots < t_n = b$ telle que γ soit C^1 sur chaque $]t_k, t_{k+1}[$ et dont la restriction à chacun de ces intervalles est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[t_k, t_{k+1}]$. En particulier $\gamma'(t)$ n'est pas forcément définie aux points t_k . L'intégrale (5.1) est alors à comprendre dans le sens

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

où avec un léger abus de notation, pour chaque k , la fonction γ' désigne le prolongement par continuité à l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ de la fonction γ' a priori définie sur $]t_k, t_{k+1}[$.

La définition (5.1) est assez naturelle. Le long du chemin γ on a $z = \gamma(t)$ et tout se passe "comme si" on faisait le chemin de variable $z = \gamma(t)$, le dz donnant alors le $\gamma'(t) dt$ comme pour les changements de variables dans les intégrales dans $\mathbb{R}$. Attention, ce n'est cependant pas un changement de variable qu'on fait ici mais bien la définition de la quantité $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Exemple 5.2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et γ le segment d'extrémités α et β . On peut alors paramétrer ce segment par $\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto \alpha + t(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}$. Etant donnée une fonction continue f on a alors, puisque $\gamma'(t) = \beta - \alpha$ pour tout t ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 f(\alpha + t(\beta - \alpha)) \times (\beta - \alpha) dt \stackrel{s=\alpha+t(\beta-\alpha)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds.$$

On retrouve évidemment l'intégrale usuelle entre α et β , parcourue dans le même sens que le segment c'est-à-dire en allant de α vers β .

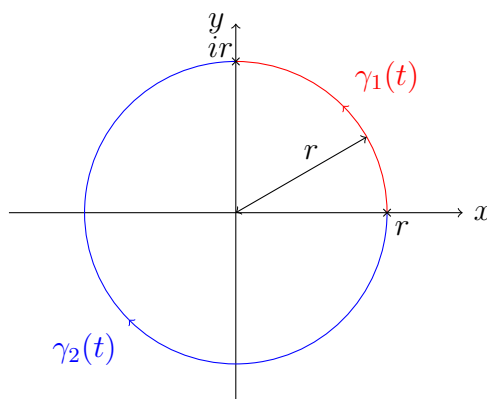
Si $\alpha < \beta$ on peut plus simplement paramétrer ce segment par $\gamma : [\alpha, \beta] \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$. On a alors $\gamma'(t) = 1$ pour tout t et on retrouve à nouveau

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt.$$

La propriété ci-dessous découle directement de la définition et la preuve est laissée à titre d'exercice.

Proposition 5.1 (Linéarité). *Soit Ω un ouvert, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin dont l'image est incluse dans Ω . Alors $\int_{\gamma} (\lambda f + g)(z) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} g(z) dz$.*

Exemple 5.3. 1) Soient γ_1 et γ_2 les chemins définis par $\gamma_1 : [0, \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [0, \frac{3\pi}{2}] \ni t \mapsto re^{-it} \in \mathbb{C}$. L'image de γ_1 est le quart de cercle de centre 0 et de rayon r partant du point d'affixe r et allant au point d'affixe ir dans le sens trigonométrique (on parle aussi de sens direct) tandis que l'image de γ_2 est le trois-quart de cercle de centre 0 et de rayon r partant du point d'affixe r et allant au point d'affixe ir dans le sens inverse du sens trigonométrique (on parle de sens indirect). Leurs images Γ_1 et Γ_2 sont incluses dans $\mathbb{C}^*$.



Soit $f : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$. On a

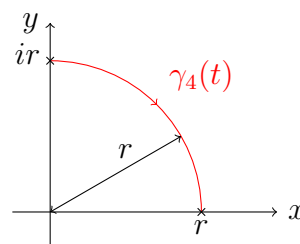
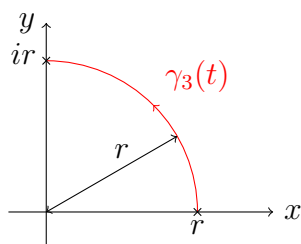
$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{re^{it}} \times ire^{it} dt = i\frac{\pi}{2},$$

tandis que

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^{3\pi/2} \frac{1}{re^{-it}} \times -ire^{-it} dt = -i\frac{3\pi}{2}.$$

On peut voir sur cet exemple que l'intégrale de f entre les deux points d'affixes respectives r et ir dépend a priori du chemin choisi puisque les intégrales le long de γ_1 et de γ_2 sont différentes.

2) Considérons maintenant les chemins $\gamma_3 : [0, \frac{\pi}{4}] \ni t \mapsto re^{i2t} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_4 : [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \ni t \mapsto re^{-it} \in \mathbb{C}$. L'image de γ_3 est la même que celle de γ_1 tandis que celle de γ_4 est la même mais parcourue dans le sens inverse.



On calcule alors

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{re^{i2t}} \times 2ire^{i2t} dt = i\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_4} f(z) dz = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{re^{-it}} \times -ire^{-it} dt = -i\frac{\pi}{2}.$$

On peut voir que l'intégrale le long de γ_3 est la même que pour γ_1 (les images des chemins sont les mêmes et parcourues dans le même sens) tandis que celle le long de γ_4 en est l'opposée (l'image est la même mais parcourue dans le sens inverse).

3) On considère enfin les chemins $\gamma_5 : [0, 2\pi] \ni t \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_6 : [0, 4\pi] \ni t \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$. Leurs images sont le cercle $C(0, r)$ parcouru dans le sens trigonométrique, une fois pour γ_5 et deux fois pour γ_6 . On calcule facilement cette fois que $\int_{\gamma_5} f(z) dz = 2i\pi$ et $\int_{\gamma_6} f(z) dz = 4i\pi = 2 \int_{\gamma_5} f(z) dz$. Le fait de parcourir deux fois le cercle a pour effet de compter double l'intégrale de f .

Les propriétés 2. et 3. observées dans l'exemple ci-dessus sont assez naturelles et ne sont pas un cas particulier.

Définition 5.3. Soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ deux chemins. On dit que γ_1 et γ_2 sont

1. équivalents s'il existe $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ bijective C^1 strictement croissante telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Les images de γ_1 et γ_2 sont les mêmes, parcourues dans le même sens.
2. opposés s'il existe $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ bijective C^1 strictement décroissante telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Les images de γ_1 et γ_2 sont les mêmes mais parcourues dans le sens inverse.

Définition 5.4. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin on notera $\gamma_{\text{inv}} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_{\text{inv}}(t) = \gamma(a + b - t)$. L'image de γ_{inv} est la même que celle de γ mais parcourue dans le sens inverse.

Proposition 5.2. Soit Ω un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue et γ_1, γ_2 deux chemins d'images incluses dans Ω .

1. Si γ_1 et γ_2 sont équivalents alors $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.
2. Si γ_1 et γ_2 sont opposés alors $\int_{\gamma_1} f(z) dz = - \int_{\gamma_2} f(z) dz$. En particulier pour tout chemin γ on a $\int_{\gamma_{\text{inv}}} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$.

Remarque 5.2. La seconde propriété est l'analogue de $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ pour les intégrales dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas où γ_1, γ_2 sont de classe C^1 . S'ils ne sont que C^1 par morceaux la preuve est similaire mais il faut découper l'intégrale par rapport à des subdivisions adaptées et utiliser la relation de Chasles. La preuve découle simplement de la formule de changement de variable pour les intégrales dans $\mathbb{R}$.

Soient donc $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ bijective de classe C^1 telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt \\ &\stackrel{\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi}{=} \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(\varphi(t))) \times \varphi'(t) \gamma_2'(\varphi(t)) dt \\ &\stackrel{s = \varphi(t)}{=} \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds. \end{aligned}$$

Si γ_1 et γ_2 sont équivalents on choisit φ comme ci-dessus strictement croissante. On a alors $\varphi(a_1) = a_2$ et $\varphi(b_1) = b_2$ et donc

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Si par contre γ_1 et γ_2 sont opposés on choisit φ comme ci-dessus strictement décroissante. On a alors $\varphi(a_1) = b_2$ et $\varphi(b_1) = a_2$ et donc

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{b_2}^{a_2} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = - \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s)) \gamma_2'(s) ds = - \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

□

On est parfois amené à décomposer un chemin en plusieurs morceaux. On a alors la propriété suivante qui est l'analogue de la relation de Chasles.

Proposition 5.3. Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ et $\gamma : [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ si $t \leq b$ et $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ sinon. Si Ω est un ouvert tel que $\gamma([a, c]) \subset \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Le chemin γ s'appelle la concaténation des chemins γ_1 et γ_2 .

Corollaire 5.1. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet et γ_n le chemin fermé constitué de $n \in \mathbb{N}$ copies de γ , i.e. l'image de γ_n est la même que celle de γ mais parcouru n fois dans le même sens. Alors pour tout ouvert Ω tel que $\gamma([a, b]) \subset \Omega$ et toute fonction continue $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on a

$$\int_{\gamma_n} f(z) dz = n \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Exercice 5.1. Démontrez la proposition et le corollaire ci-dessus.

Une autre propriété courante de l'intégrale pour les fonctions de variable(s) réelle(s) est l'inégalité triangulaire. Ici il faut faire un peu plus attention. On ne peut pas simplement comparer $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right|$ et $\int_{\gamma} |f(z)| dz$ puisque cette dernière quantité est a priori un nombre

complexe (le “dz” est complexe). Prenez par exemple la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{z}$ et γ le quart de cercle comme dans l'Exemple 5.3. On a alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{\pi/2} \frac{1}{re^{it}} \times ire^{it} dt \right| = \left| i \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2},$$

tandis que

$$\int_{\gamma} |f(z)| dz = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} ire^{it} dt = [e^{it}]_0^{\pi/2} = i - 1.$$

L'inégalité $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dz$ n'a pas de sens. Par ailleurs même l'inégalité $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\gamma} |f(z)| dz \right|$, qui elle a un sens, est fausse puisque $\frac{\pi}{2} > |i - 1| = \sqrt{2}$. Si on veut une inégalité du type inégalité triangulaire il faut d'abord choisir un paramétrage et on peut alors écrire

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \times |\gamma'(t)| dt.$$

On utilisera régulièrement ce type de majoration par la suite, voir par exemple l'application à la fin de la Section 5.4.

La présence du terme $|\gamma'(t)|$, au lieu de $\gamma'(t)$, fait qu'on ne reconnaît pas dans cette dernière intégrale une intégrale le long d'un chemin. En majorant, pour tout $t \in [a, b]$, la quantité $|f(\gamma(t))|$ par sa borne supérieure on en déduit

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \times \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (5.2)$$

La dernière intégrale ne dépend que du chemin γ et a une interprétation géométrique naturelle.

Définition 5.5. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin. On appelle longueur de γ la quantité $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Remarque 5.3. L'interprétation de la quantité $L(\gamma)$ comme longueur de γ (ou plus exactement de son image Γ , en la prenant en compte autant de fois qu'elle est parcourue) se comprend en revenant à la définition de $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ via les sommes de Riemann, voir les Compléments 5.5.3 en fin de chapitre.

Remarque 5.4. Si γ n'est pas C^1 mais seulement C^1 par morceaux il faut comprendre la définition ci-dessus comme pour (5.1), c'est-à-dire en découpant l'intégrale selon une subdivision adaptée à γ .

Avec cette définition l'inégalité (5.2) se réécrit simplement.

Proposition 5.4. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| \times L(\gamma).$$

Si $\Gamma = \gamma([a, b])$ on s'attend naturellement à ce que sa longueur ne dépendent pas du choix du paramétrage. On a en effet :

Proposition 5.5. *Si γ_1 et γ_2 sont équivalents ou opposés alors $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.*

Exercice 5.1. Démontrer la proposition ci-dessus.

Exemple 5.4. Si $[z_1, z_2]$ est un segment on peut prendre $\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$. On a $\gamma'(t) = z_2 - z_1$ et on trouve donc, évidemment, $L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dt = |z_2 - z_1|$.

Remarque 5.5. En paramétrant le cercle $C(z_0, r)$ par $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ on retrouve que la longueur du cercle est

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} |ire^{it}| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Remarquez que pour démontrer ça on a utilisé la construction de π telle que donnée dans le Théorème 3.1 et les propriétés qui en ont suivi. La définition de π donnée dans le Théorème 3.1 coïncide donc bien avec la définition usuelle et reliant le rayon d'un cercle avec son périmètre. Plus généralement, si $\theta \in [0, 2\pi]$, l'arc de cercle de centre 0 et allant du point d'affixe 1 au point d'affixe $e^{i\theta}$ est paramétré par $\gamma : [0, \theta] \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ et sa longueur est

$$\int_0^\theta |ie^{it}| dt = \theta.$$

5.2 Fonctions holomorphes, primitives et analyticité

On a vu dans l'Exemple 5.3 que l'intégrale d'une fonction pouvait a priori dépendre du chemin parcouru et pas seulement de ses extrémités. Cependant si f admet une primitive ce n'est plus le cas.

Proposition 5.6. *Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une primitive F . Alors pour tout chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ on a*

$$\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier si γ est un lacet alors $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

Remarque 5.6. On retrouve ici l'idée que pour calculer l'intégrale d'une fonction f il "suffit" de faire la différence des valeurs d'une primitive F de f aux bords du chemin, à condition qu'une telle primitive existe...

Démonstration. Soit F une primitive de f et $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ un chemin. A nouveau on fait la preuve dans le cas où γ est C^1 (sinon il faut découper selon une subdivision adaptée). La fonction $F \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est alors de classe C^1 (composée de fonctions C^1) et on a $(F \circ \gamma)'(t) = f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)$. On en déduit que

$$\int_\gamma f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = [F \circ \gamma(t)]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Remarque 5.7. Même si on ne connaît pas explicitement de primitive de f le fait qu'elle en ait une garantit que l'intégrale le long d'un lacet est nulle. Cette propriété jouera un rôle important par la suite.

Exemple 5.5. Si on reprend l'Exemple 5.3 puisque $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \neq \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}$ alors que γ_1 et γ_2 ont les même extrémités cela prouve qu'il n'y a pas d'ouvert contenant γ_1 et γ_2 sur lequel $f(z) = \frac{1}{z}$ admette une primitive.

Exemple 5.6. Soit $f(z) = \bar{z}$ définie sur $\mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto re^{it} \in \mathbb{C}$ un paramétrage du cercle $C(0, r)$ parcouru dans le sens trigonométrique. On a alors

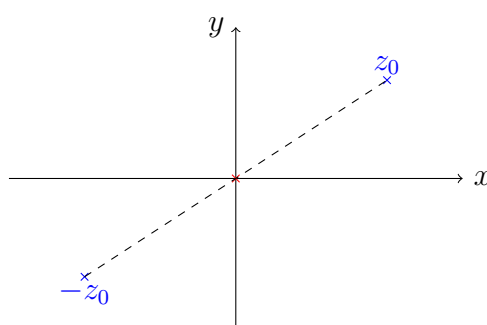
$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} re^{-it} \times ire^{it} dt = 2i\pi r^2 \neq 0.$$

Comme γ est un lacet on en déduit que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}$, ni même sur aucun ouvert contenant γ .

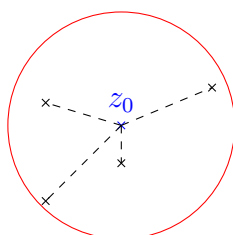
Les deux exemples ci-dessus montrent que la question de l'existence d'une primitive n'est pas évidente. Pour la fonction $f(z) = \bar{z}$, comme on l'a vu en introduction de ce chapitre, c'est relié au fait qu'elle n'est pas dérivable alors qu'une fonction continue ne peut avoir de primitive que si elle est analytique (donc dérivable). Ce n'est cependant pas suffisant. La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$, alors que c'est une fonction analytique. Elle en a par contre sur des domaines plus petits comme on l'a vu dans la Remarque 3.15. On voit ainsi que la forme du domaine peut aussi avoir une influence. On rappelle la définition d'un ensemble étoilé, voir la Définition 1.16 à la fin de la Section 1.

Définition 5.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. Ω est dit étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ on a $[z_0, z] \subset \Omega$. On précise parfois z_0 en disant que Ω est étoilé par rapport à z_0 .

Exemple 5.7. 1. L'ensemble $\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé. En effet, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$ on peut trouver $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $[z_0, z] \not\subset \mathbb{C}^*$. Il suffit de prendre $z = -z_0$.



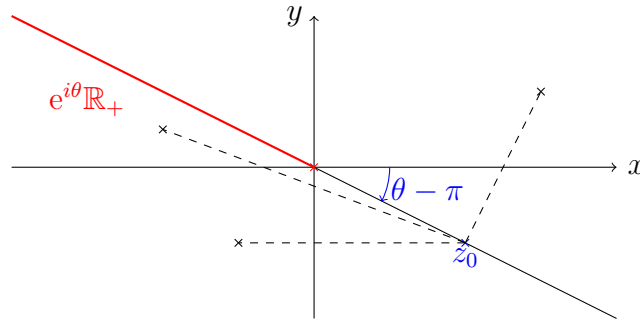
2. Un disque est étoilé, il suffit de prendre comme z_0 le centre du disque. En fait un disque est convexe donc n'importe quel point du disque convient.



3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ est étoilé, et on peut prendre $z_0 = -e^{i\theta} = e^{i(\theta-\pi)}$ (ou n'importe quel point d'argument $\theta - \pi$). En effet, si $z = re^{i\varphi} \in \Omega_\theta$ avec $r > 0$ et $\varphi \in]\theta, \theta + 2\pi[$ il faut montrer que $[z_0, z] \subset \Omega_\theta$. Si $z_1 = (1-t)z_0 + tz \in [z_0, z]$, avec $t \in [0, 1]$, n'était pas dans Ω_θ on aurait $z_1 = Re^{i\theta}$ avec $R \geq 0$ et donc

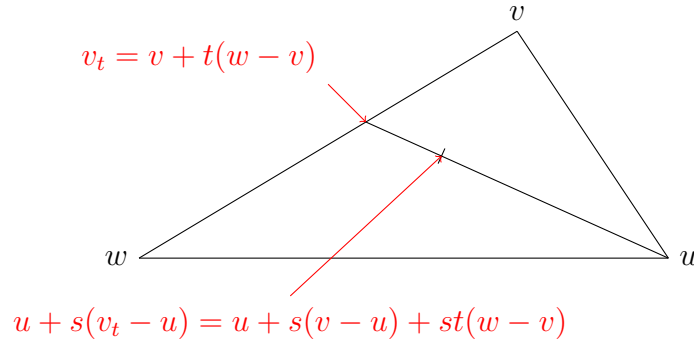
$$Re^{i\theta} = -(1-t)e^{i\theta} + tre^{i\varphi} \iff tre^{i\varphi} = (R+1-t)e^{i\theta}.$$

Comme $\varphi \in]\theta, \theta + 2\pi[$, et que tr et $R+1-t$ sont positifs, on doit avoir $tr = R+1-t = 0$ ce qui n'est pas possible puisque $r > 0$, $R \geq 0$ et $t \in [0, 1]$.



Définition 5.7. Soient $u, v, w \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. On note $\partial T(u, v, w) = [u, v] \cup [v, w] \cup [w, u]$ le (bord du) triangle dont les sommets sont les points u, v et w . On notera aussi $T(u, v, w)$ le même triangle ainsi que son intérieur. Autrement dit

$$T(u, v, w) = \{u + s(v - u) + st(w - v) \mid s, t \in [0, 1]\},$$



tandis qu'un paramétrage de $\partial T(u, v, w)$ est donné par $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$ avec

$$\gamma(t) = \begin{cases} u + t(v - u) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ v + (t-1)(w - v) & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \\ w + (t-2)(u - w) & \text{si } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Le théorème qui suit permet de caractériser les fonctions qui admettent des primitives sur des ouverts étoilés.

Théorème 5.1. Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue. f admet une primitive sur Ω si et seulement si pour tout triangle $T(u, v, w) \subset \Omega$ on a $\int_{\partial T(u, v, w)} f(z) dz = 0$.

Remarque 5.8. Si Ω est étoilé il suffit de vérifier que $\partial T(u, v, w) \subset \Omega$ pour garantir que $T(u, v, w) \subset \Omega$. En effet soit z_0 tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0 . On suppose que $\partial T(u, v, w) \subset \Omega$ et on montre que $T(u, v, w) \subset \Omega$. Si $z \in T(u, v, w)$ alors la demi-droite d'origine z_0 et passant par z coupe $\partial T(u, v, w)$ au delà de z (éventuellement en z si $z \in \partial T(u, v, w)$). On note z_1 ce point. On a donc $z \in [z_0, z_1]$. Comme $z_1 \in \partial T(u, v, w) \subset \Omega$ et que Ω est étoilé par rapport à z_0 on en déduit que $z \in \Omega$.

Démonstration. Un triangle est un lacet donc si f admet une primitive alors son intégrale le long de n'importe quel triangle est nulle d'après la Proposition 5.6.

Réciproquement on suppose que l'intégrale de f est nulle le long de tout chemin triangulaire. Soit z_0 tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0 . Pour tout $z \in \Omega$ on définit $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w) dw$. Le fait que Ω soit étoilé par rapport à z_0 garantit que $[z_0, z] \subset \Omega$ et donc que $F(z)$ soit bien défini. On va montrer que $F : z \mapsto F(z)$ est une primitive de f . On peut remarquer que cette approche est analogue à ce qu'on fait dans $\mathbb{R}$ où $\int_{x_0}^x f(t) dt$ définit une primitive de f lorsque f est continue.

Il faut montrer que pour tout $z \in \Omega$ on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$. Soit donc $z \in \Omega$. Pour tout h tel que $[z, z+h] \subset \Omega$ (c'est le cas au moins si h est dans un disque centré en 0 puisque Ω est ouvert et que $z \in \Omega$) on a

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z_0, z+h]} f(w) dw - \int_{[z_0, z]} f(w) dw = \int_{[z_0, z+h]} f(w) dw + \int_{[z, z_0]} f(w) dw.$$

On considère le triangle de sommets z , z_0 et $z+h$. Par hypothèse on a

$$\int_{[z, z_0]} f(w) dw + \int_{[z_0, z+h]} f(w) dw + \int_{[z+h, z]} f(w) dw = 0$$

et donc, en paramétrant le segment $[z, z+h]$ par $\gamma : [0, 1] \ni t \mapsto z+th$,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = -\frac{1}{h} \int_{[z+h, z]} f(w) dw = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w) dw = \int_0^1 f(z+th) dt.$$

La continuité des intégrales à paramètres (on a une intégrale de la variable réelle ici) garantit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z) dt = f(z)$. On peut aussi se passer de ce résultat sur les intégrales à paramètres. Vous ne l'avez en fait vu que si h est une variable réelle alors qu'ici h est complexe. On remarque qu'une fonction constante égale à α a pour primitive $w \mapsto \alpha w$ et donc pour tout segment $[z_1, z_2]$ on a $\int_{[z_1, z_2]} \alpha dw = \alpha(z_2 - z_1)$. Ainsi, en prenant $\alpha = f(z)$ et le segment $[z, z+h]$, on a

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(w) dw - \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(z) dw = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(w) - f(z)) dw.$$

En utilisant la Proposition 5.4 on en déduit que

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \sup_{w \in [z, z+h]} |f(w) - f(z)| \times L([z, z+h]) = \sup_{w \in [z, z+h]} |f(w) - f(z)|.$$

Comme f est continue en z cela garantit que le membre de droite tend vers 0 lorsque h tend vers 0 et donc que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$. $\square$

Remarque 5.9. Comme on l'a vu à travers la preuve, si on sait que Ω est étoilé par rapport à z_0 on peut se restreindre dans le théorème précédent aux triangles dont z_0 est l'un des sommets. Par ailleurs le théorème montre que, au moins dans un ouvert étoilé, si l'intégrale le long de n'importe quel triangle est nulle alors la fonction admet une primitive et donc l'intégrale le long de n'importe quel lacet est nulle : si on sait ce qu'il se passe pour les triangles on récupère ce qu'il se passe pour tous les lacets.

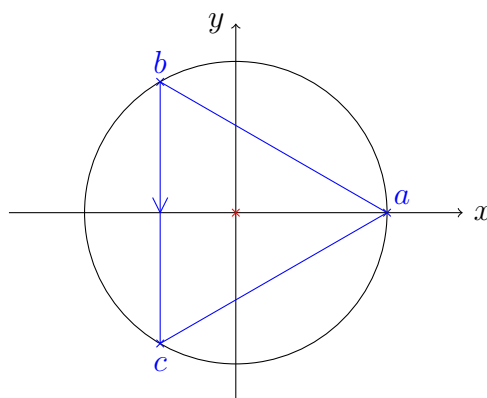
Le théorème précédent a l'avantage de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur un ouvert étoilé Ω admette une primitive. Le point négatif est que cette condition semble difficile à vérifier dans la pratique : il faut calculer l'intégrale de f le long de tous les triangles inclus dans Ω . Il suffit en fait que f soit dérivable pour que cette condition soit satisfaite.

Théorème 5.2. [Goursat] Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors pour tous $u, v, w \in \mathbb{C}$ tels que $T(u, v, w) \subset \Omega$ on a $\int_{\partial T(u, v, w)} f(z) dz = 0$.

Démonstration. Admis dans le cadre de ce cours. La démonstration se trouve en fin de chapitre dans les compléments (Section 5.5.1).

Remarque 5.10. Attention, on demande que le triangle plein $T(u, v, w)$ soit inclus dans Ω et pas juste son bord, voir l'exemple ci-dessous.

Exemple 5.8. Soit $\Omega = \mathbb{C}^*$ et $f : z \mapsto \frac{1}{z}$. La fonction f est bien holomorphe sur Ω . Prenons le triangle de sommets $a = 1$, $b = e^{i2\pi/3}$ et $c = e^{i4\pi/3}$. Le bord du triangle est dans Ω mais pas son intérieur (0 est à l'intérieur du triangle).



On va calculer l'intégrale de f le long du triangle. On a

$$\int_{\partial T(a, b, c)} \frac{dz}{z} = \int_{[a, b]} \frac{dz}{z} + \int_{[b, c]} \frac{dz}{z} + \int_{[c, a]} \frac{dz}{z}.$$

Les segments $[a, b]$ et $[c, a]$ sont inclus dans $\Omega_{]-\pi, \pi[}$ sur lequel la fonction f admet comme primitive, voir la Remarque 3.15, la détermination principale du logarithme. On a donc

$$\int_{[a, b]} \frac{dz}{z} + \int_{[c, a]} \frac{dz}{z} = \text{Log}(b) - \text{Log}(a) + \text{Log}(a) - \text{Log}(c) = i\frac{2\pi}{3} - \left(-i\frac{2\pi}{3}\right) = i\frac{4\pi}{3}.$$

Enfin $[b, c]$ est inclus dans $\Omega_{]0, 2\pi[}$ sur lequel la fonction f admet comme primitive la fonction $F(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$ où $\arg(z)$ est l'unique argument de z dans $]0, 2\pi[$. Ainsi $\int_{[b, c]} \frac{dz}{z} = F(c) - F(b) = i \frac{4\pi}{3} - i \frac{2\pi}{3} = i \frac{2\pi}{3}$. Finalement on obtient $\int_{\partial T(a, b, c)} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$.

On pourra noter que la valeur de l'intégrale est $2i\pi$, la même que dans le 3. de l'Exemple 5.3. Ce n'est pas un hasard, voir la Section 5.3.

La première conséquence du Théorème de Goursat est que dans un ouvert étoilé toutes les fonctions holomorphes ont des primitives.

Théorème 5.3. Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f admet une primitive sur Ω . En particulier pour tout lacet γ dont l'image est incluse dans Ω on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Démonstration. Comme f est holomorphe son intégrale le long de n'importe quel triangle inclus dans Ω est nulle d'après le Théorème de Goursat. Puisque Ω est étoilé le Théorème 5.1 garantit que f admet une primitive F sur Ω . $\square$

Remarque 5.11. L'hypothèse sur Ω est importante ! Dans l'Exemple 5.3 la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe mais son intégrale le long du cercle $C(0, 1)$ n'est pas nulle. On ne dit cependant pas que cette hypothèse est indispensable. La fonction $g(z) = \frac{1}{z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ qui n'est pas étoilé mais son intégrale le long de n'importe quel lacet est nulle puisque g admet une primitive (la fonction $-f$).

Corollaire 5.2. Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ et tous chemins γ_1, γ_2 allant de z_1 à z_2 on a $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$.

Application. On va utiliser le Théorème 5.3 pour calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Celle-ci joue un rôle important en mathématiques et en particulier en théorie des probabilités (voir le cours de Probabilités du S6). Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction intégrable, i.e. telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ soit convergente, on appelle

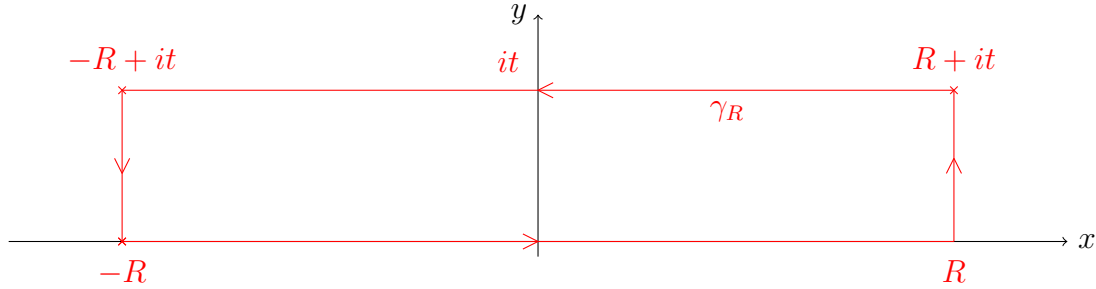
transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x) dx$.

Comme $t, x \in \mathbb{R}$ on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^{-itx}| = 1$ donc $|e^{-itx} f(x)| = |f(x)|$ ce qui prouve que la fonction $x \mapsto e^{-itx} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\hat{f}(t)$ est bien définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le préfacteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est une convention qui peut varier selon les livres.

On prend ici $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. La fonction f est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ (vérifiez-le). On rappelle/admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{2\pi}$. Afin de calculer $\hat{f}(t)$ on va considérer l'intégrale

de la fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$ le long du lacet γ_R composé des segments de sommets $z_1 = -R$, $z_2 = R$, $z_3 = R + it$, $z_4 = -R + it$, i.e. l'image de γ_R est un rectangle

(parcouru dans le sens trigonométrique si $t > 0$ et dans le sens contraire si $t < 0$).



La fonction g est holomorphe (composée de fonctions holomorphes) donc, pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\gamma_R} g(z) dz \\
 &= \int_{[-R, R]} g(z) dz + \int_{[R, R+it]} g(z) dz + \int_{[R+it, -R+it]} g(z) dz + \int_{[-R+it, -R]} g(z) dz \\
 &= \int_{-R}^R e^{-x^2/2} dx + \int_0^t e^{-(R+is)^2/2} i ds - \int_{-R}^R e^{-(x+it)^2/2} dx - \int_0^t e^{-(-R+is)^2/2} i ds. \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

On va regarder chacun des quatre termes. Comme $f(x) = e^{-x^2/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Le troisième terme s'écrit

$$\int_{-R}^R e^{-(x+it)^2/2} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^R e^{-itx - \frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^R e^{-itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

et le même argument que ci-dessus montre qu'on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^R e^{-itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e^{\frac{t^2}{2}} \hat{f}(t).$$

Pour le deuxième terme on a

$$\left| \int_0^t e^{-(R+is)^2/2} i ds \right| \leq \int_0^{|t|} \left| e^{-(R+is)^2/2} \right| ds = \int_0^{|t|} e^{(-R^2+s^2)/2} ds \leq |t| e^{(-R^2+t^2)/2},$$

et donc $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-(R+is)^2/2} i ds = 0$. On montre de la même façon que le quatrième terme de (5.3) tend vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$. En passant à la limite $R \rightarrow +\infty$ dans (5.3) on en déduit donc que

$$0 = \sqrt{2\pi} + 0 - \sqrt{2\pi} e^{\frac{t^2}{2}} \hat{f}(t) + 0 \iff \hat{f}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t),$$

i.e. la transformée de Fourier de f est elle-même.

Une seconde conséquence du Théorème de Goursat est une amélioration du Théorème 4.4 : il suffit de supposer que f est holomorphe, pas besoin de demander que sa dérivée f' soit continue.

Théorème 5.4. *Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f est analytique sur Ω .*

Démonstration. On veut montrer que f est DSE en tout $z_0 \in \Omega$. Soit donc $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$ (Ω est ouvert). D'après le Théorème de Goursat pour tout triangle $T(a, b, c)$ inclus dans $D(z_0, r)$ on a $\int_{\partial T(a,b,c)} f(z) dz = 0$. Comme $D(z_0, r)$ est étoilé (c'est un disque), le Théorème 5.1 garantit que f admet une primitive F sur $D(z_0, r)$. La fonction F est C^1 sur $D(z_0, r)$, puisque sa dérivée f est continue car dérivable, donc F y est analytique. Sa dérivée f est donc analytique sur $D(z_0, r)$ et en particulier elle est DSE en z_0 . $\square$

Remarque 5.12. *Puisqu'une fonction holomorphe est analytique elle vérifie toutes les propriétés vues au chapitre précédent : formule de Cauchy, zéros isolés, prolongement analytique, principe du maximum, théorème de Liouville.*

Remarque 5.13. *Comme on l'a vu dans le Théorème 5.3, sur un ouvert étoilé toute fonction holomorphe possède une primitive. Le théorème ci-dessus montre que cette condition est en fait nécessaire. En effet si une fonction f admet une primitive F , alors F est holomorphe donc analytique. Sa dérivée $F' = f$ est donc aussi analytique et en particulier holomorphe. Conclusion : dans un ouvert étoilé, les fonctions qui admettent des primitives sont exactement les fonctions holomorphes. Attention, on rappelle que si Ω n'est pas étoilé alors une fonction holomorphe peut ne pas avoir de primitive.*

On termine cette section avec la réciproque du Théorème de Goursat.

Théorème 5.5. [Morera] *Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Si pour tous $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $T(a, b, c) \subset \Omega$ on a $\int_{\partial T(a,b,c)} f(z) dz = 0$ alors f est holomorphe.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. L'ensemble $D(z_0, r)$ est étoilé donc d'après le Théorème 5.1 la fonction f admet une primitive F sur $D(z_0, r)$. La fonction F est holomorphe sur $D(z_0, r)$ donc y est analytique et donc f également. En particulier f est dérivable en z_0 . C'est vrai pour tout $z_0 \in \Omega$ donc f est holomorphe sur Ω tout entier. $\square$

Remarque 5.14. *Dans tout ce qu'on a fait dans cette section on peut généraliser un peu l'hypothèse sur Ω et remplacer la notion d'ouvert étoilé par celle d'ouvert dit simplement connexe. L'idée de Ω simplement connexe est qu'il n'y a pas de "trou à l'intérieur" de Ω . Autrement dit, quel que soit le lacet qu'on prenne dans Ω tout ce qui est à l'intérieur du lacet est dans Ω . La notion d'ouvert étoilé est amplement suffisante pour ce qu'on fera par la suite, on se restreindra donc à ce cadre plus simple à définir proprement.*

5.3 Indice d'un point par rapport à un chemin fermé

Le même calcul que dans l'Exemple 5.3 montre que si $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ est un paramétrage du cercle $C(z_0, r)$ parcouru une fois dans le sens direct on a $\int_{\gamma} \frac{dw}{w - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(z_0 + re^{it}) - z_0} dt = 2i\pi$. Plus généralement on a vu, voir (4.7), que si $z \in D(z_0, r)$ on a

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w - z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z} ire^{it} dt = 2i\pi,$$

tandis que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ on a, voir (4.13),

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z} ire^{it} dt = 0.$$

Etant donné $n \in \mathbb{Z}$ on considère cette fois $\gamma_n : [0, 2n\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ si $n \geq 0$ et $\gamma_n : [0, -2n\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{-it}$ si $n < 0$. On a ainsi un paramétrage du cercle $C(z_0, r)$ parcouru $|n|$ fois, dans le sens direct si $n > 0$ et indirect si $n < 0$. En utilisant le Corollaire 5.1 et la Proposition 5.2 on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\int_{\gamma_n} \frac{dw}{w-z} = n \times \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 2in\pi & \text{si } z \in D(z_0, r), \\ 0 & \text{si } z \notin \overline{D}(z_0, r). \end{cases}$$

Autrement dit, au facteur $2i\pi$ près, l'intégrale de la fonction $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ le long de γ_n compte le nombre de tours faits par le chemin fermé γ_n autour de z en comptant ces tours positivement s'ils sont dans le sens direct et négativement dans le sens indirect : n tours si z est à l'intérieur du cercle et que celui-ci est parcouru n fois et 0 tours si z est à l'extérieur du cercle.

On va voir qu'on peut généraliser cela à n'importe quel chemin fermé γ et n'importe quel point z qui n'est pas sur l'image de γ (sinon l'intégrale considérée n'a pas de sens).

Définition 5.8. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé d'image Γ et $z \notin \Gamma$. On appelle indice de z par rapport à γ la quantité

$$\text{Ind}(\gamma, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}.$$

Remarque 5.15. L'indice ne dépend pas du paramétrage choisi mais uniquement de son image Γ , en prenant en compte le sens de parcours et le nombre de fois où le chemin est parcouru.

L'interprétation de l'indice est qu'il compte le nombre de tours que γ fait autour de z (on vient de voir que c'était le cas si γ était un lacet formé par un cercle parcouru une ou plusieurs fois). On va essayer de comprendre que ce n'est pas restreint au cas du cercle.

Comme z n'est pas sur l'image de γ , pour tout t on peut écrire $\gamma(t) - z = r(t)e^{i\theta(t)}$ avec $r(t) = |\gamma(t) - z| > 0$ et $\theta(t)$ un argument de $\gamma(t) - z$. On va supposer pour simplifier que les deux fonctions $r(t)$ et $\theta(t)$ sont de classe C^1 (c'est facile à justifier pour $r(t)$ si $\gamma(t)$ est C^1 , faites-le, mais ce n'est pas évident pour $\theta(t)$). Comme γ est un chemin fermé on a $\gamma(a) = \gamma(b)$ et donc $r(a) = r(b)$ et $\theta(b) - \theta(a) = 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Puisque la fonction $t \mapsto \theta(t)$ est continue l'entier n compte bien le nombre total de tours fait par γ autour de z , comptés positivement si on va dans le sens direct et négativement si on va dans le sens indirect. On calcule alors

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\gamma, z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{1}{r(t)e^{i\theta(t)}} (r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)\theta'(t)e^{i\theta(t)}) dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{r'(t)}{r(t)} + i\theta'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi} [\ln(r(t)) + i\theta(t)]_a^b \\
&= \frac{1}{2i\pi} \left(\underbrace{\ln(r(b)) - \ln(r(a))}_{=0} + \underbrace{i\theta(b) - i\theta(a)}_{=2in\pi} \right) \\
&= n.
\end{aligned}$$

Remarque 5.16. Si on reprend l'Exemple 5.8 ce qu'on a fait c'est de calculer l'indice de 0 par rapport au triangle $\partial T(0, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3})$ parcouru une fois dans le sens direct. On a bien trouvé que cet indice était égal à 1.

Théorème 5.6. Pour tout chemin fermé $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ d'image Γ et tout $z \notin \Gamma$ l'indice $\text{Ind}(\gamma, z)$ est un nombre entier.

Démonstration. Pour simplifier on fait la preuve dans le cas où γ est de classe C^1 .

Pour tout $t \in [a, b]$ on considère $\varphi(t) = \exp \left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right)$. La quantité dans l'exponentielle n'est rien d'autre que l'intégrale de la fonction $f(w) = \frac{1}{w-z}$ le long du chemin γ_t obtenu comme la restriction de γ à l'intervalle $[a, t]$. On a ainsi $\varphi(b) = \exp(2i\pi \text{Ind}(\gamma, z))$ et on veut donc montrer que $\varphi(b) = 1$. La fonction φ est de classe C^1 et vérifie

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \varphi(t).$$

On en déduit que la fonction ψ définie par $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}$ est C^1 et a pour dérivée

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0.$$

La fonction ψ est constante. En particulier $\psi(a) = \psi(b)$ mais comme $\gamma(a) = \gamma(b)$, puisque γ est un chemin fermé, on en déduit que $\varphi(b) = \varphi(a) = 1$. $\square$

On peut également facilement vérifier que étant donné un chemin fermé γ l'indice est une fonction continue de z .

Proposition 5.7. Soit γ un chemin fermé d'image Γ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Alors la fonction $z \mapsto \text{Ind}(\gamma, z)$ est continue sur Ω . Elle est constante sur chaque sous-ensemble connexe par arcs $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Enfin si $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ est connexe par arcs et non borné alors $\text{Ind}(\gamma, z) = 0$ pour tout $z \in \tilde{\Omega}$, en particulier il existe $R > 0$ tel que $\text{Ind}(\gamma, z) = 0$ pour tout $|z| > R$.

Démonstration. A nouveau on fait la preuve dans le cas où γ est C^1 .

L'ensemble Γ est l'image du compact $[a, b]$ par la fonction continue γ donc Γ est compact. En particulier il est fermé donc Ω est ouvert. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. La fonction $(t, z) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$ est continue sur $[a, b] \times D(z_0, r)$, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre garantit que $\text{Ind}(\gamma, z)$ est continue sur $D(z_0, r)$ et en particulier en z_0 .

Le fait que $\text{Ind}(\gamma, z)$ soit constant sur tout ensemble $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ connexe par arcs provient alors du fait que cette fonction est continue et à valeurs entières (c'est le même argument qu'on a utilisé dans la Section 3.4).

Si $\tilde{\Omega}$ n'est pas borné il existe $(z_n)_n \in \tilde{\Omega}^{\mathbb{N}}$ telle que $|z_n| \rightarrow \infty$. Comme l'image Γ de γ est compacte elle est bornée, il existe $R \geq 0$ tel que $|\gamma(t)| \leq R$ pour tout $t \in [a, b]$. En utilisant la Proposition 5.4 on obtient, pour tout n tel que $|z_n| > R$ (c'est vrai à partir d'un certain rang puisque $|z_n| \rightarrow \infty$),

$$|\text{Ind}(\gamma, z_n)| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \sup_{t \in [a, b]} \frac{1}{|\gamma(t) - z_n|} \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \sup_{t \in [a, b]} \frac{1}{|z_n| - |\gamma(t)|} \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi(|z_n| - R)}.$$

Ainsi, puisque $|z_n| \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ind}(\gamma, z_n) = 0$ mais comme la fonction $z \mapsto \text{Ind}(\gamma, z)$ est constante sur $\tilde{\Omega}$ elle est nulle.

Finalement si R est comme ci-dessus alors $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ est un sous-ensemble connexe par arcs non-borné de Ω ce qui prouve le résultat. $\square$

Remarque 5.17. *Etant donné un ouvert Ω on peut montrer que Ω se décompose de façon unique comme une réunion disjointe de domaines, i.e. de sous-ensembles ouverts et connexes par arcs. Ces ensembles sont appelés les composantes connexes par arcs de Ω . On peut alors reformuler la proposition ci-dessus en disant que l'indice est constant sur chaque composante connexe par arcs de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dans le cas présent comme $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subset \Omega$ on en déduit qu'il existe une unique composante connexe par arcs non-bornée de Ω .*

5.4 Formule de Cauchy - le cas général

On a vu dans le chapitre précédent la formule de Cauchy (4.12) qui relie la valeur d'une fonction C^1 à l'intérieur d'un disque aux valeurs de cette fonction sur le bord du disque. Maintenant qu'on sait que toute fonction holomorphe est C^1 cette formule reste vraie si f est seulement supposée holomorphe. Plus précisément, si f est holomorphe sur $D(z_0, R)$ alors pour tout $0 < r < R$ et tout $z \in D(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z} re^{it} dt.$$

On a par ailleurs vu que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ alors cette même intégrale est nulle. Ces intégrales sont en fait des intégrales le long d'un chemin décrivant le cercle $C(z_0, r)$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Si on paramètre celui-ci par $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ on constate que la formule de Cauchy peut se réécrire de la façon suivante :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \forall z \in D(z_0, r),$$

tandis que si $z \notin \overline{D}(z_0, r)$ on a $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0$. Puisque l'indice de z par rapport à $C(z_0, r)$ vaut 0 ou 1 selon que z est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle, on peut résumer cela sous la forme

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \times \text{Ind}(C(z_0, r), z), \quad \forall z \notin C(z_0, r).$$

On va voir que cette formule reste vraie dans le cas où on fait l'intégrale le long d'un lacet qui n'est pas forcément un cercle. La distinction z est à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle devient alors z est à l'intérieur ou à l'extérieur du lacet. Si on autorise γ à être un chemin fermé, et pas forcément un lacet, il faudra prendre en compte le nombre de tours faits par γ autour de z , i.e. précisément l'indice $\text{Ind}(\gamma, z)$. La formule de Cauchy jouera un rôle important dans le chapitre suivant (Théorème 6.2).

Théorème 5.7. [Formule de Cauchy] Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si γ est un chemin fermé dont l'image est incluse dans Ω et $z_0 \in \Omega$ n'est pas sur l'image de γ alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \times \text{Ind}(\gamma, z_0). \quad (5.4)$$

 **Attention !** Ne pas oublier l'hypothèse sur le domaine Ω . Celui-ci doit être étoilé.

Démonstration. On décompose $f(z) = f(z) - f(z_0) + f(z_0)$. On a alors

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + 2i\pi f(z_0) \times \text{Ind}(\gamma, z_0).$$

Il reste donc à montrer que $\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$.

Soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ si $z \neq z_0$ et $g(z_0) = f'(z_0)$. La fonction g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. On va montrer que g est aussi dérivable en z_0 . Ainsi g sera holomorphe sur l'ouvert étoilé Ω et donc d'après le Théorème 5.3 on aura bien

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} g(z) dz = 0.$$

Puisque f est holomorphe elle est analytique. Il existe donc $r > 0$ et $(a_n)_n$ tels que pour tout $z \in D(z_0, r)$ on ait $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ avec $a_0 = f(z_0)$ et $a_1 = f'(z_0)$. On a donc, pour

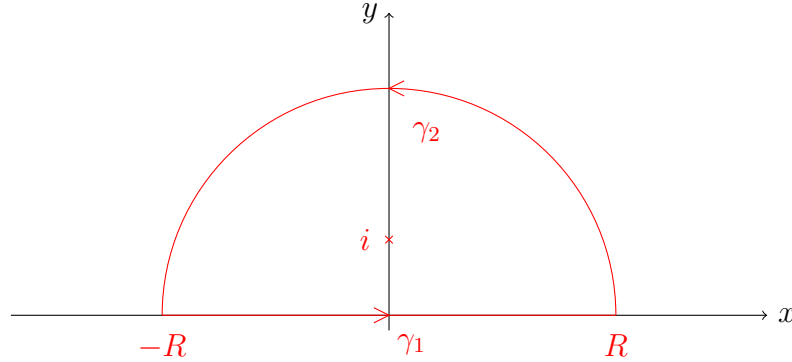
tout $z \in D(z_0, r)$ avec $z \neq z_0$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-1}$. Par définition de $g(z_0)$ cela reste vrai en $z = z_0$. Conclusion : la fonction g est DSE en z_0 et donc y est bien dérivable. $\square$

La formule de Cauchy est en fait un outil très puissant. Elle permet de calculer des intégrales sans avoir à calculer de primitives ! En choisissant soigneusement la fonction f et le contour γ elle permet de calculer certaines intégrales réelles, soit qu'on n'aurait pas pu calculer autrement soit plus facilement qu'avec d'autres méthodes. On va voir comment ça fonctionne sur un exemple.

Application. On voudrait calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt$. Pour ça on va calculer

$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz$ où γ est un lacet décrivant le bord du demi-disque de centre 0 et rayon $R > 1$ dans le demi-plan $\text{Im}(z) \geq 0$ et parcouru dans le sens direct. On va écrire γ comme la

concaténation des chemins γ_1 , le segment $[-R, R]$, et γ_2 , le demi-cercle supérieur.



La fonction $g(t) = \frac{\cos(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|g(t)| = O(\frac{1}{t^2})$ en $+\infty$, donc I est bien définie. De plus la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ et le long de γ_1 on a

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{it}}{1+t^2} dt = \int_{-R}^R \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt + i \int_{-R}^R \frac{\sin(t)}{1+t^2} dt \stackrel{\text{parité}}{=} 2 \int_0^R \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2I.$$

Par ailleurs, sur l'ouvert étoilé $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > -1\}$ la fonction $h(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$ est holomorphe et $f(z) = \frac{h(z)}{z-i}$ donc, d'après la formule de Cauchy,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{h(z)}{z-i} dz = 2i\pi \times h(i) \times \text{Ind}(\gamma, i) = \frac{\pi}{e}.$$

On a ainsi $\frac{\pi}{e} = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$ avec $\int_{\gamma_1} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2I$. Finalement, en prenant $\gamma_2 : [0, \pi] \ni t \mapsto Re^{it}$ on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{\exp(iRe^{it})}{R^2 e^{i2t} + 1} \times iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{|\exp(-R \sin(t) + iR \cos(t))|}{|R^2 e^{i2t} + 1|} R dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{\exp(-R \sin(t))}{R^2 - 1} R dt \\ &\leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Conclusion : On a $\frac{\pi}{e} = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 2I + 0$ donc $I = \frac{\pi}{2e}$.

La formule de Cauchy se généralise pour obtenir les dérivées de la fonction f à l'aide des valeurs de f le long d'un lacet. On a en effet vu, voir (4.11), que si f est analytique sur $D(z_0, R)$ alors pour tout $r < R$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-int} dt$.

En termes d'intégrales de chemin cela s'écrit $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$. De façon plus générale on montre

Proposition 5.8. *[Formule de Cauchy] Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si γ est un chemin fermé dont l'image est incluse dans Ω et $z_0 \in \Omega$ n'est pas sur l'image de γ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \times \text{Ind}(\gamma, z_0). \quad (5.5)$$

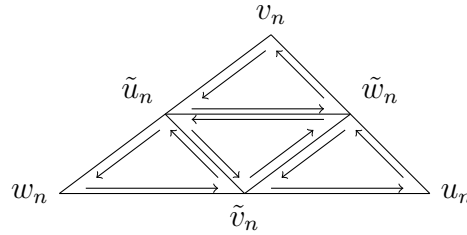
5.5 Compléments

5.5.1 Preuve du théorème de Goursat

On se donne $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et u, v, w tel que $T(u, v, w) \subset \Omega$. On veut montrer que

$$\int_{\partial T(u, v, w)} f(z) dz = 0.$$

On note $u_0 = u$, $v_0 = v$, $w_0 = w$ et on va construire une suite de chemins triangulaires $\tau_n = \partial T(u_n, v_n, w_n)$ de la façon suivante. Etant construit τ_n on note $\tilde{u}_n$, $\tilde{v}_n$ et $\tilde{w}_n$ les milieux des côtés de τ_n opposés à u_n, v_n, w_n , i.e. $\tilde{u}_n = \frac{v_n + w_n}{2}$, $\tilde{v}_n = \frac{u_n + w_n}{2}$ et $\tilde{w}_n = \frac{u_n + v_n}{2}$. On décompose alors τ_n à l'aide des 4 triangles comme sur le dessin ci-dessous

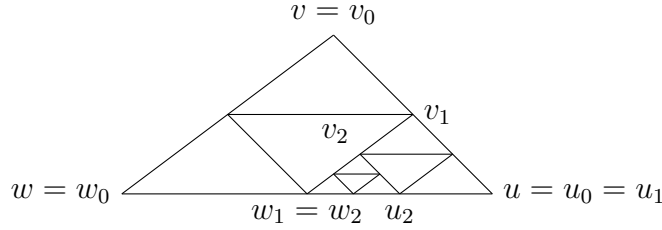


$$\begin{aligned} & \int_{\tau_n} f(z) dz \\ &= \int_{[u_n, v_n]} f(z) dz + \int_{[v_n, w_n]} f(z) dz + \int_{[w_n, u_n]} f(z) dz \\ &= \int_{[u_n, \tilde{w}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{w}_n, v_n]} f(z) dz + \int_{[v_n, \tilde{u}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{u}_n, w_n]} f(z) dz + \int_{[w_n, \tilde{v}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{v}_n, u_n]} f(z) dz \\ &= \int_{[u_n, \tilde{w}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{w}_n, \tilde{v}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{v}_n, u_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{u}_n, v_n]} f(z) dz + \int_{[v_n, \tilde{u}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{u}_n, \tilde{w}_n]} f(z) dz \\ &\quad + \int_{[\tilde{u}_n, w_n]} f(z) dz + \int_{[w_n, \tilde{v}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{v}_n, \tilde{u}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{u}_n, v_n]} f(z) dz + \int_{[v_n, \tilde{w}_n]} f(z) dz + \int_{[\tilde{w}_n, \tilde{u}_n]} f(z) dz \\ &= \int_{\partial T(u_n, \tilde{w}_n, \tilde{v}_n)} f(z) dz + \int_{\partial T(\tilde{w}_n, v_n, \tilde{u}_n)} f(z) dz + \int_{\partial T(\tilde{u}_n, w_n, \tilde{v}_n)} f(z) dz + \int_{\partial T(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n)} f(z) dz. \end{aligned}$$

On choisit τ_{n+1} parmi $\partial T(u_n, \tilde{w}_n, \tilde{v}_n)$, $\partial T(\tilde{w}_n, v_n, \tilde{u}_n)$, $\partial T(\tilde{u}_n, w_n, \tilde{v}_n)$ et $\partial T(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n)$, tel que le module de l'intégrale de f soit maximum. L'inégalité triangulaire garantit alors que

$$\left| \int_{\tau_n} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\tau_{n+1}} f(z) dz \right|.$$

D'autre part on vérifie facilement que le périmètre de τ_{n+1} est la moitié de celui de τ_n , i.e. $L(\tau_{n+1}) = \frac{1}{2}L(\tau_n)$. On construit ainsi par récurrence la suite de triangles $(\tau_n)_n$.



On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_{\tau_0} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\tau_n} f(z) dz \right| \quad \text{et} \quad L(\tau_n) = \frac{1}{2^n} L(\tau_0). \quad (5.6)$$

Quelle que soit la façon de nommer les sommets des triangles successifs on a toujours $|u_{n+1} - u_n| \leq L(\tau_n) = \frac{1}{2^n} L(\tau_0)$. La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est donc absolument convergente donc convergente, i.e. la suite $(u_n)_n$ converge. On note z_0 sa limite. Comme $L(\tau_n) \rightarrow 0$ on en déduit facilement que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent aussi vers z_0 qui est dans le triangle initial (ou sur le bord).

La fonction f est dérivable en z_0 (il faut bien utiliser l'hypothèse de dérivabilité à un moment donné) donc il existe $\varepsilon(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ telle que

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + |z - z_0|\varepsilon(z).$$

La fonction $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ est polynomiale donc admet une primitive. Son intégrale le long de n'importe quel lacet est donc nulle, en particulier le long de n'importe quel triangle τ_n . Ainsi on a, pour tout n ,

$$\left| \int_{\tau_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\tau_n} f(z) dz - \int_{\tau_n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)) dz \right| = \left| \int_{\tau_n} |z - z_0|\varepsilon(z) dz \right|.$$

et donc en utilisant la Proposition 5.4 on a

$$\left| \int_{\tau_n} f(z) dz \right| \leq L(\tau_n) \sup_{z \in \tau_n} |z - z_0| \times |\varepsilon(z)|.$$

Pour tout $z \in \tau_n$, comme z_0 est intérieur au triangle τ_n on a $|z - z_0| \leq \frac{1}{2}L(\tau_n)$ (la longueur maximale est celle du plus grand côté du triangle qui est inférieure au demi-périmètre). Finalement, en utilisant la majoration ci-dessus et (5.6), on a pour tout n

$$\left| \int_{\tau_0} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\tau_n} f(z) dz \right| \leq 4^n \frac{L(\tau_n)^2}{2} \sup_{z \in \tau_n} |\varepsilon(z)| = \frac{L(\tau_0)^2}{2} \sup_{z \in \tau_n} |\varepsilon(z)|.$$

Comme $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z) = 0$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \tau_n} |\varepsilon(z)| = 0$ (les points sur τ_n sont à distance au plus $\frac{L(\tau_n)}{2} = \frac{L(\tau_0)}{2^{n+1}}$ de z_0) et donc que $\int_{\partial T(u,v,w)} f(z) dz = \int_{\tau_0} f(z) dz = 0$.

5.5.2 Suites et séries de fonctions holomorphes, fonctions définies par une intégrale

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ et qu'elle converge uniformément vers f alors f est continue (voir la Section 3.1). Si on suppose de plus que les f_n sont holomorphes (avec Ω ouvert) on voudrait savoir si f est aussi holomorphe. Lorsque les fonctions sont à variables réelles vous avez vu en L2 qu'il fallait pour cela une condition de convergence uniforme sur la suite des fonctions dérivées, i.e. sur $(f'_n)_n$, et qu'on avait alors $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$. Pour les fonctions holomorphes ce n'est en fait pas nécessaire. On voit donc ici une autre manifestation de la “rigidité” des fonctions holomorphes.

Théorème 5.8. *Soit Ω un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω . Si $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$ alors f est holomorphe sur Ω .*

Remarque 5.18. *On peut également démontrer que la suite $(f'_n)_n$ converge alors uniformément vers f' sur tout compact $K \subset \Omega$, et donc par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact $K \subset \Omega$.*

Remarque 5.19. *L'hypothèse de convergence uniforme sur tout compact $K \subset \Omega$ est plus faible que celle de convergence uniforme sur Ω . On a déjà rencontré ce type de situations pour les séries entières : il y a convergence normale (et donc uniforme) sur tout disque $\overline{D}(0, r)$ avec $r < R$ (le rayon de convergence). Cela ne garantit pas la convergence uniforme sur Ω tout entier. Par contre c'est suffisant pour garantir que la somme est continue.*

Démonstration. On peut déjà affirmer que f est continue sur Ω (voir la remarque ci-dessus). On va maintenant montrer que f est holomorphe. La preuve repose sur le théorème de Goursat et sa “réciproque” le théorème de Morera. Soit donc $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. On va montrer que f est holomorphe sur $D(z_0, r)$ et donc en particulier dérivable en z_0 . D'après le théorème de Morera, puisque f est continue il suffit de montrer que pour tous $a, b, c \in D(z_0, r)$ on a $\int_{\partial T(a,b,c)} f(z) dz = 0$.

Soit donc $a, b, c \in D(z_0, r)$. Par hypothèse toutes les fonctions f_n sont holomorphes sur $D(z_0, r)$ donc d'après le théorème de Goursat on a $\int_{\partial T(a,b,c)} f_n(z) dz = 0$. Or la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\overline{D}(z_0, r)$ et donc en particulier sur $\partial T(a, b, c) \subset \overline{D}(z_0, r)$. On peut donc intervertir limite et intégrale et ainsi

$$\int_{\partial T(a,b,c)} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial T(a,b,c)} f_n(z) dz = 0.$$

□

En appliquant le théorème précédent à la suite des sommes partielles on obtient immédiatement la version suivante pour les séries de fonctions holomorphes.

Théorème 5.9. *Soit Ω un ouvert et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω . On suppose que $\sum f_n$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors f est holomorphe sur Ω .*

Remarque 5.20. *Dans la pratique pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions on peut bien entendu montrer la convergence normale.*

Exemple 5.9. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Pour tout $n \geq 1$ on note $f_n(z) = \frac{1}{n^z} = e^{-z \ln(n)}$. Les fonctions f_n sont bien toutes holomorphes sur Ω (et même sur $\mathbb{C}$ tout entier). De plus, si $\alpha > 1$ alors pour tout z tel que $\operatorname{Re}(z) > \alpha$ on a $|f_n(z)| = e^{-\operatorname{Re}(z) \ln(n)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge cela garantit que la série $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > \alpha\}$. Sa somme $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ est donc holomorphe sur Ω_α , et comme c'est vrai pour tout $\alpha > 1$, elle est holomorphe sur Ω tout entier.

Cette fonction est appelée fonction zeta de Riemann, notée habituellement ζ , et joue un rôle très important en mathématiques, en particulier en théorie des nombres.

Un autre type de fonctions que l'on rencontre fréquemment sont les fonctions définies par une intégrale, i.e. de la forme $F(z) = \int_I f(t, z) dt$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Dans le cas des fonctions de variable réelle vous avez vu en L2 que si la fonction f était continue par morceaux par rapport à t , i.e. pour tout x la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux, qu'elle était continue par rapport à x , i.e. pour tout t la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue, et qu'on pouvait "dominer" $f(t, x)$ par une fonction $g(t)$ intégrable, i.e. il existe $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|f(t, x)| \leq g(t)$ pour tous t, x et $\int_I g(t) dt$ converge, alors la fonction définie par $F(x) = \int_I f(t, x) dt$ était continue. Ici encore si on veut montrer que F est dérivable, en plus de $f(t, x)$ dérivable par rapport à x , il faut donner une hypothèse sur la dérivée de f , en l'occurrence une hypothèse de domination sur $\frac{\partial f}{\partial x}$ et pas sur f . Lorsqu'on considère les fonctions holomorphes ce n'est pas nécessaire et la domination sur f suffit. Plus précisément on a le théorème suivant.

Théorème 5.10. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On suppose que

1. pour tout $t \in I$ la fonction $\Omega \ni z \mapsto f(t, z)$ est holomorphe,
2. pour tout $z \in \Omega$ la fonction $I \ni t \mapsto f(t, z)$ est continue par morceaux,
3. pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $|f(t, z)| \leq g(t)$ pour tout $(t, z) \in I \times \Omega$ et $\int_I g(t) dt$ converge.

Alors pour tout $z \in \Omega$ l'intégrale $\int_I f(t, z) dt$ converge et la fonction F définie sur Ω par $F(z) = \int_I f(t, z) dt$ est holomorphe et vérifie $F'(z) = \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t, z) dt$ où $\frac{\partial f}{\partial z}(t, z)$ désigne la dérivée de la fonction $z \mapsto f(t, z)$.

Remarque 5.21. Pour celles et ceux qui suivent le cours de théorie de la mesure, et donc l'intégrale de Lebesgue, vous pouvez bien entendu remplacer les hypothèses " $I \ni t \mapsto f(t, z)$ est continue par morceaux" et " $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux" par " $I \ni t \mapsto f(t, z)$ est mesurable" et " g mesurable".

Exemple 5.10. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ et $I =]0, +\infty[$. On considère la fonction définie sur $I \times \Omega$ par $f(t, z) = t^{z-1}e^{-t}$ où $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln(t)}$. On vérifie facilement que pour tout z la fonction $t \mapsto f(t, z)$ est continue sur I et que pour tout $t > 0$ la fonction $z \mapsto f(t, z)$

est holomorphe sur Ω (et même sur $\mathbb{C}$ tout entier). De plus, si $0 < \alpha < \beta$, pour tout z tel que $\alpha \leq \operatorname{Re}(z) \leq \beta$ on a

$$|f(t, z)| = e^{(\operatorname{Re}(z)-1)\ln(t)} e^{-t} \leq \begin{cases} e^{(\alpha-1)\ln(t)} e^{-t} = t^{\alpha-1} e^{-t}, & \text{si } t \leq 1, \\ e^{(\beta-1)\ln(t)} e^{-t} = t^{\beta-1} e^{-t}, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

La fonction g définie par $g(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} e^{-t}, & \text{si } t \leq 1, \\ t^{\beta-1} e^{-t}, & \text{si } t > 1, \end{cases}$ est continue par morceaux et $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge. En effet, en 0 on a $g(t) \sim t^{\alpha-1}$ et comme $\alpha-1 > -1$ l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1} dt$ converge. Et en $+\infty$ on a $g(t) = t^{\beta-1} e^{-t} = t^{-2} \times t^{\beta+1} e^{-t} = o(t^{-2})$ puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\beta+1} e^{-t} = 0$ (croissances comparées), et donc $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge.

On en déduit que $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définit une fonction holomorphe sur tout ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \operatorname{Re}(z) \leq \beta\}$ et donc sur Ω . Cette fonction est appelée fonction Gamma.

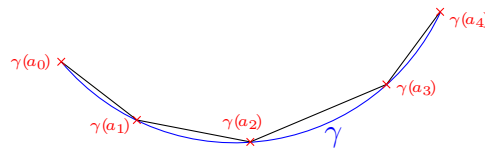
5.5.3 Longueur d'un chemin

Pour simplifier la présentation on va se placer dans le cas d'un chemin γ de classe C^1 . S'il est C^1 par morceaux, il faut d'abord découper ce chemin à l'aide d'une subdivision adaptée. L'idée est d'approcher l'image de γ par une ligne brisée dont les sommets sont sur cette image (voir la figure ci-dessous).

La longueur de la courbe sera supérieure ou égale à celle de la ligne brisée. Et on peut s'attendre à ce que la différence soit d'autant plus petite qu'on prendra un grand nombre de points (proches les uns des autres) sur cette ligne. C'est exactement la même idée que l'approche de l'aire sous la courbe par les sommes de Riemann que vous avez vue en L2 dans le cours d'Intégration, et c'est comme ça qu'on définit la notion de longueur d'une courbe.

Définition 5.9. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin. Pour toute subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a, b]$, i.e. $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, on note $L(\gamma, \sigma)$ la longueur de la ligne brisée de

sommets consécutifs les points $\gamma(a_j)$, i.e. $L(\gamma, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(a_{j+1}) - \gamma(a_j)|$.



Si elle est finie (on dit alors que γ est rectifiable), la quantité $L(\gamma) := \sup_{\sigma} L(\gamma, \sigma)$, où le sup est pris sur toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$, est appelée longueur de l'arc γ .

Remarque 5.22. La quantité $\sup_{\sigma} L(\gamma, \sigma)$ n'est pas toujours finie pour un chemin juste continu (si γ est trop "irrégulier"). C'est pour ça qu'on parle d'arc rectifiable. La proposition suivante montre que pour les chemins C^1 ce problème ne se pose pas.

Proposition 5.9. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un chemin de classe C^1 alors γ est rectifiable et sa longueur est donnée par $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

La Définition 5.5 donnée au début du chapitre correspond exactement au résultat ci-dessus.

Démonstration. Étant donnée une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ on a

$$L(\gamma, \sigma) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(a_{j+1}) - \gamma(a_j)| = \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} \gamma'(t) dt \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a_j}^{a_{j+1}} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

C'est vrai pour toute subdivision donc $L(\gamma)$ est fini (γ est rectifiable) et $L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Pour montrer l'égalité, il suffit de prouver qu'il existe une suite de subdivision $(\sigma_n)_n$ telle que $L(\gamma, \sigma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. On va prendre des subdivisions de pas constant. Étant donné $n \geq 1$, on considère $\sigma_n = \{a_0, \dots, a_n\}$ avec $a_j = a + j \frac{b-a}{n}$ ainsi $a_{j+1} - a_j = \frac{b-a}{n}$ pour tout j (c'est le genre de subdivision que vous utilisez en analyse numérique pour la méthode des rectangles à gauche ou à droite). Puisque la fonction $t \mapsto |\gamma'(t)|$ est continue on a (sommes de Riemann)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma'(a_j)| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Il suffit donc de montrer que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma, \sigma_n) - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma'(a_j)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left(|\gamma(a_{j+1}) - \gamma(a_j)| - \frac{b-a}{n} |\gamma'(a_j)| \right). \quad (5.7)$$

Pour tout j , l'inégalité triangulaire inversée ($||z| - |z'|| \leq |z - z'|$) donne

$$\left| |\gamma(a_{j+1}) - \gamma(a_j)| - \frac{b-a}{n} |\gamma'(a_j)| \right| \leq \left| \gamma(a_{j+1}) - \gamma(a_j) - \frac{b-a}{n} \gamma'(a_j) \right| = |f(a_{j+1}) - f(a_j)|,$$

où $f(t) = \gamma(t) - (t - a_j) \gamma'(a_j)$. L'inégalité des accroissements finis (f est C^1) donne

$$|f(a_{j+1}) - f(a_j)| \leq \sup_{t \in [a_j, a_{j+1}]} |f'(t)| \times \frac{b-a}{n} = \sup_{t \in [a_j, a_{j+1}]} |\gamma'(t) - \gamma'(a_j)| \times \frac{b-a}{n},$$

et ainsi

$$\left| L(\gamma, \sigma_n) - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma'(a_j)| \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{t \in [a_j, a_{j+1}]} |\gamma'(t) - \gamma'(a_j)|. \quad (5.8)$$

Finalement, la fonction γ' est continue sur le segment $[a, b]$, donc uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $s, t \in [a, b]$, si $|t - s| < \delta$ alors $|\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Pour tout $n > \frac{b-a}{\delta}$ on a $\frac{b-a}{n} < \delta$. Ainsi pour tout $t \in [a_j, a_{j+1}]$ on a $|t - a_j| < \delta$ et donc

$\sup_{t \in [a_j, a_{j+1}]} |\gamma'(t) - \gamma'(a_j)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. L'inégalité (5.8) montre ainsi que pour tout entier $n > \frac{b-a}{\delta}$ on a

$$\left| L(\gamma, \sigma_n) - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma'(a_j)| \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon,$$

ce qui prouve bien (5.7). $\square$

CHAPITRE 6

FONCTIONS MÉROMORPHES

On va s'intéresser dans ce dernier chapitre aux fonctions qui sont holomorphes sauf peut-être en certains points. L'exemple le plus simple est celui où f est la fonction inverse qui est holomorphe sauf en $z = 0$. On a vu qu'une des conséquences était que l'intégrale de f le long d'un lacet n'était pas forcément nulle. Par exemple si $r > 0$ on a $\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = 2i\pi$. Le fait que la fonction f ne soit pas holomorphe en 0 n'explique pas tout. En effet la fonction $g(z) = \frac{1}{z^2}$ est également holomorphe sauf en 0. Cependant l'intégrale de g le long de n'importe quel lacet est nulle puisque g admet une primitive sur $\mathbb{C}^*$, la fonction $-f$. Prenons un dernier exemple, la fonction h définie par $h(z) = \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}$. Elle est holomorphe sauf en $z = 0$ et $z = 1$. Pour n'importe quel lacet γ ne passant pas par 0 ou 1 on a donc

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z-1)} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z-1} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z} - \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2}.$$

Puisque $\frac{1}{z^2}$ admet une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ la dernière intégrale est nulle. Les deux autres dépendent de la position de $z = 0$ et $z = 1$ par rapport au chemin γ : à un facteur $2i\pi$ près ce sont les indices de 0 et 1 par rapport à γ . On a ainsi

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z-1)} = 2i\pi \text{Ind}(\gamma, 1) - 2i\pi \text{Ind}(\gamma, 0).$$

C'est en particulier ce genre de formules qu'on va chercher à généraliser, c'est ce qu'on appellera le théorème des résidus.

6.1 Singularités isolées

Pour simplifier la présentation de la notion de singularité on va se placer dans cette section dans le cas où une fonction f ne possède qu'une seule singularité. On généralisera dans la section 6.2.

Définition 6.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que z_0 est une singularité isolée de f si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$.

On va voir qu'on peut classer les singularités en trois catégories. Les exemples ci-dessous sont caractéristiques de chacune de ces catégories.

Exemple 6.1. 1) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Mais elle se prolonge en une fonction holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier en posant $f(0) = 1$. En effet, par définition de la fonction sinus pour tout $z \neq 0$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$ et cela reste vrai pour $z = 0$. La fonction f est donc DSE en $z = 0$ et donc aussi holomorphe en 0.

2) $g(z) = \frac{z^4 + 2z^3 - z + 3}{z^3 - 2z^2 + z} = \frac{z^4 + 2z^3 - z + 3}{z(z-1)^2}$. La fonction g est définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. On voit qu'on ne peut pas prolonger g de façon holomorphe ni en 0 ni en 1, ni même en étant moins "exigeant" et en ne cherchant qu'un prolongement par continuité on ne pourrait pas. En effet on a $\lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)| = +\infty$ que ce soit en $z_0 = 0$ ou en $z_0 = 1$. Par contre on observe qu'on peut prolonger en $z = 0$ la fonction $zg(z)$ par 3, et en $z = 1$ la fonction $(z-1)^2 g(z)$ par 5. Pour $z_0 \in \{0, 1\}$ on peut prolonger non pas g en z_0 de façon holomorphe mais on peut prolonger une fonction de la forme $(z - z_0)^n g(z)$ (il suffit de prendre $n = 1$ en $z_0 = 0$ et $n = 2$ en $z_0 = 1$).

3) $h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$. La fonction h est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Par contre, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$ on ne peut pas prolonger la fonction $z^n h(z)$ de façon holomorphe en 0. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n h(x) = +\infty$ donc on ne peut même pas prolonger la fonction $z^n h(z)$ par continuité en 0.

Si on regarde le comportement de la fonction h lorsque $z \rightarrow 0$ on peut voir qu'il est très différent du cas précédent. En effet, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ alors que $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$, et sur l'axe imaginaire la fonction h est bornée mais n'a pas de limite en 0. En effet, si $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}^*$, on a $|h(iy)| = \left| \exp\left(\frac{1}{iy}\right) \right| = 1$ et $h(iy)$ n'a pas de limite lorsque y tend vers 0.

Exercice 6.1. Justifiez les affirmations concernant la fonction g dans l'exemple ci-dessus.

Définition 6.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe, i.e. z_0 est une singularité isolée de f . On dit que z_0 est

1. une singularité artificielle de f si f peut être prolongée en une fonction holomorphe sur Ω .
2. un pôle si z_0 n'est pas une singularité artificielle de f et s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la fonction $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω , autrement dit tel que z_0 soit une singularité artificielle de la fonction g . Le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(z - z_0)^m f(z)$ ait une singularité artificielle en z_0 est appelé l'ordre du pôle.
3. une singularité essentielle sinon.

Remarque 6.1. Si z_0 est un pôle d'ordre m on peut vérifier que le prolongement de g ne s'annule pas en z_0 (sinon on pourrait prolonger $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ en fonction holomorphe ce qui contredirait la définition de m). La fonction f peut donc s'écrire sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ avec g holomorphe sur Ω et ne s'annulant pas en z_0 . La définition de l'ordre d'un pôle est ainsi à rapprocher de celle de l'ordre d'un zéro d'une fonction holomorphe non-nulle, voir la Définition 4.3.

Si z_0 est une singularité artificielle alors la fonction f admet une limite en z_0 et en particulier elle est bornée au voisinage de z_0 . A contrario si z_0 est un pôle d'ordre m on peut écrire $f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ avec g holomorphe tel que $g(z_0) \neq 0$ et donc en particulier $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$. Ces deux propriétés caractérisent en fait les singularités artificielles et les pôles :

Théorème 6.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que z_0 est une singularité isolée de f . Alors*

1. z_0 est une singularité artificielle si et seulement si f est bornée au voisinage de z_0 .
2. z_0 est un pôle si et seulement si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$.

Démonstration. Dans les deux cas la condition nécessaire correspond à ce qui a été dit avant l'énoncé du théorème. On montre que ce sont bien aussi des conditions suffisantes.

1. On suppose que f est bornée au voisinage de z_0 , i.e. il existe $M \geq 0$ et $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a $|f(z)| \leq M$. Soit g la fonction définie sur Ω par $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ si $z \neq z_0$ et $g(z_0) = 0$. La fonction g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. De plus comme f est bornée au voisinage de z_0 on vérifie facilement que

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = (z - z_0)f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0.$$

Ainsi g est dérivable en z_0 avec $g'(z_0) = 0$. La fonction g est donc holomorphe, donc analytique, sur Ω . En particulier elle est DSE en z_0 avec $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. D'après la Proposition 4.1 il existe donc $r > 0$ tel que sur $D(z_0, r)$ on a

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

et donc sur $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n.$$

Si on pose $f(z_0) = a_2$ l'identité ci-dessus est valable sur $D(z_0, r)$, la fonction f est donc prolongeable en z_0 en une fonction DSE et en particulier y est dérivable.

2. On suppose cette fois que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$. Il existe donc $R > 0$ tel que pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a $|f(z)| \geq 1$. La fonction $\frac{1}{f}$ est donc holomorphe bornée sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. D'après 1. z_0 est donc une singularité artificielle de $\frac{1}{f}$ qui se prolonge ainsi en une fonction holomorphe, et donc analytique, sur $D(z_0, R)$. On note g ce prolongement et puisque $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ on en déduit que $g(z_0) = 0$. z_0 est donc un zéro de g qui n'est pas la fonction nulle (en dehors de z_0 c'est $\frac{1}{f}$). Soit n_0 l'ordre de ce zéro, i.e. $n_0 \in \mathbb{N}^*$ est le plus petit entier tel que $g^{(n_0)}(z_0) \neq 0$. Ainsi il existe $0 < r < R$ tel que sur $D(z_0, r)$ on ait

$$g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{n_0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_0+k} (z - z_0)^k}_{=: h(z)}$$

La fonction h est holomorphe sur $D(z_0, r)$ et ne s'y annule pas (g ne s'annule qu'en z_0 et $h(z_0) = a_{n_0} \neq 0$). Donc $\frac{1}{h}$ y est aussi holomorphe et pour tout $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ on a

$$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z - z_0)^{n_0} h(z) \iff (z - z_0)^{n_0} f(z) = \frac{1}{h(z)},$$

ce qui prouve que z_0 est bien un pôle (d'ordre n_0). $\square$

Ecriture de f au voisinage d'un pôle. Si z_0 est un pôle d'ordre m de f , la fonction g définie par $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ se prolonge en z_0 en une fonction holomorphe avec $g(z_0) \neq 0$. Comme une fonction holomorphe est analytique il existe $(b_k)_k$ et $R > 0$ tel que sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \iff f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k-m}.$$

Si pour tout $n \geq -m$ on note $a_n = b_{n+m}$, i.e. $b_k = a_{k-m}$, on a alors

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z - z_0)^{k-m} = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (6.1)$$

Cela ressemble à un DSE mais on commence avec quelques puissances négatives correspondant à l'ordre du pôle. En séparant les termes d'indices négatifs on écrit finalement, pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, f sous la forme

$$f(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} + h(z) \quad (6.2)$$

où $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est holomorphe sur $D(z_0, R)$, et $a_{-m} = b_0 = g(z_0) \neq 0$.

Remarque 6.2. Si z_0 est une singularité essentielle le comportement de f au voisinage de z_0 est plus compliqué : f n'est pas bornée (sinon on aurait une singularité artificielle) mais ne tend pas non plus vers l'infini (sinon on aurait un pôle). Si on reprend la fonction $h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ elle n'est ni bornée, puisqu'elle tend vers $+\infty$ si z tend vers 0 en étant réel positif, ni ne tend vers l'infini (en module) puisqu'elle est bornée sur l'axe imaginaire.

Dans l'étude des singularités on rencontre souvent le cas suivant.

Proposition 6.1. Soient $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes avec f, g non-nulles, et soit z_0 un zéro de g . Alors il existe $R > 0$ tel que $\frac{f}{g}$ soit définie sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. On note n_g l'ordre de z_0 en tant que zéro de g et n_f son ordre en tant que zéro de f (avec $n_f = 0$ si $f(z_0) \neq 0$).

- Si $n_f \geq n_g$ alors z_0 est une singularité artificielle de $\frac{f}{g}$ et z_0 est un zéro d'ordre $n_f - n_g$ du prolongement de $\frac{f}{g}$ (ce n'est pas un zéro si $n_f = n_g$).
- Si $n_f < n_g$ alors z_0 est un pôle d'ordre $n_g - n_f$ de $\frac{f}{g}$.

Démonstration. Par définition de l'ordre d'un zéro on peut écrire

$$f(z) = (z - z_0)^{n_f} \tilde{f}(z) \quad \text{et} \quad g(z) = (z - z_0)^{n_g} \tilde{g}(z)$$

avec $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ holomorphes telles que $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ et $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Par continuité de $\tilde{g}$ il existe $R > 0$ tel que $\tilde{g}(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(z_0, R)$. Sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a donc

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n_f - n_g} h(z)$$

avec $h = \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ holomorphe et $h(z_0) \neq 0$. Le résultat découle alors de la Définition 6.2 et de celle de l'ordre d'un zéro. $\square$

6.2 Fonctions méromorphes et résidus

Dans la section précédente on s'est restreint, pour simplifier la présentation, au cas où une fonction f n'avait qu'un seul point qui était une singularité isolée. On peut généraliser cela au cas de plusieurs (même une infinité) de points. Si on appelle A l'ensemble de ces points, l'important est que l'ensemble A soit discret, i.e. que tous les points soient isolés. On peut alors les traiter alors un par un. Si $z_0 \in A$, on choisit $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \cap A = \{z_0\}$ (c'est possible car A est discret) et bien sûr $D(z_0, R) \subset \Omega$ (c'est également possible puisque Ω est ouvert). On peut alors étudier z_0 comme singularité de f restreinte à $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Exemple 6.2. La fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par $f(z) = \frac{\sin(z)}{z(z+1)}$ admet deux singularités isolées 0 et -1 . On peut vérifier que 0 est une singularité artificielle tandis que -1 est un pôle d'ordre 1.

Définition 6.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction f est dite méromorphe sur Ω s'il existe une partie discrète $\mathcal{P} \subset \Omega$ telle que f soit holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ et admette un pôle en tout $z \in \mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est appelé l'ensemble des pôles de f .

Exemple 6.3. Si P, Q sont deux fonctions polynomiales avec $Q \neq 0$ alors $f = \frac{P}{Q}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ est inclus dans l'ensemble des zéros de Q (qui est un ensemble fini donc discret). Si de plus P et Q sont premiers entre eux alors $\mathcal{P}$ est exactement l'ensemble des zéros de Q et l'ordre de multiplicité d'un pôle $z_0 \in \mathcal{P}$ est égal à l'ordre de multiplicité de z_0 en tant que zéro de Q .

Le résultat suivant généralise le cas des fractions rationnelles (quotient de polynômes) et découle directement de la Proposition 6.1.

Proposition 6.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes avec $g \neq 0$. Alors $\frac{f}{g}$ est méromorphe sur Ω et l'ensemble des pôles de $\frac{f}{g}$ est inclus dans l'ensemble des zéros de g .

Démonstration. La seule chose à prouver est que l'ensemble $\mathcal{P}$ des pôles est bien discret. C'est une conséquence du principe des zéros isolés. $\square$

Proposition 6.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f, g deux fonctions méromorphes sur Ω . Alors les fonctions $f + g$, fg et f' sont méromorphes sur Ω . Le quotient $\frac{f}{g}$ est méromorphe sur tout ouvert connexe par arcs $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ sur lequel g n'est pas identiquement nulle.

Démonstration. Soit $\mathcal{P}_f$, resp. $\mathcal{P}_g$, l'ensemble des pôles de f , resp. de g . L'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_f \cup \mathcal{P}_g$ est un ensemble discret et sur $\Omega \setminus \mathcal{P}$ les fonctions $f + g$, fg et f' sont holomorphes comme somme, produit ou dérivée de fonctions holomorphes.

Si $z_0 \in \mathcal{P}$, il existe n_f et n_g (les ordres de z_0 en tant que pôle de f et g avec $n_f = 0$ si z_0 n'est pas un pôle de f et $n_g = 0$ si ce n'est pas un pôle de g) tels que $\tilde{f}(z) = (z - z_0)^{n_f} f(z)$ et $\tilde{g}(z) = (z - z_0)^{n_g} g(z)$ se prolongent en fonctions holomorphes sur un disque $D(z_0, R)$. On peut alors écrire, sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, avec $n = \max(n_f, n_g)$

$$\begin{aligned}(f + g)(z) &= \frac{(z - z_0)^{n-n_f} \tilde{f}(z) + (z - z_0)^{n-n_g} \tilde{g}(z)}{(z - z_0)^n}, \\ (fg)(z) &= \frac{\tilde{f}(z) \tilde{g}(z)}{(z - z_0)^{n_f+n_g}}, \\ f'(z) &= \frac{(z - z_0) \tilde{f}'(z) - n_f \tilde{f}(z)}{(z - z_0)^{n_f+1}}.\end{aligned}$$

Pour chacune des ces fonctions le numérateur se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 ce qui prouve que z_0 est soit une singularité artificielle soit un pôle.

Finalement, si $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ est connexe par arcs et g est non-nulle sur $\tilde{\Omega}$ alors l'ensemble Z des zéros de g sur $\tilde{\Omega}$ est un ensemble discret d'après le principe des zéros isolés. L'ensemble $\tilde{\mathcal{P}} = (\mathcal{P} \cap \tilde{\Omega}) \cup Z$ est donc une partie discrète de $\tilde{\Omega}$ et la fonction $\frac{1}{g}$ est holomorphe sur $\tilde{\Omega} \setminus \tilde{\mathcal{P}}$. Si $z_0 \in \tilde{\mathcal{P}}$ est un zéro d'ordre m de g alors, d'après la Proposition 6.1, c'est un pôle d'ordre m de $\frac{1}{g}$ et si z_0 est un pôle d'ordre m de g alors $\frac{1}{g}$ admet une singularité artificielle en z_0 , et z_0 est même un zéro d'ordre m du prolongement. La fonction $\frac{1}{g}$ est donc méromorphe sur $\tilde{\Omega}$ et par produit la fonction $\frac{f}{g}$ aussi. $\square$

On a vu dans le chapitre précédent que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert étoilé Ω alors l'intégrale de f le long d'un lacet est nulle. On voudrait voir ce qu'il se passe si on remplace f holomorphe par f méromorphe. La formule de Cauchy assure par exemple que si g est holomorphe sur Ω et si $z_0 \in \Omega$ alors pour tout lacet γ ne passant pas par z_0 on a

$$\int_{\gamma} \frac{g(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi g(z_0) \text{Ind}(\gamma, z_0).$$

La fonction $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$ est méromorphe sur Ω avec, sauf si $g(z_0) = 0$, un pôle simple en z_0 . Que se passe-t-il si on divise maintenant par $(z - z_0)^n$, i.e. si on considère un pôle d'ordre plus élevé? Et s'il y a plusieurs pôles?

Supposons d'abord que f soit méromorphe sur un ouvert étoilé Ω et qu'elle ait un unique pôle en z_0 , d'ordre m . On a vu dans la section précédente, voir l'équation (6.2), que dans un disque $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on pouvait écrire f sous la forme

$$f(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} + h(z)$$

avec h holomorphe sur $D(z_0, R)$. Puisque la fonction $g(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ et qu'on a supposé que z_0 était le seul pôle de f cela prouve que $h(z) = f(z) - g(z)$ est en fait holomorphe sur tout Ω . Si on prend un lacet γ dont l'image est dans Ω et qui ne passe pas par z_0 on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{j=1}^m \int_{\gamma} \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} dz + \int_{\gamma} h(z) dz \\ &= \sum_{j=1}^m a_{-j} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^j} \\ &= 2i\pi a_{-1} \text{Ind}(\gamma, z_0). \end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière ligne la définition de l'indice et le fait que si $j > 1$ la fonction $\frac{1}{(z - z_0)^j}$ a une primitive et donc que son intégrale le long d'un lacet est nulle. On voit que seul le terme $\frac{a_{-1}}{z - z_0}$ a une contribution non nulle à l'intégrale et que c'est le coefficient a_{-1} qui joue un rôle clé dans la valeur de cette dernière.

Remarque 6.3. Si $m = 1$ on a simplement $f(z) = \frac{a_{-1} + (z - z_0)h(z)}{z - z_0}$ et la fonction $g(z) = a_{-1} + (z - z_0)h(z)$ est holomorphe avec $g(z_0) = a_{-1}$. On retrouve bien ainsi la formule de Cauchy.

Définition 6.4. Soit Ω un ouvert et f une fonction méromorphe sur Ω . Si $z_0 \in \Omega$ est un pôle de f et $R > 0$ tel que dans $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on puisse décomposer f sous la forme $f(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} + h(z)$ avec h holomorphe sur $D(z_0, R)$, alors la fonction g définie par $g(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j}$ s'appelle la partie principale de f en z_0 . Le coefficient a_{-1} s'appelle le résidu de f en z_0 et on le note $\text{Res}(f, z_0)$.

Remarque 6.4. Si z_0 est une singularité artificielle de f , i.e. si f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 , on notera parfois $\text{Res}(f, z_0) = 0$.

Si une fonction méromorphe f a plusieurs pôles on peut bien sûr s'attendre à ce que les différents pôles apportent chacun une contribution. C'est ce qu'on a pu observer dans l'exemple introductif en début de chapitre. Le théorème qui suit généralise le calcul précédent au cas d'une fonction méromorphe quelconque, i.e. avec un nombre arbitraire de pôles.

Théorème 6.2. [Théorème des résidus] Soit Ω un ouvert étoilé et f une fonction méromorphe sur Ω . On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de f . Pour tout lacet γ inclus dans Ω et ne passant pas par $\mathcal{P}$ on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{Res}(f, z) \text{Ind}(\gamma, z). \quad (6.3)$$

La somme dans le membre de droite converge dans le sens où il n'y a qu'un nombre fini de termes non-nuls.

Remarque 6.5. Comme dans la Section 5.2 on peut généraliser l'hypothèse sur Ω et remplacer ouvert étoilé par ouvert simplement connexe, voir la Remarque 5.14. On ne peut cependant pas se passer d'une hypothèse sur Ω .

Démonstration. On fait la preuve dans le cas où $\mathcal{P}$ est un ensemble fini (non-vidé sinon f est holomorphe et le résultat est celui du Théorème 5.3).

Soient $z_1, \dots, z_p$ les pôles de f . On notera m_j l'ordre du pôle z_j . Pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ il existe $R_j > 0$ et $a_{-1,j}, \dots, a_{-m_j,j} \in \mathbb{C}$ tels que sur $D(z_j, R_j) \setminus \{z_j\}$ la fonction

$$h_j(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z - z_j)^k}$$

se prolonge de façon holomorphe en z_j . On considère la fonction $g : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_p\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z - z_j)^k}.$$

La fonction g est holomorphe (somme de fonctions holomorphes). De plus, étant donné $\ell \in \{1, \dots, p\}$, si $z \in D(z_\ell, R_\ell) \setminus \{z_\ell\}$ on a alors

$$g(z) = h_\ell(z) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z - z_j)^k}.$$

La fonction h_ℓ se prolonge de façon holomorphe en z_ℓ , et les fonctions $z \mapsto \frac{1}{(z - z_j)^k}$ sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ donc holomorphes au voisinage de z_ℓ pour tout $j \neq \ell$. On en déduit que g se prolonge aussi de façon holomorphe en z_ℓ , et ce dernier est donc une singularité artificielle de g . C'est vrai pour tout ℓ et donc la fonction g se prolonge de façon holomorphe sur Ω tout entier. On notera toujours g ce prolongement. Ainsi on a montré qu'il existe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{k,j}}{(z - z_j)^k}, \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_p\}.$$

On a alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{m_j} \int_{\gamma} \frac{a_{k,j}}{(z - z_j)^k} dz = \sum_{j=1}^p \int_{\gamma} \frac{a_{-1,j}}{z - z_j} dz,$$

où on a utilisé le fait que g est holomorphe, donc son intégrale le long d'un lacet est nulle, et que toutes les fonctions $\frac{1}{(z - z_j)^k}$ pour $k \geq 2$ ont des primitives et donc leur intégrale le long d'un lacet est nulle également. Finalement par définition de l'indice on a $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_j} dz = 2i\pi \text{Ind}(\gamma, z_j)$ et par définition du résidu on a $a_{-1,j} = \text{Res}(f, z_j)$, donc on a bien

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^p \text{Res}(f, z_j) \text{Ind}(\gamma, z_j) = \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{Res}(f, z) \text{Ind}(\gamma, z). \quad \square$$

Avant de donner des exemples d'application de ce théorème on va s'intéresser à la question du calcul des résidus. L'indice d'un point par rapport à un lacet correspond au nombre de tours, comptés algébriquement, que fait le lacet autour du point et est donc relativement facile à trouver dans la pratique. Mais pour calculer le résidu il faut a priori pouvoir trouver le coefficient en $\frac{1}{z - z_j}$ de chaque pôle de f . La proposition suivante permet de trouver facilement ces résidus dans un grand nombre de cas.

Proposition 6.4. Soit Ω un ouvert, f méromorphe sur Ω et z_0 un pôle de f .

1. Si z_0 est un pôle simple de f alors $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$.
2. Si z_0 est un pôle d'ordre $m \geq 1$ de f alors $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z)$ où $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$.
3. Si $f = \frac{g}{h}$ sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ avec g, h holomorphes sur $D(z_0, R)$ et telles que z_0 est un zéro d'ordre 1 de h alors $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Démonstration. 1. Si z_0 est un pôle simple de f on peut écrire, voir (6.2), $f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z)$ avec h holomorphe. Ainsi on a facilement

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (a_{-1} + (z - z_0)h(z)) = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

2. Le raisonnement est le même que ci-dessus. D'après (6.2) on peut écrire

$$f(z) = \sum_{j=1}^m \frac{a_{-j}}{(z - z_0)^j} + h(z) \iff g(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{j=1}^m a_{-j} (z - z_0)^{m-j} + (z - z_0)^m h(z).$$

La fonction h est holomorphe donc en la développant en série entière, dans un disque centré en z_0 on a

$$g(z) = \sum_{j=1}^m a_{-j} (z - z_0)^{m-j} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k+m} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

avec $c_n = a_{n-m}$ si $n < m$ et $c_n = b_{n-m}$ si $n \geq m$. La fonction g se prolonge bien en une fonction holomorphe en z_0 . Si on note toujours g ce prolongement en utilisant le Corollaire 3.1 on a donc

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = c_{m-1} = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

3. Puisque z_0 est un zéro d'ordre 1 de h on a $h'(z_0) \neq 0$. Soit z_0 est aussi un zéro de g , i.e. $g(z_0) = 0$, et alors d'après la Proposition 6.1 z_0 est une singularité artificielle de f . Ainsi son résidu en z_0 est nul et on a bien $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$. Soit z_0 n'est pas un zéro de g , i.e. $g(z_0) \neq 0$, et alors z_0 est un pôle simple de f donc d'après 1. on a $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$. Mais pour tout $z \neq z_0$ on peut écrire

$$(z - z_0)f(z) = g(z) \times \frac{z - z_0}{h(z)} = g(z) \times \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)}.$$

Comme g est holomorphe elle est continue en z_0 donc $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0)$. Enfin h est holomorphe en z_0 et $h'(z_0) \neq 0$ donc on a $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{1}{h'(z_0)}$ et finalement

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \times \frac{z - z_0}{h(z) - h(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

□

Exemple 6.4. On voudrait calculer $I = \int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z \sin(z)} dz$ où γ décrit le cercle $C(0, 4)$ parcouru dans le sens trigonométrique. La fonction $f(z) = \frac{e^{2z}}{z \sin(z)}$ s'écrit sous la forme $f = \frac{g}{h}$ avec $g(z) = e^{2z}$ et $h(z) = z \sin(z)$ holomorphes sur $\mathbb{C}$. Donc f est bien méromorphe, sur $\mathbb{C}$ qui est étoilé. A l'intérieur de γ le dénominateur $h(z) = z \sin(z)$ s'annule en $z = 0$ mais aussi en $z = -\pi$ et en $z = \pi$. Il y a donc 3 pôles à prendre en compte et on aura

$$\int_{\gamma} \frac{e^{2z}}{z \sin(z)} dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in \{-\pi, 0, \pi\}} \text{Res}\left(\frac{e^{2z}}{z \sin(z)}, z_0\right) \times \underbrace{\text{Ind}(\gamma, z_0)}_{=1}.$$

Il reste à calculer les résidus de f en chacun des pôles $-\pi$, 0 et π .

- $-\pi$ et π sont des pôles simples car $h'(\pm\pi) = \mp\pi \neq 0$. Comme $f = \frac{g}{h}$ et que $\pm\pi$ sont des zéros d'ordre 1 de h on a $\text{Res}(f, \pm\pi) = \frac{g(\pm\pi)}{h'(\pm\pi)} = \mp \frac{e^{\pm 2\pi}}{\pi}$.
- 0 est un pôle double. En effet $h'(z) = \sin(z) + z \cos(z)$ et $h''(z) = 2 \cos(z) - z \sin(z)$ donc $h'(0) = 0$ et $h''(0) = 2 \neq 0$. On trouve donc $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \varphi'(z)$ où $\varphi(z) = z^2 f(z) = \frac{ze^{2z}}{\sin(z)}$. On a alors $\varphi'(z) = \frac{e^{2z} [(1 + 2z) \sin(z) - z \cos(z)]}{\sin^2(z)}$ et à l'aide d'un

DL2 en 0 on trouve $\text{Res}(f, 0) = 2$.

Conclusion : $I = 2i\pi \times \left(\frac{e^{-2\pi}}{\pi} + 2 - \frac{e^{2\pi}}{\pi} \right) = 4i\pi - 4i \sinh(2\pi)$.

Application au calcul d'intégrales réelles. On termine cette section avec une application du théorème des résidus au calcul de certaines intégrales dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6.5. On veut calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin(t)}$. On peut d'abord noter que la fonction $t \mapsto \frac{1}{2 + \sin(t)}$ est continue sur $[0, 2\pi]$ (et même sur $\mathbb{R}$) donc I est bien définie. Si on écrit $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ on a alors

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2i}{4i + e^{it} - e^{-it}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{e^{i2t} + 4ie^{it} - 1} dt.$$

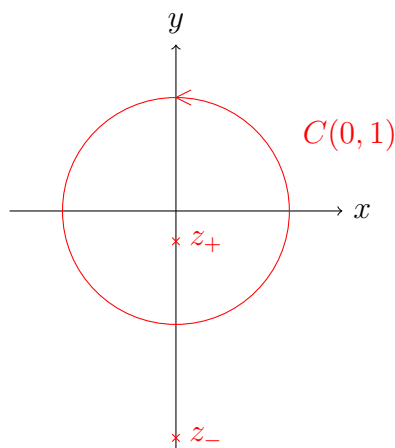
La forme de l'intégrale invite à considérer comme lacet le cercle $C(0, 1)$ parcouru dans le sens trigonométrique. Celui-ci est paramétré par $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$ et on a donc

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz.$$

Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$. La fonction f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ (c'est un quotient de deux polynômes). Son dénominateur se factorise facilement :

$$z^2 + 4iz - 1 = (z + 2i)^2 + 3 = (z + 2i + i\sqrt{3})(z + 2i - i\sqrt{3}).$$

La fonction f a donc deux pôles simples : $z_- = -i(2 + \sqrt{3})$ et $z_+ = -i(2 - \sqrt{3})$. On vérifie que z_- est à l'extérieur du cercle $C(0, 1)$ tandis que z_+ est à l'intérieur (voir le dessin ci-dessous). Ainsi $\text{Ind}(C(0, 1), z_-) = 0$ et $\text{Ind}(C(0, 1), z_+) = 1$.



Il reste à calculer le résidu de f en z_+ (inutile de calculer celui en z_- puisque $\text{Ind}(C(0, 1), z_-) = 0$). En utilisant au choix le 1. ou le 3. de la Proposition 6.4 on trouve

$$\text{Res}(f, z_+) = \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{2}{z - z_-} = \frac{2}{z_+ - z_-} = \frac{1}{i\sqrt{3}}.$$

Finalement, puisque f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est étoilé, le théorème des résidus assure que $I = 2i\pi \times \frac{1}{i\sqrt{3}} \times 1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Bien entendu le résultat est un nombre réel, et il est positif puisque la fonction de départ était réelle positive.

Remarque 6.6. Avec le même type de raisonnement on peut calculer des intégrales du type $\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos(t), \sin(t))}{Q(\cos(t), \sin(t))} dt$ où P, Q sont des polynômes de deux variables. Vous avez vu en L1 qu'on pouvait calculer ce type d'intégrale avec un changements de variables de la forme $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, $u = \cos(t)$, $u = \sin(t)$ ou $u = \tan(t)$ (règles de Bioche). Essayez d'appliquer cette méthode ici et comparez avec le calcul effectué ci-dessus.

Exemple 6.6. On considère l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ où $n \geq 2$ est un entier pair. Le fait que n soit pair garantit que la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ (que se passe-t-il si n est impair ?). La condition $n \geq 2$ garantit elle que l'intégrale converge (prouvez-le !). On va chercher à calculer cette intégrale. Là encore vous avez vu une méthode en L2 qui permet de calculer ce type d'intégrales. La fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ est une fraction rationnelle. Il "suffit" donc de factoriser $1+x^n$ en produit de facteurs irréductibles et de décomposer f en éléments simples. Pour n assez petit, disons 2 ou 4, ça se fait assez bien mais si $n = 14$ par exemple ce n'est plus aussi simple. C'est surtout très fastidieux. On va ici encore essayer

d'appliquer le théorème des résidus. Il va falloir cependant procéder en deux temps, comme dans l'application à la formule de Cauchy (voir la Section 5.4), car l'intégrale va de $-\infty$ à $+\infty$ et un lacet ne peut pas "aller vers l'infini".

Puisque l'intégrale converge on a $I = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R$ avec $I_R = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^n}$. On va considérer l'intégrale de la fonction méromorphe $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ le long du lacet γ_R constitué du segment allant de $z = -R$ à $z = R$ et du demi-cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique (voir le dessin ci-dessous). On pourra alors écrire

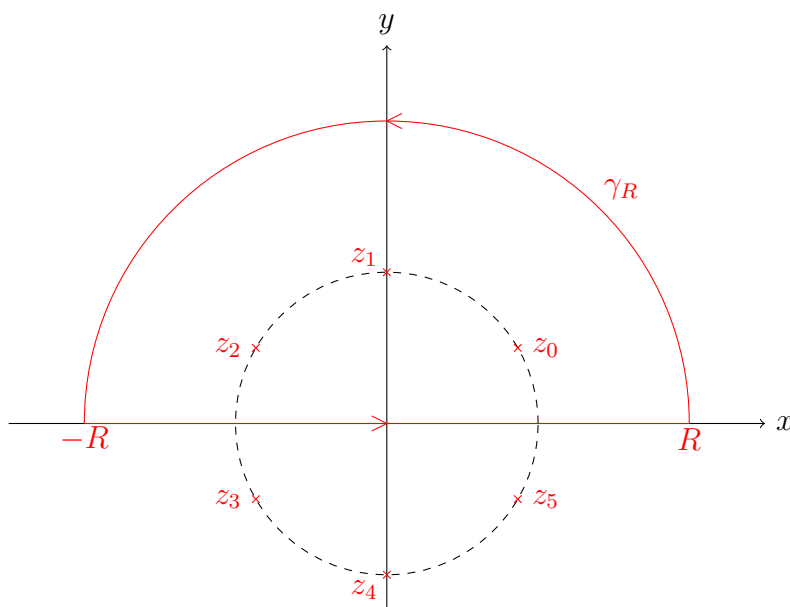
$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{[-R,R]} f(z) dz + \int_{C^+(0,R)} f(z) dz,$$

où $C^+(0, R)$ désigne le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique. Celui-ci peut être paramétré par $\gamma(t) = Re^{it}$ avec $t \in [0, \pi]$. On aura donc

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_0^\pi \frac{1}{1+R^n e^{int}} i R e^{it} dt.$$

On va calculer l'intégrale dans le membre de gauche à l'aide du théorème des résidus et on passera ensuite à la limite $R \rightarrow \infty$.

La fonction f a exactement n pôles simples. En effet c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur est de degré n et dont les racines sont les n racines n -ème de -1 : ce sont les nombres $z_k = e^{i\frac{\pi}{n} + i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Tous les pôles sont de module 1 donc si $R > 1$ aucun pôle n'est sur γ_R . On fait ici le dessin dans le cas $n = 6$.



Le théorème des résidus (f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui est étoilé) assure alors que

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \text{Res}(f, z_k) \text{Ind}(\gamma_R, z_k).$$

Comme tous les pôles de f sont simples, pour calculer le résidu de f en z_k on peut appliquer le 3. de la Proposition 6.4 avec $g(z) = 1$ et $h(z) = 1 + z^n$. On a donc

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{1}{nz_k^{n-1}} = \frac{1}{n} e^{-i\frac{n-1}{n}(2k+1)\pi} = -\frac{1}{n} e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}.$$

Pour calculer l'indice de chacun des z_k il faut voir quels sont ceux qui sont à l'intérieur de γ_R . Puisque $R > 1$ et $|z_k| = 1$ il suffit de voir quels sont ceux qui ont une partie imaginaire positive. Or $\operatorname{Im}(z_k) = \sin\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)$ avec $\frac{\pi}{n} \leq \frac{2k+1}{n}\pi \leq \frac{(2n-1)\pi}{n} < 2\pi$. Ceux qui ont une partie imaginaire positive sont ceux pour lesquels $\frac{2k+1}{n}\pi \leq \pi$, i.e. $k = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$ (on rappelle que n est pair). Ainsi on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z) dz &= -\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{n/2-1} e^{i\frac{2k+1}{n}\pi} \\ &= -\frac{2i\pi}{n} \times e^{i\frac{\pi}{n}} \times \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n/2}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} \quad (\text{somme géométrique}) \\ &= -\frac{2i\pi}{n} \times \frac{2}{e^{-i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{2\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}, \end{aligned}$$

et donc pour tout $R > 1$ on a

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^n} &= \int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_0^\pi \frac{1}{1+R^n e^{int}} i R e^{it} dt \\ &= \frac{2\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} - \int_0^\pi \frac{1}{1+R^n e^{int}} i R e^{it} dt. \end{aligned}$$

Il reste à passer à la limite $R \rightarrow +\infty$. Pour tout $R > 1$ et tout $t \in [0, \pi]$ on a

$$\left| \frac{1}{1+R^n e^{int}} i R e^{it} \right| = \frac{R}{|1+R^n e^{int}|} \leq \frac{R}{|R^n e^{int}| - 1} = \frac{R}{R^n - 1}.$$

Donc

$$0 \leq \left| \int_0^\pi \frac{1}{1+R^n e^{int}} i R e^{it} dt \right| \leq \frac{\pi R}{R^n - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement on obtient

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

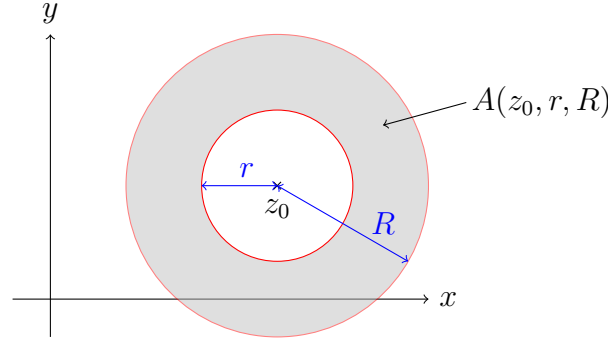
A nouveau bien entendu le résultat est un nombre réel, et il est positif puisque la fonction de départ était réelle positive.

6.3 Compléments : Séries de Laurent et singularités essentielles

La notion de série de Laurent permet entre autres de traiter de façon “unifiée” les différents types de singularités : artificielles, pôles mais aussi essentielles. Le point de départ des séries de Laurent est l'étude des fonctions holomorphes dans une couronne.

Définition 6.5. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle couronne, ou anneau, de centre z_0 et de rayons r et R l'ensemble

$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}.$$



Remarque 6.7. 1) Si R est fini l'ensemble $A(z_0, r, R)$ est la partie du plan comprise strictement entre les cercles de centre z_0 et de rayons r et R .

2) Un cas important qu'on a déjà rencontré est celui où $r = 0$. On a alors simplement $A(z_0, 0, R) = D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. On parle alors aussi de disque épointé.

Définition 6.6. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle série de Laurent sur $A(z_0, r, R)$ toute série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ où

1. la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R ,
2. la série entière $\sum_{n \geq 1} a_{-n}(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{r}$ avec
par convention $\frac{1}{r} = +\infty$ si $r = 0$.

Proposition 6.5. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$ une série de Laurent sur $A(z_0, r, R)$. Pour tous $r < r_1 \leq r_2 < R$ la série converge normalement sur $A(z_0, r_1, r_2)$ dans le sens où les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ et $\sum_{n \leq -1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n \geq 1} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ convergent normalement sur cet ensemble. En particulier toute série de Laurent définit une fonction f holomorphe sur $A(z_0, r, R)$ où

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

On notera plus simplement $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ cette fonction.

Démonstration. La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R . Elle converge donc normalement sur $D(z_0, r_2)$ et donc aussi sur $A(z_0, r_1, r_2) \subset D(z_0, r_2)$.

De même la série entière $\sum_{n \geq 1} a_{-n}(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{r}$. Puisque $r_1 > r$ on a $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r}$ et donc la série $\sum_{n \geq 1} |a_{-n}| \frac{1}{r_1^n}$ converge. Or, si $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ on a $|z - z_0| > r_1$ et donc, pour tout $n \geq 1$, $|a_{-n}(z - z_0)^{-n}| = \frac{|a_{-n}|}{|z - z_0|^n} < \frac{|a_{-n}|}{r_1^n}$. La série $\sum_{n \geq 1} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ converge donc normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r_1\}$ et donc sur $A(z_0, r_1, r_2)$.

Finalement une série entière définit une fonction holomorphe. Ainsi les fonctions $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ sont holomorphes sur $D(0, R)$ et $D\left(0, \frac{1}{r}\right)$ respectivement. La fonction f définie par $f(z) = g(z - z_0) + h\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ est donc holomorphe sur

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\} \cap \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{1}{z - z_0}\right| < \frac{1}{r}\right\} = A(z_0, r, R).$$

□

La proposition précédente dit que toute série de Laurent définit une fonction holomorphe dans un anneau. On va établir la réciproque, c'est à dire que toute fonction holomorphe f dans un anneau $A(z_0, r, R)$ peut s'écrire sous la forme d'une série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ dans cet anneau. Plus précisément on a le théorème suivant.

Théorème 6.3. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ et f une fonction holomorphe sur $A(z_0, r, R)$. Alors

1. pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le nombre $a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) e^{-int} dt$ ne dépend pas de $\rho \in]r, R[$,
2. la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R et la série entière $\sum_{n \geq 1} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{r}$,
3. pour tout $z \in A(z_0, r, R)$ on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Un tel développement est unique.

Remarque 6.8. La formule $a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) e^{-int} dt$ peut également s'écrire

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, \rho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad \forall \rho \in]r, R[.$$

Ce théorème est l'analogue, pour les fonctions holomorphes sur un anneau, du Théorème 4.4. La preuve reprend d'ailleurs plusieurs éléments qu'on a déjà rencontrés. On commence par le lemme suivant qui sera utilisé plusieurs fois par la suite.

Lemme 6.1. *Soit f une fonction holomorphe sur $A(z_0, r, R)$. Alors l'intégrale $\int_{C(z_0, \rho)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \times i\rho e^{it} dt$ de f le long d'un cercle centré en z_0 ne dépend pas de $\rho \in]r, R[$.*

On a déjà rencontré le fait qu'une certaine intégrale le long d'un cercle ne dépende pas du rayon de celui-ci. C'est le cas de la formule de Cauchy par exemple. La preuve reprend la même idée que celle du Lemme 4.2.

Démonstration. Soit g la fonction définie sur $]r, R[$ par $g(\rho) = \int_0^{2\pi} \underbrace{f(z_0 + \rho e^{it}) \times i\rho e^{it}}_{=: \phi(\rho, t)} dt$.

On veut montrer que g est constante. Comme f est holomorphe, et donc C^1 , la fonction ϕ est une fonction C^1 de deux variables et les résultats sur les intégrales à paramètres assurent que g est C^1 avec

$$g'(\rho) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial \rho}(\rho, t) dt = \int_0^{2\pi} (f'(z_0 + \rho e^{it}) \times e^{it} \times i\rho e^{it} + f(z_0 + \rho e^{it}) \times ie^{it}) dt.$$

On reconnaît sous le signe intégrale la dérivée (par rapport à t) de la fonction $t \mapsto f(z_0 + \rho e^{it}) e^{it}$. On en déduit, puisque cette fonction est 2π -périodique, que

$$g'(\rho) = [f(z_0 + \rho e^{it}) e^{it}]_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

La fonction g' est nulle et donc g est constante. □

Démonstration du Théorème.

- 1) Le fait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le nombre $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, \rho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ ne dépende pas de ρ découle directement du Lemme 6.1 puisque la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$ est holomorphe dans $A(z_0, r, R)$ (quotient de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas).
- 2) Soit $\rho \in]r, R[$. La fonction f est holomorphe, donc continue, sur le compact $C(z_0, \rho)$. Elle y est donc bornée. On note $M_\rho = \sup_{z \in C(z_0, \rho)} |f(z)|$. On en déduit que pour tout entier n on a

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it}) e^{-int}| dt \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}.$$

La série entière $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ a donc un rayon de convergence au moins égal à ρ (c'est le même argument que dans la preuve du Lemme 4.1). Comme c'est vrai pour tout $\rho < R$ le rayon de convergence est au moins égal à R .

De même, on en déduit que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_{-n}(z - z_0)^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{\rho}$ et comme c'est vrai pour tout $\rho > r$ on obtient que le rayon de convergence est au moins égal à $\frac{1}{r}$.

3) Soit $z \in A(z_0, r, R)$. Si $\rho \in]r, R[$ on a alors

$$a_n(z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \times \left(\frac{z - z_0}{\rho e^{it}} \right)^n dt,$$

et on veut calculer les sommes des séries

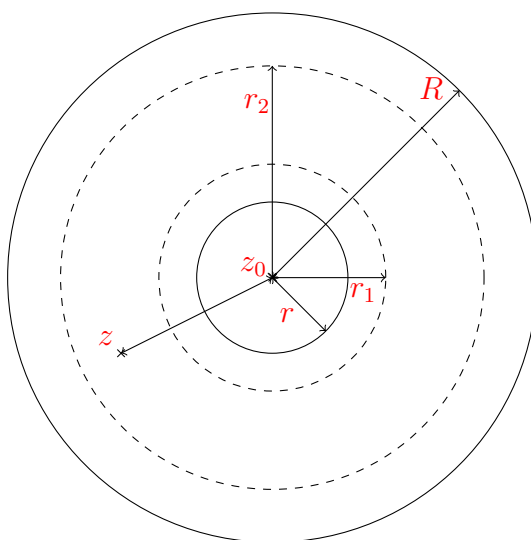
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \times \left(\frac{z - z_0}{\rho e^{it}} \right)^n dt$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) \times \left(\frac{\rho e^{it}}{z - z_0} \right)^n dt.$$

Tout comme dans la preuve du Théorème 4.4 on va chercher à intervertir série/intégrale pour faire apparaître la somme d'une série géométrique. Pour cela on va distinguer les deux séries. Dans la première on va choisir $\rho > |z - z_0|$ et dans la seconde on va choisir $\rho < |z - z_0|$, dans les deux cas pour avoir une série géométrique de raison strictement inférieure à 1.

On choisit donc r_1, r_2 tels que $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$ (voir dessin ci-dessous).



On a d'une part, en prenant $\rho = r_2$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_2 e^{it}) \times \left(\frac{z - z_0}{r_2 e^{it}} \right)^n dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + r_2 e^{it}) \times \left(\frac{z - z_0}{r_2 e^{it}} \right)^n dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_2 e^{it}) \times \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{r_2 e^{it}}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_2 e^{it})}{z_0 + r_2 e^{it} - z} r_2 e^{it} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw, \end{aligned}$$

et d'autre part, en prenant $\rho = r_1$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_1 e^{it}) \times \left(\frac{r_1 e^{it}}{z - z_0} \right)^n dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(z_0 + r_1 e^{it}) \times \left(\frac{r_1 e^{it}}{z - z_0} \right)^n dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_1 e^{it}) \times \frac{\frac{r_1 e^{it}}{z - z_0}}{1 - \frac{r_1 e^{it}}{z - z_0}} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r_1 e^{it})}{z - z_0 - r_1 e^{it}} r_1 e^{it} dt \\
 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw.
 \end{aligned}$$

Dans les deux cas la justification de l'interversion série/intégrale se fait comme dans la preuve du Lemme 4.1 (vérifiez-le!).

Il reste à justifier que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z). \quad (6.4)$$

Dans le membre de gauche on intègre la même fonction le long de deux cercles de rayons différents. Si la fonction intégrée, ici $w \mapsto \frac{f(w)}{w - z}$, était holomorphe dans un anneau contenant ces deux cercles alors le membre de gauche serait nul d'après le Lemme 6.1. Ici ce n'est pas le cas car le dénominateur s'annule précisément en un point entre les deux cercles. C'est justement ça qui fait que la différence n'est pas nulle. Cela ressemble à ce qui se passe dans la formule de Cauchy (Théorème 5.7) et on va procéder exactement comme dans la preuve de celle-ci.

On décompose $f(w)$ sous la forme $f(w) = (f(w) - f(z)) + f(z)$ et on a alors, pour $j = 1$ ou 2 ,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_j)} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_j)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw + \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_j)} \frac{f(z)}{w - z} dw \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_j)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw + f(z) \times \text{Ind}(C(z_0, r_j), z).
 \end{aligned}$$

La position de z par rapport aux cercles $C(z_0, r_1)$ et $C(z_0, r_2)$ donne $\text{Ind}(C(z_0, r_1), z) = 0$ et $\text{Ind}(C(z_0, r_2), z) = 1$, et donc

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw + f(z).
 \end{aligned}$$

On introduit alors la fonction g définie sur $A(z_0, r, R)$ par $g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ si $w \neq z$ et $g(z) = f'(z)$. Le même argument que dans la preuve du Théorème 5.7 montre que g est

holomorphe sur $A(z_0, r, R)$. On peut cette fois appliquer le Lemme 6.1 ce qui prouve que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw$$

et donc qu'on a bien (6.4).

On montre enfin l'unicité du développement en série de Laurent. On suppose que $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$. On veut montrer que pour tout n on a $b_n = a_n$. Soit $\rho \in]r, R[$ et r_1, r_2 tels que $r < r_1 < \rho < r_2 < R$. Comme il y a convergence normale sur $A(z_0, r_1, r_2)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \rho^n e^{int} e^{-imt}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ vers $f(z_0 + \rho e^{it}) e^{-imt}$. Si $m \in \mathbb{Z}$ on a donc

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2\pi \rho^m} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) e^{-imt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi \rho^m} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \rho^n e^{i(n-m)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi \rho^m} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} b_n \rho^n e^{i(n-m)t} dt. \end{aligned}$$

Toutes les intégrales $\int_0^{2\pi} b_n \rho^n e^{i(n-m)t} dt$ sont nulles sauf lorsque $n = m$ et elle vaut alors $2\pi b_m \rho^m$. Au final on a bien $a_m = b_m$. $\square$

On revient maintenant aux singularités de fonctions holomorphes. Si $z_0 \in \Omega$ est une singularité isolée d'une fonction holomorphe f , comme Ω est ouvert il existe $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$ et tel que f est holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\} = A(z_0, 0, R)$. Le théorème précédent assure ainsi qu'il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n. \quad (6.5)$$

Cette décomposition ressemble à celle obtenue en (6.1) dans le cas où z_0 est un pôle. On va en fait voir que c'est la décomposition (6.1) qui est un cas particulier de (6.5) et que la décomposition en série de Laurent permet également de classer les singularités.

Proposition 6.6. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et f une fonction holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ dont le développement en série de Laurent est donné par (6.5).*

1. *Si $a_{-n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors z_0 est une singularité artificielle de f .*
2. *Si $a_{-n} \neq 0$ pour un nombre fini non nul d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ alors z_0 est un pôle de f . De plus l'ordre du pôle est $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_{-n} \neq 0\}$.*
3. *Si $a_{-n} \neq 0$ pour une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ alors z_0 est une singularité essentielle de f .*

Démonstration. Les 1. et le 2. découlent directement de la définition de singularité artificielle et de celle de pôle.

En effet, si $a_{-n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ alors d'après (6.5) pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

et f se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 en posant $f(z_0) = a_0$.

Si maintenant $a_{-n} \neq 0$ pour un nombre fini non nul d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_{-n} \neq 0\}$ alors, toujours d'après (6.5), pour tout $z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} \sum_{n=-n_0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n+n_0} = \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k-n_0} (z - z_0)^k.$$

La fonction $g(z) = (z - z_0)^{n_0} f(z)$ se prolonge donc en fonction holomorphe en z_0 en posant $g(z_0) = a_{-n_0} \neq 0$. z_0 est donc bien un pôle et comme $a_{n_0} \neq 0$ l'ordre du pôle est bien n_0 .

Finalement pour le 3. il suffit d'utiliser l'unicité du développement en séries de Laurent. En effet, si z_0 n'était pas une singularité essentielle ce serait une singularité artificielle ou un pôle. On pourrait donc écrire, dans $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, la fonction f sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

où $n_0 = 0$ si z_0 est une singularité artificielle et n_0 est l'ordre du pôle z_0 sinon. Par unicité du développement en série de Laurent on aurait alors $a_n = 0$ pour tout $n \leq -n_0$ ($n \in \mathbb{Z}$). $\square$

On peut enfin démontrer que le théorème des résidus se généralise au cas de fonctions ayant des singularités essentielles. Pour cela, et par analogie avec ce qu'on a fait pour les fonctions méromorphes, on définit la notion de résidu.

Définition 6.7. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ tel que f soit holomorphe sur $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ et

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ son développement en séries de Laurent. Le nombre a_{-1} s'appelle le

résidu de f en z_0 et est noté $\text{Res}(f, z_0)$, i.e. $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} f(z) dz$ où $0 < r < R$.

On a alors

Théorème 6.4 (Théorème des résidus - 2). Soit Ω un ouvert étoilé, $\mathcal{P}$ une partie discrète de Ω et $f : \Omega \setminus \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Pour tout lacet γ inclus dans Ω et ne passant pas par $\mathcal{P}$ on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{z \in \mathcal{P}} \text{Res}(f, z) \text{Ind}(\gamma, z).$$

La somme dans le membre de droite converge dans le sens où il n'y a qu'un nombre fini de termes non-nuls.

Remarque 6.9. La preuve est essentiellement la même que pour les fonctions méromorphes. La seule difficulté est de justifier l'intégration terme à terme de la partie d'indices négatifs dans la série de Laurent alors qu'on avait juste une somme finie dans le cas des fonctions méromorphes. Cela se justifie en utilisant la convergence uniforme de la série des termes d'indices négatifs.