L3 Mathématiques
2022/2023
Analyse complexe

TD 3 : Fonctions analytiques

Exercice 1. Soit f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1; 3\}$ par $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z-3)}$. Donner des DSE de f en 0 et i. A chaque fois on précisera bien sur quel disque ce DSE a lieu.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{2^n}$. La fonction f est-elle définie en $2-3\mathrm{i}$? Quelle est la valeur du prolongement analytique de f au point $2-3\mathrm{i}$? Donner le DSE du prolongement de f en $2-3\mathrm{i}$ en précisant sur quel ensemble ce DSE a lieu.

Exercice 3. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.
a) Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions C^1. Montrer que si $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$.
Remarque : l'ensemble $\mathcal{A} = \{f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe $C^1\}$ est un anneau pour la somme et le produit usuel des fonctions. Quelle propriété sur cet anneau vient-on de montrer ?
b) Montrer que ce résultat n'est pas vrai si on remplace C^1 par continues.
c) Montrer que, si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on peut trouver $f, g : I \to \mathbb{R}$ de classes C^1 et non nulles telles que $fg = 0$. Remarque : on peut ici remplacer C^1 par C^∞, essayez de le faire.

Exercice 4. Soit $\Omega = D(0, 1)$.
a) Existe-t-il des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1 telles que $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Si oui, les déterminer.
b) Même question avec f telle que $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{n}$ et $f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right) = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5. Soit $\Omega = D(0, 1)$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1 - \exp\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$.
a) Déterminer tous les zéros de f.
b) Ce résultat contredit-il le principe des zéros isolés ?

Exercice 6. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $(a_n)_n$ une suite d'éléments de Ω qui converge vers $a \in \Omega$ et telle que $a \neq a_n$ pour tout n.
a) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique telle que $f(a_n) = 0$ pour tout n. Montrer que $f = 0$.
b) On suppose maintenant que $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ sont analytiques, ne s'annulent pas et vérifient $\dfrac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \dfrac{g'(a_n)}{g(a_n)}$ pour tout n. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = cg$.
c) Montrer que le résultat du a) n'est plus forcément vrai si $a \notin \Omega$.

Exercice 7. Soit Ω un domaine borné et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et C^1 sur Ω. On rappelle que $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Montrer que si f ne s'annule pas alors il existe $z_0 \in \partial\Omega$ tel que $|f(z_0)| = \min_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(z) = z^2 + 3z - 4$. Déterminer le maximum et le minimum de $|f|$ sur $\overline{D}(0, 2)$.
Même question pour la fonction définie par $f(z) = z^2 + z + 2$ sur $\overline{D}(0, 1)$.

Exercice 9 (CC4 - 2021)**.** Si $r > 0$ on note $D(0, r)$, $\overline{D}(0, r)$ et $C(0, r)$ les disque ouvert, disque fermé et cercle de centre 0 et rayon r. Soit $R > 0$ et $f : D(0, R) \to \mathbb{C}$ de classe C^1.

a) Montrer que pour tout $r \in]0, R[$ le nombre $M(r) = \sup_{z \in C(0,r)} |f(z)|$ est bien défini.

b) Soient $0 < r \leq r' < R$. Montrer que $M(r) \leq M(r')$. Indication : principe du maximum.

c) En déduire que la fonction $M :]0, R[\to \mathbb{R}_+$ est croissante.

d) On suppose que M n'est pas strictement croissante.

i) Montrer qu'il existe $r_2 > 0$ tel que f est constante sur $\overline{D}(0, r_2)$. Indication : choisir $r_1 < r_2$ tels que $M(r_1) = M(r_2)$.

ii) En déduire que f est constante sur $D(0, R)$.

Exercice 10. Soit Ω un domaine tel que $\overline{D}(0, 1) \subset \Omega$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1.

a) On suppose que pour tout $z \in \Omega$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante. Indication : Cauchy-Riemann.

b) On suppose maintenant que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| = 1$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$.

i) Montrer que $f(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in D(0, 1)$. Indication : on pourra appliquer le principe du maximum aux fonctions $g(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(z)}$ et $h(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}f(z)}$.

ii) En déduire que f est constante sur $D(0, 1)$ puis qu'elle est constante sur Ω.

Exercice 11 (Examen session 2 - Juin 2022)**.** Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on note $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros.

a) Donner un exemple de fonction C^1 non constante tel que $Z(f)$ soit vide. Vous justifierez votre réponse.

b) Donner un exemple de fonction C^1 non constante tel que $Z(f)$ soit infini. Vous justifierez votre réponse.

c) Soit $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$ un ensemble fini. Donner un exemple de fonction C^1 tel que $Z(f) = A$.

d) Montrer que si f n'est pas la fonction nulle alors pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ l'ensemble $Z(f) \cap K$ est un ensemble fini, éventuellement vide. Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 12. Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non-nulle.

a) Soit $K \subset \Omega$ un ensemble compact. Montrer que f admet un nombre fini de zéros dans K. Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

b) On suppose dans cette question uniquement que $\Omega = \mathbb{C}$. En considérant les ensembles $K_n = \overline{D}(0, n)$ montrer que $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = 0\}$ est au plus dénombrable.

c) Le but de cette question est de montrer que le résultat du b) reste vrai quelque soit Ω.

i) Pour $n \geq 1$ on pose $F_n = \{z \in \Omega \,|\, D(z, \frac{1}{n}) \subset \Omega\}$. Montrer que F_n est un ensemble fermé.

ii) Montrer que $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f(z) = 0\}$ est au plus dénombrable. Indication : on pourra considérer $K_n = F_n \cap \overline{D}(0, n)$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$, $R > 0$ et $C \geq 0$ tels que $|f(z)| \leq C|z|^m$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Le but de cet exercice est de généraliser le Théorème de Liouville qui correspond au cas $m = 0$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > R$ on a $|f^{(n)}(0)| \leq Cn!r^{m-n}$.

b) En déduire que f est un polynôme de degré au plus m.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. On suppose que $\lim\limits_{|z| \to \infty} |f(z)| = +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer que f est une fonction polynôme.

a) On veut montrer que la fonction f s'annule au moins une fois.

 i) Montrer que si f ne s'annule pas alors la fonction $\frac{1}{f}$ est C^1 et bornée.

 ii) En déduire que f s'annule au moins une fois.

b) Montrer qu'il existe un compact K tel que f ne s'annule pas en dehors de K. En déduire que f admet un nombre fini de zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

c) Pour tout j on note n_j l'ordre de α_j comme zéro de f.

 i) Montrer qu'il existe $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 qui ne s'annule pas et telle

$$f(z) = g(z) \times \prod_{j=1}^{m} (z - \alpha_j)^{n_j}.$$

 ii) On note $N = n_1 + \cdots + n_m$. Montrer qu'il existe $C, R > 0$ tel que $\left| \dfrac{1}{g(z)} \right| \leq C|z|^N$ pour tout $z \notin D(0, R)$.

 iii) En déduire que la fonction $\dfrac{1}{g}$ est constante. Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

d) Conclure.