L1 MPI
2011/2012
S1 Mathématiques

TD n^{o}3: Nombres complexes

Exercice 1.
a) Montrer que $A = (1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ est réel.
b) On donne $z = 3-2i$. Déterminer les parties réelle et imaginaire de l'inverse de z.
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $(1+2i)z - 3 + 5i = 0$, $2z + 3\overline{z} = 5$, $\overline{z}^2 + 2|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice 2.
a) Calculer le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$, $2i(1+i)(1+i\sqrt{3})$, $\frac{-3\sqrt{3}-3i}{1+i}$.
b) Montrer que $(-1+i)^{10} = -32i$.
c) Calculer le module et un argument de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$. En déduire z^6.
d) Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\overline{z} = 1/z$.

Exercice 3. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants:

$$ie^{i\theta},\ 1 + e^{i\theta},\ e^{i\theta} + e^{i\alpha}, \quad (\theta,\ \alpha \in [0, 2\pi]).$$

Exercice 4. Vérifier que pour tous complexes z, z' on a
a) $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\mathrm{Re}(z\overline{z})$.
b) $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$ et $|z| \geq |\mathrm{I}m(z)| \geq \mathrm{I}m(z)$.

Exercice 5.
a) Exprimer en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

$$\cos(2\theta),\ \sin(2\theta),\ \cos(3\theta),\ \sin(6\theta).$$

b) Linéariser

$$\cos^2\theta,\ \sin^3\theta,\ \sin^4\theta,\ (\sin^2\theta)(cos^3\theta).$$

Exercice 6. Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.
a) Calculer les modules et arguments de z_1 et z_2.
b) Donner la forme algébrique et trigonométrique de $z_1 z_2$.
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 7. Représenter dans le plan complexe les ensembles suivants:
a) $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 3\}$.
b) $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) = \pi/4 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
c) $A_3 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z - \overline{z} = 2\}$.
d) $A_4 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \frac{|z-1|}{|z-i|} = 1\}$.
e) $A_5 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z + \overline{z} = 2|z-1|\}$.

Exercice 8. Calculer les racines sixièmes de l'unité.

Exercice 9. Calculer les racines 4-ièmes de -1 et les racines 5-ièmes de $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 10.

a) Calculer les racines carrés de -7, $8i$, $-2i$, $1-i$, $-3+4i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

i) $z^2 - 2z + 5 = 0$.

ii) $z^2 + (4-6i)z - 5 - 14i = 0$.

iii) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$.

Exercice 11. Soient $\phi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\phi)z + 1 = 0$.

b) En déduire les solutions de l'équation $z^{2n} - 2\cos(\phi)z^n + 1 = 0$.

Exercice 12.

a) Montrer que l'équation

$$z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12) = 0, \qquad (E)$$

admet une solution réelle et une solution imaginaire pur, puis résoudre (E).

b) Montrer que les points dont les affixes sont les solutions de (E) sont alignés.

Exercice 13.

a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué.

b) Déterminer les nombres complexes non nuls z tel que z, $1/z$ et $1-z$ aient le même module.

Exercice 14. Montrer que la somme des n racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

Exercice 15. Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1 et $S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.

a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$.

b) En déduire que $S = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k$.

c) Calculer ωS et en déduire la valeur de S.

Exercice 16.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^5 - 1 = 0$ et représenter les solutions dans le plan complexe.

On pose $u = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$.

b) Montrer que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$.

c) Vérifier que

$$u + u^4 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \text{ et } u^2 + u^3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

d) En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, puis calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.